УДК 532.5

Вихревая динамика: наследие Гельмгольца и Кельвина*

Кейт Моффатт
Кафедра прикладной математики и теоретической физики,
Центр математических наук, Кембридж
Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WA, UK

В 2007 г. будет отмечаться столетняя годовщина смерти Уильяма Томсона (лорда Кельвина), одного из великих создателей вихревой динамики девятнадцатого столетия. Кельвин был вдохновлен знаменитой работой Германна фон Гельмгольца 1858 г. “Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen”, переведенной П. Г. Тейтом и опубликованной на английском языке в 1867 г. под названием “On Integrals of the Hydrodynamical Equations, which express Vortex-motion” (Об интегралах гидродинамических уравнений, описывающих вихревое движение). Кельвин построил свою «Вихревую теорию атомов» (1867–1875) на том основании, что если заморозить вихревые линии в потоке идеальной жидкости, их топология должна быть инвариантной. Сейчас мы знаем, что эта инвариантность заложена в сохранении спиральности в надлежащим образом определенных лагранжевых подобластях в жидкости. Усилия Кельвина были остановлены осознанием того, что все трехмерные вихревые структуры, за исключением простейших, являются динамически неустойчивыми, из-за чего его вихревая теория атомов не дожила до начала двадцатого столетия. История науки могла бы пойти совершенно другим путем, если бы Кельвин сформулировал свою теорию в терминах магнитных трубок тока в идеально проводящей жидкости, вместо вихревых трубок в идеальной жидкости; т. к. в этом случае существуют устойчивые узловые структуры в точности того вида, который предсказал Кельвин, и спектр их характеристических частот можно легко определить. В этой вводной лекции мы рассмотрим некоторые аспекты основополагающих работ Гельмгольца и Кельвина в свете современных знаний.

Ключевые слова: связанные вихревые трубки, вихревые нити, магнитогидродинамика, трубки магнитного потока.

Keith Moffatt

Vortex Dynamics: the Legacy of Helmholtz and Kelvin

The year 2007 will mark the centenary of the death of William Thomson (Lord Kelvin), one of the great nineteenth-century pioneers of vortex dynamics. Kelvin was inspired by Hermann von Helmholtz’s (1858) famous paper “Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen”, translated by P. G. Tait and published in English (1867) under the title “On Integrals of the Hydrodynamical Equations, which express Vortex-motion”. Kelvin conceived his “Vortex theory of Atoms” (1867-1875) on the basis that, since vortex lines are frozen in the flow of an ideal fluid, their topology should be invariant. We now know that this invariance is encapsulated in the conservation of helicity in suitably defined Lagrangian fluid subdomains. Kelvin’s efforts were thwarted by the realisation that all but the very simplest three-dimensional vortex structures are dynamically unstable, and his vortex theory of atoms perished in consequence before the dawn of the twentieth century. The course of scientific history might have been very different if Kelvin had formulated his theory in terms of magnetic flux tubes in a perfectly conducting fluid, instead of vortex tubes in an ideal fluid; for in this case, stable knotted structures, of just the kind that Kelvin envisaged, do exist, and their spectrum of characteristic frequencies can be readily defined. This introductory lecture will review some aspects of these seminal contributions of Helmholtz and Kelvin, in the light of current knowledge.

Keywords: knotted vortex tubes, vortex filaments, magnetohydrodynamics, magnetic flux tubes.
Mathematical Subject Classifications: 76B47, 75W05

* Эта статья будет опубликована в Трудах IUTAM-симпозиума «Гамильтонова динамика. Вихревые структуры. Турбулентность» (Proceedings of the IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence) в издательстве Springer-Verlag. Настоящий русский перевод выполнен для публикации в журнале «Нелинейная Динамика» с разрешения автора статьи и издательства.

Вступительное слово

Для меня большая честь приветствовать вас от имени Бюро IUTAM на этом Симпозиуме по гамильтоновой динамике, вихревым структурам и турбулентности. Подготовка симпозиума заняла два года, и я поздравляю его организаторов, которым удалось сформировать превосходную, обширную программу докладов, а также собрать здесь столь представительное общество для обсуждения различных задач динамики жидкости, многие из которых имеют длинную историю, но, тем не менее, по-прежнему сохраняют актуальность и фундаментальное значение.

