УДК 532.517.4

Уравнение вихря $2D$-гидродинамики, стационарное кинетическое уравнение Власова и развитая турбулентность*

В. В. Козлов

Российская академия наук
119901, Москва, Ленинский проспект, 14
E-mail: kozlov@pran.ru

Получено 1 ноября 2006 г.

Обсуждается круг вопросов, связанных с описанием развитой двумерной турбулентности, когда происходит стабилизация средних значений величин, характеризующих нестационарный поток. Более точно, рассматривается задача о слабом пределе распределения вихрей при плоском нестационарном течении идеальной жидкости, когда время стремится к бесконечности. Обсуждается связь уравнения вихря с известным кинетическим уравнением Власова.

Ключевые слова: уравнение вихря, интенсивность вихря, уравнение Власова.

Valery V. Kozlov

Vorticity equation of 2D-hydrodynamics, Vlasov steady-state kinetic equation and developed turbulence

The issues discussed in this paper relate to the description of developed two-dimensional turbulence, when the mean values of characteristics of steady flow stabilize. More exactly, the problem of a weak limit of vortex distribution in two-dimensional flow of an ideal fluid at time tending to infinity is considered. Relations between the vorticity equation and the well-known Vlasov equation are discussed.

Keywords: vortex motion equation, vorticity, Vlasov equation.
Mathematical Subject Classifications: 76Fxx, 76F70

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ-JSPS (05-01-02942).

1. Уравнение вихря как уравнение Лиувилля

Рассмотрим плоскопараллельное течение идеальной однородной жидкости в потенциальном силовом поле. Пусть x, y — декартовы координаты в плоскости течения, u, v — компоненты скорости частиц жидкости (они зависят от x, y и времени t). Уравнения движения можно представить в виде уравнений Ламба

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \omega v = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \omega u = -\frac{\partial f}{\partial y},$$

где $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ — вихрь, а f — функция Бернулли.

Из этих уравнений с учетом несжимаемости однородной жидкости $(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0)$ легко выводится уравнение, описывающее изменение вихря:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} u + \frac{\partial \omega}{\partial y} v = 0. \tag{1.1}$$

Таким образом, вихрь ω является первым интегралом дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = u\,(x, y, t)\,, \quad \dot{y} = v\,(x, y, t)\,, \tag{1.2}$$

описывающих движение частиц жидкости. Отсюда вытекает, в частности, классическая теорема Гельмгольца–Томсона о вмороженности вихрей в плоскопараллельный поток идеальной жидкости.

Уравнение (1.1) имеет вид статистического уравнения Лиувилля для неавтономной системы (1.2), поток которой сохраняет стандартную меру $dxdy$. Ввиду условия несжимаемости, уравнения (1.2) имеют гамильтонову форму

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где $\psi\,(x, y, t)$ — функция тока. Таким образом, уравнение вихря — это уравнение Лиувилля гамильтоновой системы, которая, вообще говоря, неавтономная.

Укажем одно из следствий. Пусть G — измеримая функция одной переменной. Тогда интеграл

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} G\,(\omega\,(x, y, t))\,dxdy$$

не зависит от времени t (в предположении, что этот интеграл сходится). Другими словами, он будет интегральным инвариантом системы дифференциальных уравнений (1.2). В частности, моменты всех порядков константы и информационная энтропия

$$-\iint |\omega| \ln |\omega|\,dxdy$$

также константа.

2. Уравнение вихря как уравнение Власова

Чтобы дальнейшее было более понятным, напомним сперва о кинетических уравнениях Власова, которые описывают эволюцию плотности континуума взаимодействующих частиц. Пусть $\rho(x, v, t)$ — плотность этого распределения, где x — координаты, а v — скорость частиц. Уравнение Власова (или уравнение самосогласованного поля) имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, v\right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}, F[\rho]\right) = 0, \\ F = -\frac{\partial}{\partial x} \iint K(x, y)\, \rho(y, v, t)\, dy dv\end{gathered} \tag{2.1}$$

— функционал от функции распределения ρ; это суммарная сила, действующая на частицу. Здесь $K(x, y)$ — потенциал парного взаимодействия. Обычно K зависит от расстояния $|x - y|$. Поскольку K не содержит явно времени, то уравнение (2.1) будет *стационарным* уравнением Власова: вся нестационарность определяется зависимостью функции распределения ρ от времени t.

