

Обобщение 4-го класса Аппельрота: область существования движений и разделение переменных

М. П. Харламов

Волгоградская академия государственной службы
400131, Россия, Волгоград, ул. Гагарина, 8
E-mail: mharlamov@vags.ru

Получено 10 декабря 2006 г.

Для движения волчка Ковалевской в двойном силовом поле рассматривается аналог 4-го класса Аппельрота классического случая Ковалевской. Траектории этого семейства заполняют в шестимерном фазовом пространстве поверхность, четырехмерную в окрестности своих точек общего положения. Указаны два независимых почти всюду частных интеграла, постоянные которых дают регулярную параметризацию соответствующего листа бифуркационной диаграммы полной задачи. Исследованы проекции торов Лиувилля на плоскость вспомогательных переменных, найдена бифуркационная диаграмма первых интегралов и область значений соответствующих постоянных. Выполнено явное разделение переменных для дифференциальных уравнений, описывающих динамику данной системы.

Ключевые слова: волчок Ковалевской, двойное поле, классы Аппельрота, разделение переменных

M. P. Kharlamov

Generalized 4th Appelrot class: region of existence of motions and separation of variables

We consider the analogue of the 4th Appelrot class of the Kowalevskaya top for the case of double force field. The trajectories of this family fill the 4-dimensional surface in the 6-dimensional phase space. We point out two almost everywhere independent partial integrals that give the regular parametrization of the corresponding sheet of the bifurcation diagram in the complete problem. Projections of the Liouville tori onto the plane of auxiliary variables are investigated. The bifurcation diagram of the partial integrals is found. The region of existence of motions in terms of the integral constants is established. We introduce the change of variables that separate the system of differential equations for this case.

Keywords: Kowalevskaya top, double field, Appelrot classes, separation of variables
Mathematical Subject Classifications: 70E17, 70G40

1. Введение

Рассмотрим твердое тело, закрепленное в неподвижной точке O . Пусть главные моменты инерции в O удовлетворяют отношению $2 : 2 : 1$. Предположим, что момент внешних сил относительно точки O имеет вид

$$\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\beta},$$

где векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ фиксированы в теле и параллельны экваториальной плоскости эллипсоида инерции, а векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ неизменны в инерциальном пространстве.

Как показано в работе [5], без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ образуют ортонормированную пару (в частности, являются главными осями инерции), а $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ взаимно ортогональны (более подробно процедура "ортогонализации" двойного поля для произвольного волчка изложена в [10]). Положим $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ и выберем $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в качестве подвижного триэдра. Вектор мгновенной угловой скорости обозначим через $\boldsymbol{\omega}$. В безразмерных переменных вращение тела описывается уравнениями Эйлера – Пуассона

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3 + \beta_3, & 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1\omega_3 - \alpha_3, & \dot{\omega}_3 &= \alpha_2 - \beta_1, \\ \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\beta}_1 &= \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2, \\ \dot{\alpha}_2 &= \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_3, & \dot{\beta}_2 &= \beta_3\omega_1 - \beta_1\omega_3, \\ \dot{\alpha}_3 &= \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, & \dot{\beta}_3 &= \beta_1\omega_2 - \beta_2\omega_1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Фазовое пространство P^6 системы (1.1) определено в $\mathbf{R}^9(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ геометрическими интегралами

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = a^2, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = b^2, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \quad (1.2)$$

Полагаем

$$a > b > 0. \quad (1.3)$$

Тогда система (1.1), (1.2) не обладает циклическим интегралом и не сводится обычной процедурой к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы. Однако она вполне интегрируема, что обеспечивают первые интегралы в инволюции

$$\begin{aligned} H &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - (\alpha_1 + \beta_2), \\ K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2, \\ G &= (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\omega_3)^2 + (\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \frac{1}{2}\beta_3\omega_3)^2 + \\ &+ \omega_3(\gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_3) - \alpha_1b^2 - \beta_2a^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

(через γ_i обозначены компоненты в подвижных осях постоянного вектора $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$).

Интеграл K впервые указан О. И. Богоявленским [2], а интеграл G (в более общей форме для задачи о движении гиростата) – А. Г. Рейманом и М. А. Семеновым-Тян-Шанским [4].

В работах [5], [10] найдено множество критических точек интегрального отображения

$$H \times K \times G : P^6 \rightarrow \mathbf{R}^3. \quad (1.5)$$

Показано, что оно представимо в виде объединения трех множеств $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{D}$, каждое из которых является почти всюду гладким четырехмерным подмногообразием в P^6 и в окрестности точек гладкости определяется системой двух инвариантных соотношений.



Критическое множество \mathfrak{M} впервые указано в работе [2]. Оно совпадает с нулевым уровнем интеграла K и обобщает 1-й класс Аппельрота (класс Делоне) классической задачи Ковалевской [1]. Фазовая топология индуцированной на \mathfrak{M} динамической системы исследована Д. Б. Зотьевым [11]. Движения на критическом множестве \mathfrak{N} , найденном в работе [6], исследованы в [7], [8], [9]. Показано, что это семейство движений является обобщением семейства так называемых особо замечательных движений 2-го и 3-го классов Аппельрота. Найдена бифуркационная диаграмма двух почти всюду независимых на \mathfrak{N} первых интегралов [9], уравнения движения на \mathfrak{N} разделены [7], [8], изучены бифуркации двумерных торов Лиувилля [7].