Все вы знаете, что сокращение IUTAM расшифровывается как Международный союз по теоретической и прикладной механике. Этот союз входит в число международных научных союзов-членов Совета ICSU (International Council for Science), который в этом году отмечает свое семидесятипятилетние. История IUTAM восходит к самым ранним Конгрессам по механике, первый из которых состоялся в Делфте в Нидерландах в 1924 г. IUTAM был формально учрежден в качестве Международного союза на Седьмом конгрессе в Лондоне в 1948 г. В 1972 г. здесь, в Москве, был проведен 13-й Конгресс по теоретической и прикладной механике, на котором председательствовал великий Мусхелишвили. Последний, 21-й Конгресс, состоялся в Варшаве в 2004 г., а следующий будет проводиться в Аделаиде, Южная Австралия, в 2008 г.

Помимо конгрессов, под эгидой IUTAM также проводятся международные симпозиумы. В среднем в год проходит около восьми IUTAM-симпозиумов, охватывающих все области механики жидкости и твердого тела, а также динамики абсолютно твердого тела. Настоящий симпозиум следует сложившейся традиции симпозиумов, посвященных разным аспектам вихревой динамики и турбулентности. Я перечислю лишь несколько наиболее важных из симпозиумов, состоявшихся в последние годы, труды которых доступны сейчас в опубликованном виде:

1999, Седона, Аризона, США:
Ламинарно-турбулентный перенос (Laminar-Turbulent Transition)

1999, Хаяма, Япония:
Геометрия и статистика турбулентности (Geometry and Statistics of Turbulence)

2000, Лимерик, Ирландия:
Математическое моделирование динамики атмосферы и океана (Mathematical Modelling of Atmosphere and Ocean Dynamics)

2000, Марсель, Франция:
Вихревые следы за плохо обтекаемым телом и вибрация, порожденная вихрями (Bluff-Body Wakes and Vortex-induced Vibration)

2001, Кингстон, Онтарио, Канада:
Турбулентное перемешивание и горение (Turbulent Mixing and Combustion)

2001, Закопане, Польша:
Трубки, слои и особенности в динамике жидкостей (Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics)

2002, Принстон, Нью-Джерси, США:
Моделирование по критерию подобия Рейнольдса в турбулентном потоке (Reynolds Number Scaling in Turbulent Flow)

2004, Манчестер, Англия:
Неединственность решений уравнений Навье-Стокса и их связь с ламинарно-турбулентным переносом (Non-Uniqueness of Solutions to the Navier-Stokes Equations and their connection with Laminar-Turbulent Transition)

2004, Киото, Япония:
Элементарные вихри и когерентные структуры: значение в турбулентной динамике (Elementary Vortices and Coherent Structures: Significance in Turbulence Dynamics)

2004, Бангалор, Индия:
Ламинарно-турбулентный перенос (Laminar-Turbulent Transition)

Эта замечательная серия научных встреч отражает высокую важность исследований в области вихревой динамики и турбулентности и многообразие их приложений. Одна из тем настоящего симпозиума — гамильтоновы аспекты в динамике, но я ожидаю, что это граничное условие не будет нас слишком сдерживать, и, как видно из программы, негамильтоновы подходы будут играть не меньшую роль в наших дискуссиях.

Я в пятый раз приезжаю в этот великий город, хотя это мой первый приезд после грандиозных изменений, связанных с перестройкой 1991 г. В первый раз я приехал сюда в 1965 г. для участия в знаменитом совещании по атмосферной турбулентности и распространению радиоволн, которое проводили А. М. Обухов, Акива Яглом и их коллеги из Института физики атмосферы. Я помню, как мы пили какую-то отличную водку по этому случаю и я надеюсь возобновить свое знакомство с этой питательной жидкостью. Недавно я с радостью узнал, что статья, которую я представил на это совещание и которая была посвящена взаимодействию турбулентности с сильным ветровым сдвигом, сохраняет определенное значение и сейчас.

От имени IUTAM я приветствую вас на этом симпозиуме и желаю всем вам приятной и продуктивной работы в Москве.