Уравнение вихря (1.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \tag{2.2}$$

где

$$\Psi = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K\left(x, y; x', y'\right) \omega\left(x', y', t\right) dx' dy'$$

— функция тока,

$$K = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2} \tag{2.3}$$

— ядро линейного оператора — «парный потенциал взаимодействия». Функция K совпадает с гамильтонианом, описывающим движение частиц жидкости в поле вихря с единичной интенсивностью.

Сравнивая (2.1) и (2.2), мы видим, что (2.2) является стационарным уравнением «типа Власова».

Уравнение Власова (как и уравнение Лиувилля) есть *статистическое* уравнение. Пусть $\omega\big|_{t=0} \geqslant 0$ и выполнено условие нормировки:

$$\iint \omega d\mu = 1,$$

где $d\mu = dxdy$ — инвариантная «мера Лиувилля». Тогда в каждый момент времени $\omega \geqslant 0$,

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(x, y, t)\, d\mu = 1$$

и

$$P_t(D) = \iint\limits_{g^t(D)} \omega(x, y, t)\, d\mu = \mathrm{const}.$$

В последней формуле D — измеримая область плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x, y\}$, g^t — поток системы (1.2), а $P_t(D)$ — вероятность нахождения частицы жидкости в области D. Таким образом, мы имеем распределение вероятностей на плоскости, которое согласовано с течением жидкости.

Подчеркнем, что время в уравнении (2.2) входит лишь через зависимость вихря от t.

3. Слабая сходимость

Вихрь ω как функция t, как правило, осциллирует и, конечно, не имеет обычного предела при неограниченном возрастании времени. С точки зрения анализа статистических свойств течения было бы полезным изучить *слабую* сходимость $\omega_t = \omega(x, y, t)$. Напомним, что $\omega(x, y, t)$ слабо сходится к $\overline{\omega}(x, y)$, если для любой *пробной* функции $\varphi(x, y)$

$$\lim_{t\to\infty}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\omega(x,y,t)\,\varphi(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\omega}\varphi dxdy. \tag{3.1}$$

Если $\omega \in L_1$, то в качестве пробных функций естественно рассматривать все ограниченные измеримые функции.

Для решений более простого уравнения Лиувилля для квазиоднородной автономной гамильтоновой системы существование слабого предела доказано в работах [1, 2].

В силу ряда причин (изложенных, в частности, в п. 6) в определении (3.1) обычную сходимость по времени целесообразно заменить более сильной сходимостью по Чезаро:

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau(\cdot)_t\,dt.$$

После такой замены решения уравнения Лиувилля слабо сходятся уже в самом общем случае (единственно надо, конечно, предположить, что все решения уравнений Гамильтона продолжаются на всю временнýю ось). Это — хорошо известный результат эргодической теории, эквивалентный теореме фон Неймана.

По-видимому, справедлива следующая

Гипотеза. *Для почти всех начальных распределений вихря $\omega_0(x, y)$ существует слабый предел $\overline{\omega}$.*

Это предположение следует еще уточнить: надо ввести подходящее функциональное пространство для начальных данных ω_0 и определить в этом пространстве меру. Напомним, что (в отличие от трехмерного случая) плоскопараллельные течения идеальной жидкости регулярны при всех значениях времени. Этот результат восходит к работам Гельдера и Волибнера 1933 г.

Если ω_t слабо сходится к интегрируемой функции $\overline{\omega}$, то нестационарное течение идеальной жидкости стремится «в среднем» к стационарному течению с вихрем $\overline{\omega}$. Его поле скоростей находится по известным формулам

$$\overline{u}(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint\frac{(y-y')\,\overline{\omega}(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}dx'dy', \tag{3.2}$$

$$\overline{v}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\frac{(x-x')\,\overline{\omega}(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}dx'dy'. \tag{3.3}$$

Поле скоростей $(\overline{u}, \overline{v})$ следует отличать от «среднего поля», введенного в работах [3, 4]. Было бы интересным сравнить оба подхода.