Данная работа посвящена исследованию ограничения системы (1.1) на инвариантное подмножество \mathfrak{D} , заданное в P^6 системой инвариантных соотношений [5]

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= (\alpha_3\omega_2 - \beta_3\omega_1)\omega_3 - 2\beta_1\omega_1^2 + 2(\alpha_1 - \beta_2)\omega_1\omega_2 + 2\alpha_2\omega_2^2, \\ R_2 &= (\alpha_3\omega_1 + \beta_3\omega_2)\omega_3^2 + [\alpha_3^2 + \beta_3^2 + 2\alpha_1\omega_1^2 + 2(\alpha_2 + \beta_1)\omega_1\omega_2 + 2\beta_2\omega_2^2]\omega_3 + \\ &\quad + 2\alpha_3[(\alpha_1 - \beta_2)\omega_1 + (\alpha_2 + \beta_1)\omega_2] + 2\beta_3[(\alpha_2 + \beta_1)\omega_1 - (\alpha_1 - \beta_2)\omega_2]. \end{aligned}$$

Система (1.6) получена в работе [5] не прямым путем, а из исследования критических точек интегрального отображения. Покажем непосредственно, что множество (1.6) инвариантно относительно фазового потока. Исключим из рассмотрения точки

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \alpha_3 = \beta_3 = 0, \quad (1.7)$$

лежащие в \mathfrak{D} и, очевидно, составляющие инвариантное подмножество системы (1.1). В остальных точках введем функции

$$R_1^* = \frac{1}{\omega_1^2 + \omega_2^2} R_1, \quad R_2^* = R_2 + \frac{2(\beta_3\omega_1 - \alpha_3\omega_2)}{\omega_1^2 + \omega_2^2} R_1.$$

Их производные в силу системы (1.1) имеют вид

$$\frac{dR_1^*}{dt} = \kappa_2 R_2^*, \quad \frac{dR_2^*}{dt} = \kappa_1 R_1^*, \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{[(\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_3 + 2(\alpha_3\omega_1 + \beta_3\omega_2)]^2}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} + [(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\alpha_1 - \beta_2) + 2\omega_1\omega_2(\alpha_2 + \beta_1)]R_1, \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}. \end{aligned}$$

Уравнения (1.8) доказывают инвариантность множества (1.6). Из этих же уравнений вытекает, что скобка Пуассона

$$R = \{R_1^*, R_2^*\} \quad (1.9)$$

будет являться первым интегралом индуцированной динамической системы на \mathfrak{D} , а подмножество в \mathfrak{D} , заданное уравнением $R = 0$, будет множеством точек вырождения индуцированной на \mathfrak{D} симплектической структуры. Легко убедиться, что функция R , являющаяся отношением двух многочленов, не равна тождественно нулю на \mathfrak{D} . Из этого следует, что динамическая система, порожденная на \mathfrak{D} системой (1.1), почти всюду гамильтонова с двумя степенями свободы. В частности, почти все ее интегральные многообразия состоят из двумерных торов Лиувилля.

2. Частные интегралы

Отметим, что в точках (1.7) уравнения (1.6) зависимы на \mathfrak{D} . Если предположить, что равенства (1.7) выполнены на некотором интервале времени (а тогда и тождественно по t вдоль всей траектории), приходим к семейству маятниковых движений вида

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= a(\mathbf{e}_1 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta), \quad \boldsymbol{\beta} = \pm b(\mathbf{e}_1 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta), \quad \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \equiv \pm ab\mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta} \mathbf{e}_3, \quad \dot{\theta} = -(a \pm b) \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.1)$$

отмеченному в работе [5]. Постоянные интегралов (1.4) на таких траекториях удовлетворяют одному из двух условий

$$g = abh, \quad k = (a - b)^2, \quad h \geq -(a + b) \quad (2.2)$$

или

$$g = -abh, \quad k = (a + b)^2, \quad h \geq -(a - b). \quad (2.3)$$

Совокупность точек, принадлежащих траекториям (2.1), обозначим через Ω . Пусть $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} \setminus \Omega$.

Напомним, что в классической задаче Ковалевской ($\boldsymbol{\beta} = 0$) имеет место интеграл площадей, в качестве которого традиционно от работ Ковалевской выбирают функцию

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (2.4)$$

При этом интеграл G становится равным L^2 .

Пусть ℓ — постоянная интеграла (2.4). В классификации Г.Г. Аппельрота 4-й класс особо замечательных движений определяется следующими условиями:

1) второй многочлен Ковалевской имеет кратный корень, одна из переменных Ковалевской постоянна и равна кратному корню s соответствующей резольвенты Эйлера $\varphi(s) = s(s - h)^2 + (a^2 - k)s - 2\ell^2$:

$$\varphi(s) = 0, \quad \varphi'(s) = 0; \quad (2.5)$$

2) две экваториальные компоненты угловой скорости постоянны, причем $\omega_1 \equiv -\ell/s$, а $\omega_2 \equiv 0$, что можно с учетом предположения $\boldsymbol{\beta} = 0$ записать в виде

$$\frac{\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1} = -s, \quad \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \quad \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \quad (2.6)$$

Следующее утверждение устанавливает аналогию условий (2.6) для обобщенного волчка.

Теорема 1. *На любой траектории, принадлежащей множеству \mathfrak{D}^* , отношения*

$$\frac{\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1}, \quad \frac{\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2}$$

равны между собой и постоянны.

Доказательство.

Обозначим

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}, \quad M_j = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.7)$$

и

$$M_\alpha = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 2\alpha_1 \omega_1 + 2\alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3, \quad M_\beta = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\beta} = 2\beta_1 \omega_1 + 2\beta_2 \omega_2 + \beta_3 \omega_3.$$



В предположениях теоремы первое уравнение (1.6) запишем в виде

$$\frac{M_\alpha}{M_1} - \frac{M_\beta}{M_2} = 0. \quad (2.8)$$

Введем функцию

$$S = -\frac{M_\alpha M_1 + M_\beta M_2}{M_1^2 + M_2^2}$$

и вычислим ее производную в силу уравнений (1.1):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2(M_1^2 + M_2^2)^2} [(M_1^2 + M_2^2)\omega_3 + 4\alpha_3 M_1 + 4\beta_3 M_2] (M_\beta M_1 - M_\alpha M_2).$$

Тогда в силу (2.8) выражение в правой части есть тождественный ноль. Следовательно, функция S является частным интегралом на \mathfrak{D}^* . Обозначим постоянную этого интеграла через s :

$$\frac{M_\alpha M_1 + M_\beta M_2}{M_1^2 + M_2^2} = -s. \quad (2.9)$$

Из (2.8), (2.9) получаем $M_\alpha = -sM_1$, $M_\beta = -sM_2$ с постоянной величиной s . Теорема доказана.