1. Истоки теории узлов и топологии в динамике жидкостей

Вихревая динамика ведет свою историю с основополагающей работы Германна фон Гельмгольца [7], который (i) ввел понятия вихревой линии и вихревой трубки (объем жидкости, ограниченный вихревыми линиями, проходящими через точки «бесконечно малой замкнутой кривой»), (ii) вывел уравнение завихренности для идеальной несжимаемой жидкости и (iii) показал, что вихревые линии переносятся жидкостью с напряжением, пропорциональным растяжению составляющих ее линейных элементов. Эта работа составила основу для смелой, хотя и оказавшейся впоследствии ошибочной, гипотезы о «вихревом атоме», выдвинутой Вильямом Томсоном (Лорд Кельвин) [22, 23], профессором натурфилософии Университета Глазго, в попытке объяснить структуру и спектры атомов всех известных элементов с использованием закрученных и связанных вихревых нитей в гипотетическом фоновом идеальном жидком «эфире», пронизывающем всю вселенную. Именно эта гипотеза привела Питера Гутри Тейта, коллегу Кельвина, занимавшего аналогичную должность в близлежащем университете Эдинбурга, к разработке процедур для классификации узлов с малым числом пересечений (минимальное число двойных точек в любой проекции узла на плоскость) [19–21], что посеяло, таким образом, семена для развития топологии в качестве отдельной ветви современной математики. Эти исследования периода 1858–1885 гг. подробно рассмотрены Эппле [6], хорошо передавшим волнения и драматизм, связанные с этим замечательным этапом в истории Викторианской науки.

2. Роль Тейта в формировании интереса Кельвина

Работа Гельмгольца приобрела более широкую известность после публикации ее английского перевода Тейтом [18], который в заключительном абзаце указал, что его вариант «не претендует на то, чтобы считаться точным переводом», но с учетом последующей переработки, сделанной Гельмгольцем, «может быть принят как передающий дух оригинала». Тейт сделал свой перевод после получения немецкой версии в 1858 и, вдохновленный заключительными замечаниями Гельмгольца о поведении вихревых колец малого сечения, разработал метод для экспериментальной демонстрации распространения вихревых колец и «чехарды» вихревых колец, чередующихся последовательно при распространении вдоль общей оси симметрии. Несмотря на то, что Кельвин знал о работе Гельмгольца в 1858 г., интерес, достаточный для того, чтобы начать собственные серьезные исследования в вихревой динамике, появился у него лишь после того, как Тейт в 1867 г. продемонстрировал ему вихревые кольца в своей Эдинбургской лаборатории.

Второй абзац статьи Гельмгольца (в английском переводе Тейта) заслуживает комментария. Он пишет:

Однако Эйлер [Histoire de l'Academie des Sciences de Berlin, 1755, p. 292] четко указал на существование случаев движения жидкости, в которых не существует потенциала скорости, — например, вращение жидкости вокруг оси, при котором каждый элемент имеет одну и ту же угловую скорость. К силам, которые могут вызвать такие движения, можно отнести магнитное притяжение, в жидкости, проводящей электрические токи, и, особенно, трение либо между элементами жидкости, либо между ней и неподвижными телами. Эффект трения в жидкости пока математически не определен; однако, он весьма значителен, и, кроме случаев бесконечно малых колебаний, приводит к наиболее существенным различиям между теорией и фактом. Проблема определения этого эффекта и поиска выражений для его измерения связана в первую очередь с тем, что до сих пор не сформировались представления о разновидностях движения, вызываемого трением в жидкостях и газах. В связи с этим, мне представляется важным исследовать случаи движения, для которых не существует потенциала скорости.

Упоминание здесь свойства непотенциальности силы Лоренца (*магнитное притяжение в жидкости, проводящей электрический ток*) демонстрирует замечательное предвидение и признание ключевой роли внутреннего трения (т. е. вязкости). Очевидно, однако, что Гельмгольц не знал замечательной работы Стокса [16, 17], в которой весьма подробно проанализировано влияние вязкости в жидком континууме. В своем переводе Тейт добавляет сноску, в которой мягко обращает внимание на это упущение:

Часть содержания этой статьи была предвосхищена профессором Стоксом в ряде замечательных работ в Философских трудах Кембриджа; однако раскрытие природы и движений вихревых нитей является абсолютно новым и имеет важные последствия.