На траекториях (линиях тока) стационарной системы

$$\dot{x}=\overline{u}(x,y)\,,\quad \dot{y}=\overline{v}(x,y)$$

постоянна функция тока

$$\overline{\Psi}(x,y)=\iint K\left(x,y;x',y'\right)\overline{\omega}\left(x',y'\right)dx'dy', \tag{3.4}$$

где K дается формулой (2.3). Для разрывных измеримых функций $\overline{\omega}$ функция (3.4) может быть лишь непрерывной. Но тогда ее линии уровня могут быть устроены весьма сложно (см., например, обзорную работу [5], где, в частности, обсуждаются геометрические свойства линий уровня случайно выбранной функции на плоскости).

4. Сингулярные меры и точечные вихри

Найдем решение уравнения вихря (2.2) в виде суммы δ-функций Дирака:

$$\omega(x,y,t)=\sum_{s=1}^{n}\varkappa_s\delta\left(x-x_s(t)\right)\delta\left(y-y_s(t)\right). \tag{4.1}$$

Слагаемое с номером s можно интерпретировать как точечный вихрь интенсивности $\varkappa_s$ в точке с координатами x_s, y_s. Обобщенная функция (4.1) представляет собой плотность сингулярной меры.

Покажем, что если (4.1) удовлетворяет уравнению (2.2), то функции $x_s(t)$ и $y_s(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям, описывающим динамику n взаимодействующих точечных вихрей. Действительно, подставляя выражение (4.1) в уравнение (2.2), используя тождество

$$\frac{d}{dt}\delta\left(x-z(t)\right)=\delta'\dot{z}$$

и стандартные свойства δ-функции, получаем

$$\begin{gathered}\sum\varkappa_s\left[\delta'(x-x_s)\,\delta(y-y_s)\,\dot{x}_s+\delta(x-x_s)\,\delta'(y-y_s)\,\dot{y}_s\right]\\-\sum\varkappa_j\delta'(x-x_j)\,\delta(y-y_j)\,\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2\pi}\sum\varkappa_i\ln\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}\right]\\+\sum\varkappa_j\delta(x-x_j)\,\delta'(y-y_j)\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2\pi}\sum\varkappa_i\ln\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}\right]=0.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Воспользуемся теперь следующим простым фактом: если

$$\sum\lambda_s(x,y)\,\delta'(x-x_s)\,\delta(y-y_s)+\mu_s(x,y)\,\delta(x-x_s)\,\delta'(y-y_s)\equiv0, \tag{4.3}$$

то в точке $x=x_s$, $y=y_s$ коэффициенты λ_s и μ_s обращаются в нуль. Для доказательства умножим (4.3) на пробную функцию $\varphi(x,y)$ и проинтегрируем по плоскости $\mathbb{R}^2=\{x,y\}$. Тогда

$$\sum\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_s(x,y_s)\,\varphi(x,y_s)\right]+\sum\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu_s(x_s,y)\,\varphi(x_s,y)\right]=0.$$

Подставляя $\varphi=(x-x_1)\ldots(x-x_n)$, получим

$$\begin{gathered}\sum\frac{\partial\lambda_s}{\partial x}(x-x_1)\ldots(x-x_n)+\sum\lambda_s\left[(x-x_2)\ldots(x-x_n)+\ldots\right.\\\left.+(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\right]+\sum\frac{\partial\mu_s}{\partial y}(x-x_1)\ldots(x-x_n)=0.\end{gathered}$$

Положим теперь $x = x_s$. Тогда

$$\prod_{s\neq i}(x_s - x_i)\,\lambda_s(x_s, y_s) = 0.$$

Следовательно, $\lambda_s = 0$ в точке (x_s, y_s). Аналогично доказывается, что $\mu_s = 0$.