Замечание 1. В силу условия (2.8) функцию S можно также записать в виде

$$S = -\frac{1}{2} \left(\frac{M_\alpha}{M_1} + \frac{M_\beta}{M_2} \right). \quad (2.10)$$

Замечание 2. Отметим интересное геометрическое свойство изменения вектора кинетического момента на рассматриваемых движениях. Введем в плоскости $O\alpha\beta$ неподвижный ортонормированный базис

$$\nu_1 = \frac{\alpha}{a}, \quad \nu_2 = \frac{\beta}{b}.$$

и пусть $m_1 = \mathbf{M} \cdot \nu_1$, $m_2 = \mathbf{M} \cdot \nu_2$. Тогда $M_\alpha = am_1$, $M_\beta = bm_2$, и условие (2.8) можно записать в виде

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{b}{a} \frac{m_2}{m_1},$$

или

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \vartheta_0,$$

где ϑ, ϑ_0 — полярные углы проекций вектора \mathbf{M} соответственно на экваториальную плоскость тела и на неподвижную плоскость направляющих векторов силовых полей.

Теорема 2. На множестве \mathfrak{D} система (1.1) имеет частный интеграл

$$\begin{aligned} T = & (\alpha_3 \omega_1 + \beta_3 \omega_2) \omega_3 + 2\alpha_1 \omega_1^2 + 2(\alpha_2 + \beta_1) \omega_1 \omega_2 + 2\beta_2 \omega_2^2 - \\ & - 2(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) + a^2 + b^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Действительно, производная функции (2.11) в силу системы (1.1) равна $\omega_3 R_1/2$ и обращается в ноль тождественно на \mathfrak{D} . Постоянную интеграла T обозначим через τ .

Замечание 3. В работе [5] уравнения (1.6) получены из условия наличия критической точки у функции

$$2G + (\tau - a^2 - b^2)H + sK$$

с неопределенными множителями Лагранжа s, τ . Сопоставляя (2.10), (2.11) с выражениями для s, τ , имеющимися в [5], убеждаемся, что эти множители являются постоянными приведенных здесь интегралов S, T .

С учетом (1.3) введем положительные параметры p, r , полагая

$$p^2 = a^2 + b^2, \quad r^2 = a^2 - b^2. \quad (2.12)$$

Пусть h, k, g — постоянные общих интегралов (1.4). Тогда, согласно замечанию 3, из результатов работы [5] получим, что на множестве \mathfrak{D}^* имеет место связь

$$h = \frac{p^2 - \tau}{2s} + s, \quad k = \frac{\tau^2 - 2p^2\tau + r^4}{4s^2} + \tau, \quad g = \frac{p^4 - r^4}{4s} + \frac{1}{2}(p^2 - \tau)s. \quad (2.13)$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения листа бифуркационной диаграммы отображения (1.5). Исключение τ приводит к уравнениям

$$\psi(s) = 0, \quad \psi'(s) = 0, \quad (2.14)$$

где

$$\psi(s) = s^2(s - h)^2 + (p^2 - k)s^2 - 2gs + \frac{p^4 - r^4}{4}.$$

При условии $\beta = 0$ ($p^2 = r^2 = a^2$) имеем $\psi(s) = s\varphi(s)$. Таким образом, соотношения (2.14) аналогичны условиям (2.5). Следовательно, совокупность траекторий на множестве \mathfrak{D} является обобщением семейства особо замечательных движений 4-го класса Аппельрота.

3. Параметрические уравнения интегрального многообразия

В силу соотношений (2.13) функции S, T образуют полную систему первых интегралов на \mathfrak{D}^* . В частности, система уравнений интегрального многообразия

$$\{\zeta \in P^6 : H(\zeta) = h, K(\zeta) = k, G(\zeta) = g\}$$

заменяется инвариантными соотношениями (1.6) и уравнениями

$$S = s, \quad T = \tau. \quad (3.1)$$

Введем комплексную замену переменных [6], обобщающую замену, предложенную С.В. Ковалевской для волчка в поле силы тяжести [3]:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), & x_2 &= (\alpha_1 - \beta_2) - i(\alpha_2 + \beta_1), \\ y_1 &= (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), & y_2 &= (\alpha_1 + \beta_2) - i(\alpha_2 - \beta_1), \\ z_1 &= \alpha_3 + i\beta_3, & z_2 &= \alpha_3 - i\beta_3, \\ w_1 &= \omega_1 + i\omega_2, & w_2 &= \omega_1 - i\omega_2, & w_3 &= \omega_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$



Переходя к переменным (3.2), преобразуем систему (1.6), (3.1) к виду

$$\begin{aligned} (y_2 + 2s)w_1 + x_1w_2 + z_1w_3 &= 0, \\ x_2w_1 + (y_1 + 2s)w_2 + z_2w_3 &= 0, \\ x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2 + (\tau - x_1x_2)w_3 &= 0, \\ 2sw_1w_2 - (x_1x_2 + z_1z_2) + \tau &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

К этим уравнениям необходимо добавить геометрические интегралы (1.2), которые в переменных (3.2) примут вид

$$z_1^2 + x_1y_2 = r^2, \quad z_2^2 + x_2y_1 = r^2, \quad x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2 = 2p^2. \tag{3.4}$$

Пространство переменных (3.2) девятимерно с учетом комплексной сопряженности пар переменных $x_2 = \overline{x_1}$, $y_2 = \overline{y_1}$, $z_2 = \overline{z_1}$, $w_2 = \overline{w_1}$ и вещественности w_3 . Семь соотношений (3.3), (3.4) определяют в нем интегральное многообразие, которое, в случае отсутствия на нем точек зависимости интегралов S, T , будет состоять из двумерных торов с условно-периодическими траекториями.