3. Аналогия между завихренностью и течением в качестве исходных полей

С 1953 по 1957 г. я был студентом Университета Эдинбурга в институте, который тогда назывался Институтом математической физики Тейта, и помню демонстрации «генератора вихревых колец» (который иногда называют «ящиком Кельвина», хотя, вероятно, его правильнее называть «ящиком Тейта») в программе третьего курса теоретической гидродинамики, который читал Робин Шлапп и который я слушал ровно 50 лет назад. Традиционный стиль представления этого материала с использованием Гидродинамики Лэмба в качестве единственного рекомендованного пособия настойчиво поддерживался и культивировался со времен Кельвина и Тейта. Параллельно с этим мы слушали курс электромагнетизма, который читал Николас Кеммер (унаследовавший от Макса Борна кафедру натурфилософии в Эдинбурге) и в контексте которого с тем же почтением упоминалось имя Джеймса Клерка Максвелла, родившегося и получившего образование в Эдинбурге, а впоследствии, первого Кавендишского профессора экспериментальной физики в Кембриджском университете (1871–1879). Тот факт, что соотношение между вихревыми нитями в механике жидкостей и полем скоростей, которое они порождают (через закон Био-Саварра) имеет тот же смысл, что и соотношение между токами в проводниках (т. е. «нитями тока») и магнитными полями, которые они порождают, был отмечен Гельмгольцем и в равной степени был известен Кельвину, который регулярно переписывался с Максвеллом по этому и близким к нему вопросам. Ниже мы еще будем говорить о том, что, как мы теперь знаем, такие междисциплинарные аналогии открывают широкие возможности для применения, которые не осознавались до появления магнитогидродинамики примерно столетие спустя. Я буду утверждать, что если бы Кельвин воспринимал эфир как идеально проводящую жидкую среду, содержащую связку трубок магнитного потока, а не как идеальную (невязкую) среду, содержащую связку вихревых нитей, его теория была бы намного более сильной, а развитие натурфилософии (т. е. физики) в начале двадцатого столетия могло бы пойти по совершенно другому пути.

4. Аналогия (неполная) между завихренностью и магнитным полем

Любопытно, что основные принципы, лежащие в основе магнитогидродинамики (МГД), были известны уже к середине девятнадцатого столетия, задолго до того, как Максвелл ввел «ток смещения», необходимый, чтобы обеспечить сохранение заряда; это обстоятельство проигнорировано в МГД, где между мгновенными значениями тока $\mathbf{j}$ и магнитного поля используется соотношение, определяемое законом Ампера $\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{B}$ (в «единицах Альфвена», в которых $\mathbf{B}$ имеет размерность скорости). В сочетании с законом индукции Фарадея и законом Ома для среды с удельным сопротивлением η, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, это дает известное уравнение индукции для магнитного поля:

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \eta\nabla^2\mathbf{B}. \tag{4.1}$$

Это уравнение имеет очевидное внешнее сходство с уравнением вихря

$$\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}) + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{4.2}$$

в непроводящей среде с кинематической вязкостью ν. Эта связь имеет поверхностный характер, т. к. притом, что $\boldsymbol{\omega}$ связана с $\mathbf{u}$ в (4.2) соотношением $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{u}$, для $\mathbf{B}$ не существует аналогичной связи с полем скорости переноса $\mathbf{v}$ в (4.1). Однако эта неполнота аналогии между $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не умаляет важности следующего вывода: так же, как (4.2) означает, что $\boldsymbol{\omega}$-линии (т. е. вихревые линии) переносятся вместе с жидкостью при $\nu = 0$, (4.1) означает, что $\mathbf{B}$-линии (т. е. магнитные силовые линии Фарадея) переносятся таким же образом при $\eta = 0$. Таким образом, сохранение топологии $\mathbf{B}$-поля в идеально проводящей жидкости могли бы послужить такой же удачной стартовой точкой для Кельвина (вместо сохранения топологии $\mathbf{B}$-поля в невязкой жидкости) при формулировке теории структуры и спектров атомов, причем более убедительной теории, т. к., как установлено в начале 20-го столетия, в атомах существуют микроскопические цепи электрических токов (условно изображаемые как электроны, движущиеся по орбитам в различных оболочках вокруг ядра) и связанные с ними магнитные поля.