Используя это вспомогательное утверждение и отбрасывая неопределенное слагаемое с «самодействием», из (4.2) получаем дифференциальные уравнения

$$\varkappa_s \dot{x}_s = \frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad \varkappa_s \dot{y}_s = -\frac{\partial H}{\partial x_s} \quad (1 \leqslant s \leqslant n), \tag{4.4}$$

где

$$H = \frac{1}{2\pi}\sum_{i\neq j}\varkappa_i\varkappa_j \ln\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}.$$

Это — дифференциальные уравнения Кирхгофа, описывающие динамику n точечных вихрей на плоскости.

5. Пространственная статистика точечных вихрей

Легко проверить, что гамильтонова система (4.4) является однородной системой степени однородности -1. Действительно, они инвариантна при подстановке

$$t \mapsto t/\lambda, \quad x_s \mapsto x_s/\lambda, \quad y_s \mapsto y_s/\lambda \quad (1 \leqslant s \leqslant n),$$

где λ — произвольный положительный вещественный параметр. При такой подстановке гамильтониан изменяется на некоторую аддитивную константу. Следовательно, согласно [1], плотность инвариантной меры, удовлетворяющей уравнению Лиувилля, имеет слабый предел.

Более точно это означает следующее. Пусть

$$\rho_0(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

— начальная плотность распределения вихрей (по Гиббсу) в $2n$-мерном фазовом пространстве, которая является функцией из L_1. Пусть $\rho_t(x, y)$ — ее значение в текущий момент времени t и φ — ограниченная измеримая функция от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$; ясно, что $\rho_t \in L_1$ при всех t. Тогда при $t \to \pm\infty$

$$\int\ldots\int \rho_t(x, y)\,\varphi(x, y)\,d^n x d^n y \to \int\ldots\int \overline{\rho}(x, y)\,\varphi(x, y)\,d^n x d^n y,$$

причем $\overline{\rho} \in L_1$ и

$$\int\ldots\int \overline{\rho} d^n x d^n y = \int\ldots\int \rho_0 d^n x d^n y = 1. \tag{5.1}$$

Слабый предел $\overline{\rho}$ представляет плотность распределения вихрей в предельном стационарном состоянии.

Строго говоря, равенство (5.1) заведомо справедливо, если интенсивности точечных вихрей имеют один знак. Действительно, уравнения Гамильтона (4.4) допускают интеграл момента

$$I = \sum \varkappa_s (x_s^2 + y_s^2).$$

Следовательно, инвариантные области

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ c_1\leqslant I\leqslant c_2\}$$

имеют конечную меру и поэтому равенство (5.1) вытекает из теоремы Биркгофа–Хинчина.

Кстати сказать, если все $\varkappa_s>0$ (<0), то вихри не только не уходят в бесконечность, но и никогда не сталкиваются. Для доказательства заметим, что интеграл энергии можно представить в виде

$$J=\prod_{i\neq j} r_{ij}^{\varkappa_i\varkappa_j}=c=\mathrm{const},$$

где r_{ij} — расстояние между вихрями с номерами i и j. Так как в начальный момент времени $r_{ij}\neq 0$, то $c>0$. С другой стороны, $\varkappa_i\varkappa_j>0$. Следовательно,если расстояние между парой вихрей стремится к нулю, то обязательно найдутся вихри, отстоящие друг от друга на очень большом расстоянии. Но это противоречит интегралу момента $I=\mathrm{const}$.

В общем случае, когда интенсивности вихрей имеют разные знаки, можно лишь утверждать, что неотрицательный интеграл слева в (5.1) не превосходит единицы. Рассмотрим поучительный пример пары вихрей с интенсивностями $\varkappa$ и $-\varkappa$. Хорошо известно, что в этом случае вихри движутся поступательно с постоянной скоростью, которая ортогональна соединяющему их отрезку. Следовательно, $\overline{\rho}=0$.

В известной теории Онзагера предполагается (не вполне обоснованно по аналогии с классической статистической механикой), что $\overline{\rho}$ представляет плотность канонического распределения Максвелла–Гиббса с гамильтонианом H.