Введем переменные x, z , полагая

$$x^2 = x_1x_2, \quad z^2 = z_1z_2. \tag{3.5}$$

Из последнего уравнения (3.4) выразим

$$y_1y_2 = 2p^2 - x^2 - 2z^2, \tag{3.6}$$

а первые два представим в виде

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)^2 &= 2r^2 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 2z^2, \\ (z_1 - z_2)^2 &= 2r^2 - (x_1y_2 + x_2y_1) - 2z^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Запишем условие совместности (3.4) по z_1, z_2 :

$$(r^2 - x_1y_2)(r^2 - x_2y_1) = z^4.$$

Отсюда с учетом (3.6) найдем

$$r^2(x_1y_2 + x_2y_1) = r^4 + 2p^2x^2 - (x^2 + z^2)^2. \tag{3.8}$$

Обозначим

$$\Phi_{\pm}(x, z) = (x^2 + z^2 \pm r^2)^2 - 2(p^2 \pm r^2)x^2.$$

Из (3.7), (3.8) имеем следующие выражения:

$$r^2(z_1 + z_2)^2 = \Phi_+(x, z), \quad r^2(z_1 - z_2)^2 = \Phi_-(x, z). \tag{3.9}$$

Заметим, что положения равновесия системы (1.1) включены в семейство траекторий Ω , на остальных же движениях определитель трех первых уравнений (3.3) по w_j ($j = 1, 2, 3$) тождественно равен нулю. Исключая из этого условия z_1^2, z_2^2 и произведение y_1y_2 с помощью (3.4), (3.6), получим

$$\begin{aligned} 2s[(r^2x_1 - \tau y_1) + (r^2x_2 - \tau y_2)] &= -r^2(x_1y_2 + x_2y_1) + \\ &+ 2[2s^2(\tau - x^2) + p^2(\tau + x^2) - \tau(x^2 + z^2)]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

С другой стороны, непосредственное вычисление с учетом (3.5), (3.6) дает

$$(r^2x_1 - \tau y_1)(r^2x_2 - \tau y_2) = r^4x^2 + \tau(2p^2 - x^2 - 2z^2) - r^2\tau(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (3.11)$$

Обозначим

$$\sigma = \tau^2 - 2p^2\tau + r^4, \quad \chi = \sqrt{k} \geq 0. \quad (3.12)$$

Из второго соотношения (2.13) следует тождество

$$4s^2\chi^2 = \sigma + 4s^2\tau. \quad (3.13)$$

Введем комплексно сопряженные переменные

$$\mu_1 = r^2x_1 - \tau y_1, \quad \mu_2 = r^2x_2 - \tau y_2. \quad (3.14)$$

Исключая из (3.10), (3.11) выражение $x_1y_2 + x_2y_1$ с помощью (3.8), получим систему

$$\begin{aligned} 2s(\mu_1 + \mu_2) &= (x^2 + z^2 - \tau)^2 - 4s^2x^2 - \sigma + 4s^2\tau, \\ \mu_1\mu_2 &= \tau(x^2 + z^2 - \tau)^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Пусть

$$\mu_1^* = \sqrt{2s\mu_1 - 4s^2\tau}, \quad \mu_2^* = \sqrt{2s\mu_2 - 4s^2\tau} \quad (3.16)$$

выбраны комплексно сопряженными. Тогда система (3.15) запишется в виде

$$(\mu_1^* + \mu_2^*)^2 = \Psi_+(x, z), \quad (\mu_1^* - \mu_2^*)^2 = \Psi_-(x, z), \quad (3.17)$$

где

$$\Psi_{\pm}(x, z) = (x^2 + z^2 - \tau)^2 - 4s^2(x \pm \chi)^2.$$

По соображениям размерности на интегральном многообразии все исходные фазовые переменные должны выражаться через две вспомогательные почти всюду независимые переменные. Выберем в качестве последних

$$x, \quad \xi = x^2 + z^2 - \tau.$$

Многочлены Φ_{\pm} и Ψ_{\pm} будем рассматривать как квадратичные функции от x, ξ . Соответственно обозначим

$$\Phi_1(x, \xi) = \Phi_+(x, z), \quad \Phi_2(x, \xi) = \Phi_-(x, z), \quad \Psi_1(x, \xi) = \Psi_+(x, z), \quad \Psi_2(x, \xi) = \Psi_-(x, z).$$

Из (3.15)–(3.17) имеем

$$\mu_1 = 2s\tau + \frac{1}{8s}(\sqrt{\Psi_1} + \sqrt{\Psi_2})^2, \quad \mu_2 = 2s\tau + \frac{1}{8s}(\sqrt{\Psi_1} - \sqrt{\Psi_2})^2. \quad (3.18)$$

Далее последовательность вычислений такова. Из (3.9) находим z_1, z_2 . Домножая уравнения (3.14) соответственно на x_2, x_1 , с учетом (3.4) получим систему

$$\begin{aligned} x_2\mu_1 &= r^2x^2 - \tau x_2y_1 = r^2(x^2 - \tau) + \tau z_2^2, \\ x_1\mu_2 &= r^2x^2 - \tau x_1y_2 = r^2(x^2 - \tau) + \tau z_1^2, \end{aligned}$$

из которой находятся x_1, x_2 . Подставляя эти значения в (3.14), найдем y_1, y_2 . В результате после определенных упрощающих преобразований имеем следующие выражения для конфигурационных переменных:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2s}{r^2} \frac{4r^4(x^2 - \tau) + \tau(\sqrt{\Phi_1} + \sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} - \sqrt{\Psi_2})^2}, \\ x_2 &= \frac{2s}{r^2} \frac{4r^4(x^2 - \tau) + \tau(\sqrt{\Phi_1} - \sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} + \sqrt{\Psi_2})^2}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2s \frac{4[2\tau\xi - \tau(x^2 - \tau) + \sigma] - (\sqrt{\Phi_1} - \sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} - \sqrt{\Psi_2})^2}, \\ y_2 &= 2s \frac{4[2\tau\xi - \tau(x^2 - \tau) + \sigma] - (\sqrt{\Phi_1} + \sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} + \sqrt{\Psi_2})^2}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$z_1 = \frac{1}{2r}(\sqrt{\Phi_1} + \sqrt{\Phi_2}), \quad z_2 = \frac{1}{2r}(\sqrt{\Phi_1} - \sqrt{\Phi_2}). \tag{3.21}$$

Заметим, что все радикалы алгебраические. Выбор знаков перед ними определяется первоначальным выбором знаков в выражениях для μ_1, μ_2, z_1, z_2 . Поскольку многочлены $\Phi_{1,2}, \Psi_{1,2}$ очевидным образом разлагаются в сомножители, линейные по x, ξ , проекция интегрального многообразия на плоскость (x, ξ) состоит из четырехугольников. Фиксируем внутреннюю точку (x, ξ) такой проекции. Тогда выражения (3.19)–(3.21) задают восемь точек конфигурационного пространства, определяемых фактическими знаками радикалов $\sqrt{\Phi_1}, \sqrt{\Phi_2}, \sqrt{\Psi_1\Psi_2}$.