5. Долгая задержка в развитии магнитогидродинамики

Таким образом, в 1860-е годы уже имелись все основные принципы для такого дополнительного подхода, однако Кельвин был сосредоточен на вихрях, а на электромагнитном фронте Максвелл сосредоточился на разработке единой теории электричества и магнетизма. МГД еще долго ожидала своего открытия, и только после работы Альфвена [1] эта тема достигла состояния, в котором важнейшее свойство «вмороженности» магнитного поля в идеально проводящую жидкость было, наконец, обнаружено. Вскоре после этого упоминавшаяся выше аналогия между завихренностью и магнитным полем была обнаружена и использована Бэтчелором [4] в первом исследовании влияния турбулентности на случайное магнитное поле. Взрывное развитие МГД в 1950-е и 1960-е годы было в значительной степени стимулировано технологическим проблемами, связанными с управляемым термоядерным синтезом, а также с признанием ее важнейшей роли в понимании фундаментальных процессов в астрофизике и геофизике.

6. Спиральность: мост между динамикой жидкостей и топологией

Представление Кельвина о роли закрученных и связанных вихревых трубок в гипотетическом эфире было в значительной степени качественным. Он правильно понял, что узлы и связи должны сохраняться, благодаря свойству вмороженности вихревых линий, но у него не было количественной меры такой закрученности и связанности. Простейшей количественной мерой такого типа для любого локализованного распределения завихренности может служить ее спиральность — интеграл скалярного произведения поля завихренности $\boldsymbol{\omega}$ и скорости $\mathbf{u}$, которую оно порождает:

$$H = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \, dV. \tag{6.1}$$

Эта величина является инвариантом уравнений Эйлера как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости при условии баротропии, когда давление p зависит только от плотности ρ: $p = p(\rho)$ [8, 13]. При обычном сцеплении двух вихревых трубок с циркуляциями κ_1 и κ_2 (каждая из них не имеет внутренней закрутки) центрированных на незакрученных, но, возможно, связанных замкнутых кривых C_1 и C_2, спиральность легко можно рассчитать как

$$H = \pm 2n\kappa_1\kappa_2, \tag{6.2}$$

где знак плюс или минус выбирается в зависимости от того, является ли сцепление право- или левосторонним, а n — целое число, равное гауссову числу связности для C_1 и C_2. Именно здесь наиболее наглядно прослеживается связь между топологией и динамикой жидкостей.

7. Связанные вихревые трубки

Для отдельной вихревой трубки T с циркуляцией κ, ось которой C содержит K узлов, ситуация требует более тонкого анализа. В этом случае спиральность выражается формулой

$$H = \kappa^2(Wr + Tw), \tag{7.1}$$

где W_r и T_w — кручение (writhe) C и изгиб (twist) T [12]. Кручение определяется двойным интегралом по C, аналогичным гауссовскому интегралу, и допускает интерпретацию в виде суммы (со знаками) пересечений в узлах с осреднением по всем проекциям. Изгиб можно разложить в виде

$$Tw = \frac{1}{2\pi}\Big(\int \tau(s)ds + N\Big), \tag{7.2}$$

где $\tau(s)$ — кручение C как функция длины дуги s, а N представляет внутреннее кручение вихревых линий вокруг оси C при их движении по контуру вокруг трубки (целое число, если эти вихревые линии являются замкнутыми). Если вихревая трубка деформируется какой-либо конфигурацией, которая в определенный момент содержит точку перегиба, то N в этот момент увеличивается на целое число, но этот скачок компенсируется равным по величине и противоположным по знаку скачком в общем кручении, так что Tw меняется непрерывно [12]. Как показал Калугареану [5] в чисто геометрическом контексте, а затем обобщил на большую размерность Уайт [24], сумма (5) действительно остается постоянной при произвольной деформации трубки.