Отметим, что (информационная) энтропия

$$S_t=-\int\ldots\int\rho_t\ln\rho_t d^nxd^ny$$

не меняется со временем, однако

$$S_\infty=-\int\ldots\int\overline{\rho}\ln\overline{\rho}d^nxd^ny\geqslant S_t=S_0.$$

В общем случае, конечно, $S_\infty>S_0$.

Пусть D — измеримая ограниченная область плоскости $\mathbb{R}^2=\{x,y\}$. Как подсчитать среднюю долю вихрей (и их среднюю суммарную интенсивность), которые находятся в этой области? Зафиксируем целое s, $1\leqslant s\leqslant n$. Введем следующие области в $2n$-мерном фазовом пространстве системы точечных вихрей:

$$\begin{aligned}D_{1,\ldots,s}=\big\{&(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}:\ (x_1,y_1)\in D,\ldots,(x_s,y_s)\in D,\\&(x_{s+1},y_{s+1})\notin D,\ldots,(x_n,y_n)\notin D\big\},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\D_{n-s+1,\ldots,n}=\big\{&(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}:\ (x_1,y_1)\notin D,\ldots,(x_{n-s},y_{n-s})\notin D,\\&(x_{n-s+1},y_{n-s+1})\in D,\ldots,(x_n,y_n)\in D\big\}.\end{aligned}$$

Их смысл состоит в следующем: область D содержит ровно s точечных вихрей тогда и только тогда, когда состояние системы в $2n$-мерном фазовом пространстве находится в объединении областей $D_{1,\ldots,s},\ldots,D_{n-s+1,\ldots,n}$. Пусть φ_s — характеристическая функция их объединения.

Вероятность того, что в область D в момент времени t попали ровно s вихрей, равна

$$p_s(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \rho_t \varphi_s d^n x d^n y.$$

Согласно сказанному выше, существует

$$\lim_{t\to\pm\infty} p_s(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\rho}\varphi_s d^n x d^n y = \overline{p}_s.$$

Средняя доля (математическое ожидание) вихрей в области D в состоянии статистического равновесия равна

$$\overline{p}_1 + 2\overline{p}_2 + \ldots + n\overline{p}_n.$$

Аналогично подсчитывается средняя интенсивность.

6. Временна́я статистика точечных вихрей

К обсуждаемому кругу вопросов можно подойти с несколько иной стороны. Для определенности высказываний рассмотрим случай, когда в начальный момент времени завихренность идеальной жидкости ω положительна. В этом случае после тривиальной нормировки ω можно рассматривать как плотность инвариантной меры на плоскости. Заменим меру $\omega dxdy$ сингулярной мерой с плотностью (4.1). Поскольку предполагается, что $\omega > 0$, то коэффициенты $\varkappa_s$ (интенсивности точечных вихрей) также положительны.

Хорошо известно, что любую меру в слабом смысле (т. е. в смысле слабой сходимости) сколь угодно точно можно приблизить мерой с плотностью вида (4.1). Конечно, при увеличении точности приближения количество точечных вихрей неограниченно увеличивается.

Пусть снова D — измеримая область конечной меры на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x, y\}$ и φ — ее характеристическая функция. Суммарная интенсивность вихревого движения в области D в момент времени t равна

$$\begin{aligned}\varkappa(t) &= \iint\limits_{D} \omega(x, y, t)\, dxdy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \omega(x, y, t)\, \varphi(x, y)\, dxdy = \\ &= \sum_{s=1}^{n} \varkappa_s \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \delta(x - x_s(t))\, \delta(y - y_s(t))\, \varphi(x, y)\, dxdy = \\ &= \sum_{s=1}^{n} \varkappa_s \varphi(x_s(t), y_s(t)).\end{aligned} \tag{6.1}$$

Конечно, в обычном смысле функция $\varkappa(t)$ не имеет предела при $t \to \pm\infty$. Однако в более сильном смысле по Чезаро она сходится согласно классической теореме Биркгофа–Хинчина:

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \varkappa(t)\, dt = \sum_{s=1}^{n} \varkappa_s \overline{\varphi}_s, \tag{6.2}$$

где

$$\overline{\varphi}_s = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \varphi(x_s(t), y_s(t))\, dt.$$

Средние $\overline{\varphi}_s$ существуют для почти всех (по мере Лебега) начальных положений системы точечных вихрей на плоскости.