Для нахождения w_3 воспользуемся интегралом энергии, который с учетом (2.13) запишем так

$$2s w_3^2 + 4s w_1 w_2 - 2s(y_1 + y_2) = 4s^2 + 2p^2 - 2\tau.$$

Подставляя $2s w_1 w_2$ из последнего уравнения (3.3) и заменяя $2p^2$ соответствующим выражением из (3.4), получим

$$2s w_3^2 = D, \tag{3.22}$$

где

$$D = (y_1 + 2s)(y_2 + 2s) - x_1 x_2 \tag{3.23}$$

есть определитель первых двух уравнений (3.3) по переменным w_1, w_2 . В частности, он обращается в нуль одновременно с w_3 . Также в силу этого факта переменные w_1, w_2 можно получить и как линейные зависимости от w_3 , и как обратную пропорциональность w_3 :

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{x_1 z_2 - (y_1 + 2s) z_1}{(y_1 + 2s)(y_2 + 2s) - x^2} w_3 = \frac{x_1 z_2 - (y_1 + 2s) z_1}{2s w_3}, \\ w_2 &= \frac{x_2 z_1 - (y_2 + 2s) z_2}{(y_1 + 2s)(y_2 + 2s) - x^2} w_3 = \frac{x_2 z_1 - (y_2 + 2s) z_2}{2s w_3}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

С учетом двух вариантов выбора знака w_3 в уравнении (3.22) получаем, что накрытие области в плоскости (x, ξ) интегральным многообразием $\{S = s, T = \tau\} \cap \mathcal{D}$ является шестнадцатикратным в точках общего положения.



Упростим выражение для переменной w_3 , избавившись от внешнего корня. Из (3.20) запишем:

$$\begin{aligned} y_1 + 2s &= 2s \frac{4[2\tau\xi - \tau(x^2 - \tau) + 4s^2\chi^2] - (\sqrt{\Phi_1} - \sqrt{\Phi_2})^2 + (\sqrt{\Psi_1} - \sqrt{\Psi_2})^2}{16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} - \sqrt{\Psi_2})^2}, \\ y_2 + 2s &= 2s \frac{4[2\tau\xi - \tau(x^2 - \tau) + 4s^2\chi^2] - (\sqrt{\Phi_1} + \sqrt{\Phi_2})^2 + (\sqrt{\Psi_1} + \sqrt{\Psi_2})^2}{16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} + \sqrt{\Psi_2})^2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Отметим, что

$$[16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} - \sqrt{\Psi_2})^2][16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} + \sqrt{\Psi_2})^2] = 64s^2(\tau\xi^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma). \quad (3.26)$$

В силу второго уравнения (3.15) естественно обозначить

$$\tau\xi^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma = \mu^2. \quad (3.27)$$

Тогда

$$D = \frac{1}{2\mu^2}(\sqrt{\Phi_1\Phi_2\Psi_1\Psi_2} - P),$$

где

$$P(x, \xi) = \xi^4 + 2\tau\xi^3 + 2[(\tau - p^2 - 2s^2)x^2 + \tau(p^2 - 2s^2) - r^4]\xi^2 - 8s^2[(\tau - 2\chi^2)x^2 + \tau\chi^2]\xi - 4s^2(x^2 - \chi^2)[2(\tau - p^2)x^2 - (\tau^2 - r^4)].$$

Обозначим

$$Q(x, \xi) = (\xi + \tau - p^2 + 2s^2)^2 - 4s^2x^2 - (p^2 - 2s^2)^2 + r^4, \\ P_1(x, \xi) = P(x, \xi) + 2xQ(x, \xi)\mu, \quad P_2(x, \xi) = P(x, \xi) - 2xQ(x, \xi)\mu.$$

Имеет место тождество $P_1P_2 \equiv \Phi_1\Phi_2\Psi_1\Psi_2$. С другой стороны, $P_1 + P_2 \equiv 2P$. Поэтому

$$D = -\frac{1}{4\mu^2}(\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2})^2,$$

откуда согласно (3.22) находим

$$w_3 = \frac{i}{2\sqrt{2s}\mu}(\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}). \quad (3.28)$$

Для вычислений ниже понадобится еще одно представление переменных w_1, w_2 , не связанное с w_3 . Из первых двух уравнений (3.3) запишем:

$$x_2w_1^2 = -z_2w_1w_3 - (y_2 + 2s)w_1w_2, \quad x_1w_2^2 = -z_1w_2w_3 - (y_1 + 2s)w_1w_2.$$

Выполним подстановку w_1w_3, w_2w_3 из второго представления (3.24), а w_1w_2 исключим с помощью последнего уравнения (3.3). Получим

$$2s x_2w_1^2 = -(\mu_1 - 2s\tau) - 2sx^2, \quad 2s x_1w_2^2 = -(\mu_2 - 2s\tau) - 2sx^2.$$

Отсюда в подстановке (3.18) находим

$$w_1 = \frac{i}{4s\sqrt{x_2}}(\sqrt{\Theta_1} + \sqrt{\Theta_2}), \quad w_2 = \frac{i}{4s\sqrt{x_1}}(\sqrt{\Theta_1} - \sqrt{\Theta_2}), \quad (3.29)$$



где

$$\Theta_1(x, \xi) = (\xi - 2sx)^2 - 4s^2\chi^2, \quad \Theta_2(x, \xi) = (\xi + 2sx)^2 - 4s^2\chi^2.$$

Отметим, что произведения $\Theta_1\Theta_2$ и $\Psi_1\Psi_2$ совпадают между собой. Выбор знаков в представлении (3.29) продиктован условием $(\sqrt{x_2}w_1)(\sqrt{x_1}w_2) = x\xi/2s$, вытекающим из последнего уравнения (3.3). Выбор знака у одной из комплексно сопряженных величин $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$ должен осуществляться так, чтобы значения (3.29), (3.28) удовлетворяли одному из первых трех уравнений (3.3) (тогда остальные будут выполнены автоматически).

Таким образом, все фазовые переменные алгебраически выражены через две вспомогательные переменные x, ξ , область изменения которых зависит от постоянных выбранных первых интегралов.