8. Магнитная спиральность и нижняя граница энергии магнитного поля

Как следует из аналогии (хотя и неполной) между завихренностью и магнитным полем, существует аналогичный топологический инвариант $\mathbf{B}$ в идеально проводящей жидкости, а именно магнитная спиральность

$$H_M = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dV, \tag{8.1}$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал для $\mathbf{B}$: $\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$ (заметим, что интеграл (8.1) является калибровочным инвариантом при условии, что нормальная составляющая $\mathbf{B}$ обращается в нуль на границе области, занятой жидкостью). Этот инвариант был открыт Вольтйером [25], однако его топологическая интерпретация была получена лишь через несколько лет [8]. Этот инвариант дает важную нижнюю границу для энергии магнитного поля

$$M = \int \mathbf{B}^2/2 \, dV, \tag{8.2}$$

а именно [3]

$$M \geqslant q|H_M|$$

где q — константа (с размерностью (длина)$^{-1}$, зависящая только от топологии, геометрии и масштаба области. Аналогичной нижней границы для кинетической энергии, связанной с полем завихренности в идеальной жидкости, нет, и именно в этом огромное преимущество перехода к рассмотрению магнитной задачи.

9. Магнитная релаксация

Рассмотрим идеально проводящую несжимаемую жидкость, заключенную в фиксированной области Δ с поверхностью S, содержащую магнитное поле $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ с ненулевой магнитной спиральностью, причем в момент $t = 0$ жидкость находится в покое. В общем случае соответствующая сила Лоренца $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ определяет вращение, и жидкость будет двигаться под действием этой силы, при своем движении перенося магнитное поле, топология которого сохраняется. Если мы предположим, что жидкость имеет ненулевую вязкость, то при движении жидкости за счет вязкости происходит диссипация энергии (магнитной M плюс кинетической K), которая, поэтому, монотонно убывает; однако она ограничена неравенством (9), откуда следует, что $M + K$ стремится к константе, а, следовательно, скорость диссипации энергии стремится к нулю. Теперь, по крайней мере, разумно предположить, что поле скоростей должно стремиться к нулю равномерно на Δ и что мы должны придти к равновесному состоянию, которое устойчиво в рамках идеальной проводимости, поскольку магнитная энергия в этом случае минимальна при возмущениях замороженного поля; это магнитостатическое равновесие описывается балансом сил

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p,$$

где p — давление жидкости. Асимптотическое поле $\mathbf{B}$ получается из деформации $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ за счет поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, которое диссипирует конечное количество энергии в интервале времени $0 < t < \infty$; в этом смысле его можно назвать «топологически достижимым» из $\mathbf{B}_0$. Этот процесс подробно описан Мофаттом [9]. Его важной особенностью является возможность образования в релаксационном процессе в общем случае тангенциальных разрывов $\mathbf{B}$ (т. е. токовых слоев). Исходная конфигурация, для которой это происходит, состоит из двух связанных трубок магнитного потока, которые в процессе релаксации сжимаются по длине и расширяются в поперечном сечении (при сохранении объема), пока не достигнут контакта на открытой поверхности, которая при этом должна быть поверхностью тангенциального разрыва. В действительности в этом случае одна из трубок постепенно охватывает другую; при этом конечное магнитостатическое равновесие осесимметрично, а токовый слой (асимптотически) является тором.

10. Релаксация заузленных трубок тока

Трубка тока объема V, несущая магнитный поток Φ (аналог κ) с K узлами, имеет магнитную спиральность по аналогии с (5), т.е.

$$H_M = h\Phi^2,$$

где $h = Wr + Tw$ — сохраняющаяся сумма кручения и изгиба для трубки. Эта трубка при релаксации в соответствии с описанной выше процедурой переходит в состояние магнитостатического равновесия с минимальной энергией $M_{\min}$, определяемой тремя характеристическими параметрами начального поля, сохраняющимися в процессе релаксации, а именно, Φ, V, и h; из соображений размерности это соотношение должно иметь вид

$$M_{\min} = m_K(h)\Phi^2 V^{-1/3}, (12)$$

где $m_K(h)$ — безразмерная функция безразмерного параметра спиральности h, вид которой определяется только типом узла K [11]. Кроме того, это состояние, являясь устойчивым, характеризуется спектром действительных частот ω_n, которые, также из соображений размерности, определяются формулой

$$\omega_n = \Omega_{Kn}(h)\Phi V^{-1},$$

где $\Omega_{Kn}(h)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — также безразмерные функции h, определяемые только типом узла K. Я полагаю, что именно соотношения типа (12) и (13) были целью поисков Кельвина в связи с закрученными вихревыми трубками. Его поиски не привели к успеху, потому что не известна процедура релаксации в трехмерном случае, аналогичная описанной выше, сохраняющая топологию *завихренности* и минимизирующая кинетическую энергию.