Формулы (6.1) и (6.2) справедливы и для любой непрерывной функции φ с компактным носителем. При этом следует иметь в виду, что, согласно предположению $\varkappa_s > 0$, система точечных вихрей все время движется в ограниченной части плоскости (см. п. 5). Таким образом, формула (6.2) определяет линейный функционал

$$\varphi \mapsto A\varphi = \sum \varkappa_s \overline{\varphi}_s$$

на пространстве непрерывных функций (с компактным носителем), причем этот функционал положительный: если $\varphi \geqslant 0$, то, очевидно, $A\varphi \geqslant 0$. Более того, функционал A нормированный: если $\varphi \equiv 1$, то $A\varphi = 1$. Это — простое следствие формул (6.1)–(6.2) и предположения о нормированности начального распределения вихрей.

Правда, в этом рассуждении имеется одна существенная трудность. Дело в том, что фигурирующее в индивидуальной эргодической теореме исключительное множество нулевой меры зависит от усредняемой функции. Это ставит под сомнение возможность корректного определения функционала A для почти всех начальных данных системы (4.4). Однако, как вытекает из одной теоремы Крылова — Боголюбова [6], при усреднении *непрерывных* функций это исключительное множество можно сделать зависящим от самой динамической системы.

Следовательно, по теореме Рисса—Радона, функционал A есть интеграл по некоторой мере μ на плоскости:

$$A\varphi = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu.$$

Ввиду свойства нормированности, $\mu\left(\mathbb{R}^2\right) = 1$.

Таким образом, при $t \to \pm\infty$ течение идеальной жидкости (аппроксимированное системой точечных вихрей) почти наверное сходится по Чезаро к некоторому стационарному «течению» на плоскости, вихрь которого есть некоторая стационарная мера в $\mathbb{R}^2$. Это стационарное течение в типичной ситуации дает представление о развитой стационарной $2D$-турбулентности. В формулах (3.2) для среднего поля скоростей вместо $\omega dxdy$ следует, конечно, взять $d\mu$.

Наверное, стоит добавить, что мера $d\mu$, очевидно, абсолютно непрерывна относительно меры $d\nu = dx\,dy$. Значит, по теореме Радона — Никодима, существует ее плотность $\overline{\omega} = d\mu/d\nu$, которая будет интегрируемой по Лебегу функцией на плоскости. Поскольку отношения

$$\frac{y-y'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}, \quad \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}$$

— существенно ограниченные функции, то формулы (3.2) корректно определяют предельное «среднее» поле $(\overline{u}, \overline{v})$.

Список литературы

[1] Козлов В. В., Трещев Д. В. *Слабая сходимость решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем* // Теорет. и матем. физика, 2003. — Т. 134. — № 3. — С. 388–400.

[2] Козлов В. В., Трещев Д. В. *Эволюция мер в фазовом пространстве нелинейных гамильтоновых систем* // Теорет. и матем. физика, 2003. — Т. 136. — № 3. — С. 493–506.

[3] Montgomery D., Joyce G. *Statistical mechanics of negative temperature states* // Phys. Fluids. — 1974. — V. 17 — P. 1139–1145.

[4] Robert R., Sommeria J. *Statistical equilibrium states for two-dimensional flows* // J. Fluid Mech. — 1991. — V. 229. — P. 291–310.

[5] Isichenko M. B. *Percolation, statistical topography, and transport in random media* // Rev. Mod. Phys. 1992. V. 64. P. 961–1043.

[6] Kryloff N., Bogoliouboff N. *La th'eorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire* // Ann. of Math. 1937. V. 38. P. 65–113.