4. Особенности индуцированной симплектической структуры

Напомним некоторые известные факты. Гамильтонова структура системы (1.1) обеспечивается скобками Пуассона [2] на пространстве $\mathbf{R}^9(\omega, \alpha, \beta)$ (невыврожденными на P^6). В обозначениях (2.7) скобки координатных функций таковы

$$\begin{aligned} \{M_j, M_k\} &= \varepsilon_{jkl}M_l, & \{M_j, \alpha_k\} &= \varepsilon_{jkl}\alpha_l, & \{M_j, \beta_k\} &= \varepsilon_{jkl}\beta_l, \\ \{\alpha_j, \alpha_k\} &= \{\alpha_j, \beta_k\} = \{\beta_j, \beta_k\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В ограничении на P^6 они соответствуют симплектической форме Кириллова $\lambda \in \Lambda^2(P^6)$. Пусть $N \subset P^6$ — подмногообразие, заданное двумя независимыми уравнениями

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

и пусть $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ — гамильтоновы векторные поля с гамильтонианами f_1, f_2 . Тогда линейная оболочка \mathfrak{X}_1 и \mathfrak{X}_2 в каждой точке $\zeta \in N$ косоортогональна касательному пространству $T_\zeta N$. Поэтому 2-форма, полученная как ограничение λ на N , невырождена в точке ζ тогда и только тогда, когда

$$\{f_1, f_2\}(\zeta) = \lambda(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)(\zeta) \neq 0.$$

Вычислим теперь скобку Пуассона (1.9) функций, определяющих \mathfrak{D}^* . Замена переменных (3.2) линейна с постоянными коэффициентами, поэтому правила (4.1) легко преобразуются к новым координатам. Опуская технические детали, представим R в виде

$$R = \frac{F_1}{w_1^3 w_2^3 w_3^2} [w_3(w_3 F_2 + F_3)^2 - F_4], \quad (4.4)$$

где

$$F_1 = z_1 z_2 w_3 + x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2,$$

$$F_2 = w_1 w_2 w_3 + z_2 w_1 + z_1 w_2,$$

$$F_3 = 2w_1^2 w_2^2 + x_2 w_1^2 + x_1 w_2^2,$$

$$F_4 = 4w_1^2 w_2^2 [(w_1^2 w_2^2 + x_2 w_1^2 + x_1 w_2^2) w_3 + x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2].$$

В приведенных выражениях переменные y_1, y_2 исключены с помощью системы (1.6), записанной в переменных (3.2):

$$y_1 = -\frac{w_1 w_3 (x_2 w_1 + z_2 w_3) + F_1}{w_1 w_2 w_3}, \quad y_2 = -\frac{w_2 w_3 (x_1 w_2 + z_1 w_3) + F_1}{w_1 w_2 w_3}.$$

Зафиксируем значения h, k, g, s, τ интегралов (1.4), (2.10), (2.11). Получим

$$w_3 F_2 + F_3 = 2w_1 w_2 h - 2(x_1 x_2 + z_1 z_2 - \tau), \quad F_4 = 4w_1^2 w_2^2 w_3 (\tau - k).$$

Поэтому из (1.4), (2.13), (3.3) будем иметь

$$F_1 = \xi w_3, \quad w_3 F_2 + F_3 = \frac{\xi}{s} \left(\frac{p^2 - \tau}{2s} - s \right), \quad F_4 = -\frac{\sigma \xi^2 w_3}{4s^4}, \quad w_1^3 w_2^3 = \frac{\xi^3}{8s^3}.$$

Окончательно, выражение (4.4) принимает вид

$$R = \frac{8}{s} \left[s^4 - (p^2 - \tau) s^2 + \frac{p^4 - r^4}{4} \right].$$

Очевидно, что R — первый интеграл динамической системы, индуцированной на \mathfrak{D}^* , а в силу сказанного выше уравнение

$$s^4 - (p^2 - \tau) s^2 + \frac{p^4 - r^4}{4} = 0 \quad (4.10)$$

определяет константы интегралов s, τ , для которых на соответствующих интегральных многообразиях вырождается 2-форма, индуцированная на \mathfrak{D}^* симплектической структурой λ . Поскольку функции (2.10), (2.11) алгебраические, множество (4.10) имеет коразмерность единица в \mathfrak{D}^* . В частности, форма $\lambda|_{\mathfrak{D}^*}$ невырождена почти всюду. Поэтому и индуцированная динамическая система на открытом всюду плотном подмножестве в \mathfrak{D}^* является полноценной гамильтоновой системой с двумя степенями свободы.

Определим положение точек вида (4.10) на поверхности (2.13) в $\mathbf{R}^3(h, k, g)$. Рассмотрим сечения этой поверхности плоскостями постоянных значений h . Из первого уравнения (2.13) выразим τ и подставим в (4.10). Получим

$$3s^4 - 2hs^3 + \frac{p^4 - r^4}{4} = 0. \quad (4.11)$$

Одновременно из (2.14) найдем параметрические уравнения для k, g в выбранном сечении:

$$k(s) = 3s^2 - 4hs + h^2 + p^2 - \frac{p^4 - r^4}{4s^2}, \quad g(s) = -s^3 + hs^2 + \frac{p^4 - r^4}{4s}.$$

Тогда

$$k'(s) = \frac{2}{s^3} \left[3s^4 - 2hs^3 + \frac{p^4 - r^4}{4} \right], \quad g'(s) = -\frac{1}{s^2} \left[3s^4 - 2hs^3 + \frac{p^4 - r^4}{4} \right].$$

Таким образом, уравнение (4.11) определяет точки возврата в сечениях поверхности (2.13).

5. Бифуркационная диаграмма

Введем интегральное отображение J индуцированной динамической системы на замыкании множества \mathfrak{D}^* , полагая

$$J(\zeta) = (S(\zeta), T(\zeta)) \in \mathbf{R}^2, \quad \zeta \in \text{Cl}(\mathfrak{D}^*).$$

Ввиду очевидной компактности прообразов точек \mathbf{R}^2 , бифуркационная диаграмма Σ отображения J совпадает с множеством его критических значений.