11. Аналогичные потоки Эйлера

Существует, однако, другая аналогия (на этот раз полная!), являющаяся расширением аналогии, уже отмеченной Гельмгольцем и Кельвином, и кратко упомянутой выше в § 3. Это аналогия между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{u}$ (и, следовательно, между $\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{u}$). Аналогом (10) в данном случае будет

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla H,$$

где $H = p_0 - p$, для некоторого постоянного p_0. Легко видеть, что уравнение (14) является стационарной формой уравнения Эйлера, где H — полная энергия. Таким образом, каждому магнитостатическому равновесию, удовлетворяющему (10) соответствует стационарный эйлеров поток, который получается простой заменой $\mathbf{B}$ на $\mathbf{u}$, $\mathbf{j}$ на $\boldsymbol{\omega}$ и p на $p_0 - H$. Заметим, что по этой аналогии трубка магнитного потока соответствует не вихревой трубке в эйлеровом потоке, а трубке тока! Таким образом, трубка закрученного магнитного потока соответствует закрученной трубке тока — понятие, которое в контексте уравнений Эйлера выглядит несколько странно. Однако, несмотря на то, что для стационарного случая аналогия является полной, она не распространяется на устойчивость стационарного состояния: устойчивость конфигураций закрученного потока с минимальной энергией не означает устойчивости аналогичных эйлеровых потоков. Причина этого в том, что при возмущении магнитостатического равновесия в жидкости должно быть заморожено $\mathbf{B}$-поле, в то время как при возмущении эйлерова потока, удовлетворяющего уравнению Эйлера, содержащему время, в жидкости будет заморожено $\mathbf{u}$-поле, а не «аналогичное» $\mathbf{u}$-поле. Это тонкое отличие полностью меняет критерий устойчивости для стационарных состояний [10]. Следует ожидать, что аналогичные эйлеровы потоки будут в общем случае неустойчивы хотя бы потому, что они обычно содержат вихревые слои (аналоги упоминавшихся выше токовых слоев), которые в общем случае подвержены неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Рушон [15] показал, что устойчивые эйлеровы потоки, которые являются нетривиально трехмерными, не удовлетворяют достаточному условию устойчивости Арнольда [2]: траектории с постоянной энергией на листе «постоянной завихренности», проходящие через фиксированную точку в пространстве полей скорости без дивергенции с конечной энергией являются, как правило, гиперболическими, поэтому возмущенный поток не ограничивается сохранением энергии для того, чтобы он оставался вблизи фиксированной точки. Это не означает устойчивости, но делает ее весьма вероятной!

12. Заключение

Кельвин не сумел реализовать свои амбиции, связанные с вихрями, в двух аспектах: во-первых, он не смог найти устойчивых неосесимметричных решений уравнений Эйлера, содержащих закрученные вихревые линии, и, во-вторых, не смог доказать устойчивости даже простейших кольцевых вихревых конфигураций. Его исследования 1870-х и 1880-х годов заложили основу для будущих исследований многих проблем структуры и устойчивости вихрей, которые активно продолжаются в настоящее время; однако его начальная концепция «вихревого атома» не нашла подтверждения из-за указанных двух принципиальных барьеров для продвижения. Если вместо этого принять дополнительный сценарий трубок магнитного потока в идеально проводящей жидкости, то описанная выше естественная процедура магнитной релаксации в принципе ведет к устойчивому равновесию трубок магнитного потока, закрученных произвольным образом. Фактическая реализация процесса релаксации и определение частотного спектра этих устойчивых равновесий представляются важнейшими вычислительными задачами, которые должны лежать в сфере возможностей современных суперкомпьютеров. Я надеюсь, что вскоре найдутся исследователи, способные ответить на этот вызов и, таким образом, возродить представления и дух великих первооткрывателей, развивавших в девятнадцатом столетии проблемы, рассматриваемые на этом симпозиуме.