Теорема 3. Бифуркационная диаграмма отображения

$$J = S \times T : \text{Cl}(\mathfrak{D}^*) \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad (5.1)$$

состоит из следующих подмножеств плоскости (s, τ) :

- 1°) $\tau = (a + b)^2, s \in [-a, 0) \cup [b, +\infty)$;
- 2°) $\tau = (a - b)^2, s \in [-a, -b] \cup (0, +\infty)$;
- 3°) $s = -a, \tau \geq (a - b)^2$;
- 4°) $s = -b, \tau \geq (a - b)^2$;
- 5°) $s = b, \tau \leq (a + b)^2$;
- 6°) $s = a, \tau \leq (a + b)^2$;
- 7°) $\tau = 0, s \in (0, +\infty)$;
- 8°) $\tau = a^2 + b^2 - 2s^2 + 2\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}, s \in [-b, 0)$;
- 9°) $\tau = a^2 + b^2 - 2s^2 - 2\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}, s \in (0, b]$;
- 10°) $\tau = a^2 + b^2 - 2s^2 + 2\sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}, s \in [a, +\infty)$.

Доказательство.

Отметим, что точки зависимости уравнений системы (1.6) по определению считаются критическими для отображения (5.1). Поэтому в бифуркационную диаграмму необходимо включить значения, отвечающие тем из траекторий (2.1), которые принадлежат замыканию множества \mathfrak{D}^* , то есть значения (s, τ) , при которых равенства (2.13) дают значения вида (2.2), (2.3).

Легко проверить, что луч (2.3) целиком содержится в поверхности (2.13). Ему соответствует множество точек случая 1°. В то же время поверхности (2.13) принадлежат лишь точки луча (2.2), удовлетворяющие неравенству $h^2 \geq 4ab$. Им соответствует множество точек случая 2°.

Сегмент луча (2.2) в пределах $-2\sqrt{ab} < h < 2\sqrt{ab}$ представляет собой одномерную часть бифуркационной диаграммы отображения (1.5). Для соответствующих траекторий (2.1) значение s не определено. Это означает, что такие траектории не имеют сколь угодно близких траекторий из множества \mathfrak{D}^* . Наличие явления, порождающего изолированную точку в бифуркационных диаграммах приведенных систем или систем на изоэнергетических уровнях, наблюдалось ранее в случаях Клебша и Лагранжа.

Для движений из \mathfrak{D}^* заметим, что для существования решения системы (3.9) необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\Phi_+(x, z) \geq 0, \quad \Phi_-(x, z) \leq 0. \quad (5.2)$$

Аналогично, условиями разрешимости системы (3.17) является система неравенств

$$\Psi_+(x, z) \geq 0, \quad \Psi_-(x, z) \leq 0. \quad (5.3)$$

Совокупность неравенств (5.2), (5.3) задает на плоскости (x, z) область возможности движения (ОВД) — проекцию интегрального многообразия. Бифуркационной диаграмме отвечают случаи перестройки ОВД при изменении s, τ как параметров.

Введем на плоскости (x, z) криволинейные координаты s_1, s_2 , полагая

$$s_1 = \frac{x^2 + z^2 + r^2}{2x}, \quad s_2 = \frac{x^2 + z^2 - r^2}{2x}. \quad (5.4)$$

Неравенства (5.2) мгновенно разрешаются

$$s_1^2 \geq a^2, \quad s_2^2 \leq b^2. \quad (5.5)$$

Эти неравенства не связаны с конкретным видом динамической системы, а отражают лишь структуру конфигурационного пространства $SO(3)$. Соответствующая область на плоскости (x, z) — образ многообразия (1.2) — показана на рис. 1 для первого квадранта. Указана также и координатная сеть (s_1, s_2) .

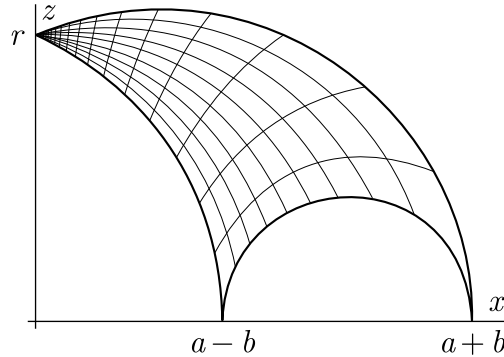


Рис. 1. Допустимая область на плоскости (x, z) .

Пусть Π_1 — прямоугольник на плоскости (s_1, s_2) с вершинами $s_1 = \pm a$, $s_2 = \pm b$. Для решения системы (5.3) выразим

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 - \tau &= [s_1 + s_2 - \frac{\tau}{r^2}(s_1 - s_2)]x, \\ \Psi_+(x, z) &= x^2 \Lambda_+ \Lambda_-, \quad \Psi_-(x, z) = x^2 M_+ M_-, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{\pm}(s_1, s_2) &= s_1 + s_2 - \frac{\tau \pm 2s\chi}{r^2}(s_1 - s_2) \pm 2s, \\ M_{\pm}(s_1, s_2) &= s_1 + s_2 - \frac{\tau \mp 2s\chi}{r^2}(s_1 - s_2) \pm 2s. \end{aligned}$$

Из (5.3), (5.6) имеем

$$\Lambda_+(s_1, s_2)\Lambda_-(s_1, s_2) \geq 0, \quad M_+(s_1, s_2)M_-(s_1, s_2) \leq 0. \quad (5.7)$$

Рассмотрим параллелограмм Π_2 , образованный прямыми $\Lambda_{\pm} = 0$, $M_{\pm} = 0$. Решения системы неравенств (5.7) заполняют две полуполосы, примыкающих к паре противоположных сторон Π_2 (выбор этих сторон продиктован конкретными значениями s, τ). На рис. 2 приведен пример области возможности движения в плоскости (s_1, s_2) — решения системы неравенств (5.5), (5.7).

Дальнейшее исследование является чисто техническим. Бифуркации ОВД происходят в одном из следующих случаев: попадание вершины одного из параллелограммов Π_1, Π_2 на границу другого, соответственная параллельность сторон параллелограммов Π_1, Π_2 (уход вершин ОВД на бесконечность), вырождение полуполос в луч. Перечислив все такие случаи, придем к уравнениям, фигурирующим в теореме. Пусть Δ — определяемое этими уравнениями множество в плоскости $\mathbf{R}^2(s, \tau)$. Перебирая связные компоненты множества $\mathbf{R}^2(s, \tau) \setminus \Delta$, отбросим те из них, для которых область возможности движения пуста. Оставшиеся компоненты (область существования движений в пространстве констант интегралов) затенены на рис. 3 (прерывистой линией показаны решения уравнения (4.10) — значения интегралов, отвечающие вырождению индуцированной симплектической структуры).