Список литературы

[1] Alfven H. *On the existence of electromagnetic-hydromagnetic waves* // Arkiv. F. Mat. Fysik, 1942, V. 29B, №2, (7 pp.)

[2] Arnol'd V. *Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinite et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits* // Ann. Inst. Fourier Grenoble, 1966, V.16, p. 319—361.

[3] Arnol'd V. *The asymptotic Hopf invariant and its applications* (in Russian). // Proc.Summer School in Diff. Eqns., Erevan, Armenian SSR Acad. Sci, 1974. (English translation: Sel. Math. Sov, 1986, V. 5, p. 327–345).

[4] Batchelor G. K. *On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion* // Proc. Roy. Soc. A, 1950, V. 201, p. 405—416.

[5] Călugăreanu G. *Sur les classes d'isotopie des nœuds tridimensionels et leurs invariants* // Czechoslovak Math. J., 1961, V. 11, p. 588.

[6] Epple M. *Topology, matter, and space, I: Topological notions in 19th-century natural philosophy* // Arch. Hist. Exact Sci. 1998, V. 52, p. 297–392.

[7] Helmholtz H. von *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen* // J. für die reine und angewandte Mathematik, 1858, V. 55, p. 25–55.

[8] Moffatt H. K. *The degree of knottedness of tangled vortex lines* // J. Fluid Mech., 1969, V. 35, p. 117–129.

[9] Moffatt H. K. *Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology*. Part 1, Fundamentals // J. Fluid Mech., 1985, V. 159, p. 359–378.

[10] Moffatt H. K. *Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology*. Part 2, Stability considerations // J. Fluid Mech., 1986, V. 166, p. 359–378.

[11] Moffatt H. K. *The energy spectrum of knots and links* // Nature, 1990, V. 347, p. 367–369 [see also News and Views, p. 332].

[12] Moffatt H. K. & Ricca R. *Helicity and the C lug reanu Invariant*. // Proc. R. Soc. Lond. A, 1992, V. 439, p. 411–429.

[13] Moreau J.-J. *Constants d'un ilot tourbillonaire en fluide parfait barotrope* // Comptes Rendus, Acad. des Sciences, 1961, V. 252, p. 28–103.

[14] Ricca R., Moffatt H. K. *The helicity of a knotted vortex filament* // Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas. (Ed. H. K. Moffatt, G. M. Zaslavsky, M. Tabor and P. Comte), Kluwer Acad. Publishers, 1992, p. 225–236.

[15] Rouchon P. *On the Arnol'd stability criterion for steady-state flows of an ideal fluid* // Eur. J. Mech. B/Fluids, 1991, V. 10, p. 651—661.

[16] Stokes G. G. *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids* // Proc Camb. Phil. Soc., 1845.

[17] Stokes G. G. *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums* // Proc Camb. Phil. Soc., 1850.

[18] Tait P. G. Translation of (Helmholtz 1858): *On the integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion* // Phil.Mag., 1867, V. 33, p. 485–512.

[19] Tait P. G. *On knots* // Trans. Roy. Soc. Edin., 1877, V. 28, p. 273.

[20] Tait P. G. *On knots: Part II* // Trans. Roy. Soc. Edin., 1884, V. 32, p. 327—339.

[21] Tait P. G. *On knots: Part III* // Trans. Roy. Soc. Edin., 1885, V. 32, p. 493–506.

[22] Thomson W. *(Lord Kelvin) On vortex atoms* // Proc. Roy. Soc. Edin., 1867, V. 6, p. 94–105.

[23] Thomson W. *(Lord Kelvin) On vortex motion* // Trans. Roy. Soc. Edin. 1869, V. 25, p. 217–260.

[24] White J. H. Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions. // Am. J. Math., 1969, V. 91, p. 693—728.

[25] Woltjer L. *A theorem on force-free magnetic fields* // Proc. Natl. Acad. Sci., 1958, V. 44, p. 489–491.