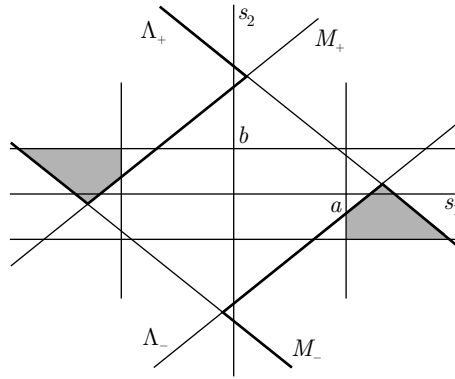


Рис. 2. Пример области возможности движения ($a = 1, b = 0.4, \tau = 1.2, s = -0.6$).

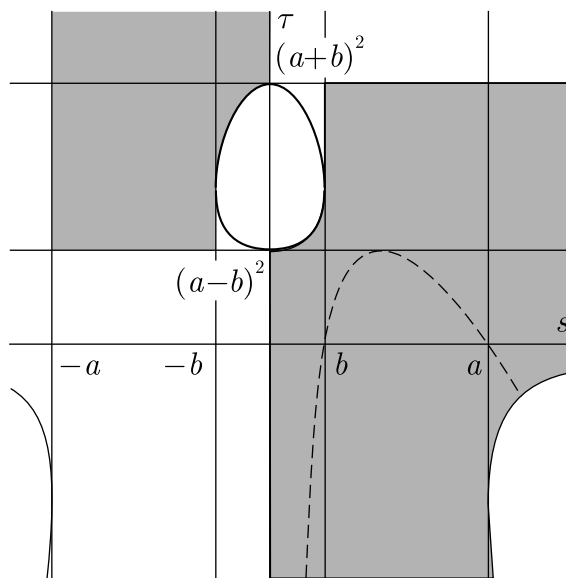


Рис. 3. Область существования движений в плоскости (s, τ) .

В бифуркационную диаграмму включаются те участки Δ , которые являются граничными для оставшихся компонент, за исключением отрезков координатной оси $s = 0$, так как нулевое значение s недопустимо в силу (2.13). Отсюда получаем необходимые неравенства. Теорема доказана.

Теорема 4. Область существования решений системы (1.1) при условиях (1.6) в плоскости констант первых интегралов (3.1) определяется следующими неравенствами:

- 1°) $-a \leq s \leq -b, \tau \geq (a - b)^2$;
- 2°) $-b \leq s < 0, \tau \geq (\sqrt{a^2 - s^2} + \sqrt{b^2 - s^2})^2$;
- 3°) $0 < s \leq b, \tau \leq (\sqrt{a^2 - s^2} - \sqrt{b^2 - s^2})^2$;
- 4°) $b \leq s \leq a, \tau \leq (a + b)^2$;
- 5°) $s \geq a, -(\sqrt{s^2 - b^2} - \sqrt{s^2 - a^2})^2 \leq \tau \leq (a + b)^2$.

Это утверждение вытекает непосредственно из доказательства теоремы 3 (см. рис. 3).

6. Разделение переменных

Исключим из дальнейшего рассмотрения случаи $\tau = 0$ и $\sigma = 0$. Первый в силу уравнений (2.13) приводит к соотношению $(2g - p^2h)^2 = r^4k$, характеризующему критическое многообразие \mathfrak{M} , уравнения движения на котором проинтегрированы [8]. Во втором из (2.13) получаем одно из соотношений (2.2), (2.3), что соответствует существованию периодических решений вида (2.1).

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^3(x, \xi, \mu)$ поверхность \mathcal{M} второго порядка, определенную уравнением (3.27). В силу второго уравнения (3.15) любая траектория естественным образом изображается кривой на этой поверхности.

Из (2.12), (3.12) следует, что постоянные τ, σ не могут быть одновременно отрицательными. Поэтому поверхность \mathcal{M} является однополостным гиперболоидом и имеет два семейства прямолинейных образующих. Область на плоскости (x, ξ) , в которую проектируется эта поверхность, обозначим через \mathcal{G} . Если кривая

$$\tau\xi^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma = 0 \quad (6.1)$$

является эллипсом, то \mathcal{G} — дополнение к его внутренней части, если же эта кривая — гипербола, то \mathcal{G} — объединение гиперболы с областью, заключенной между ее ветвями.

Отметим два тождества, которым удовлетворяют введенные константы

$$\sigma + 2\tau(p^2 \pm r^2) = (\tau \pm r^2)^2. \quad (6.2)$$

Легко видеть, что в силу (3.13), (6.2) любое из уравнений $\Phi_j = 0$, $\Psi_j = 0$ и $\Theta_j = 0$ ($j = 1, 2$) определяет на плоскости (x, ξ) четверку прямых, каждая из которых касается кривой (6.1) и является проекцией двух образующих поверхности \mathcal{M} . В частности, проекция интегрального многообразия на плоскость (x, ξ) ограничена касательными к кривой (6.1), а ее прообраз на \mathcal{M} ограничен прямолинейными образующими этой поверхности. Отсюда вытекают два способа превратить ОВД в прямоугольник (именно такая форма области возможности движений характерна для систем с разделенными переменными). Первый состоит в следующем: параметризуем кривую (6.1) (тригонометрическими функциями для эллипса или гиперболическими — для гиперболы), из каждой точки $(x, \xi) \in \mathcal{G}$ проведем две касательные к кривой (6.1) и параметры точек касания примем за новые координаты. Второй способ — алгебраический: рассмотрим два семейства прямолинейных образующих \mathcal{M} в качестве координатной сетки и за новые координаты точки (x, ξ) примем координаты ее прообраза на поверхности \mathcal{M} . В силу алгебраического характера всех выражений, полученных ранее, остановимся на втором способе.

Не уточняя вопросы вещественности переменных, положим формально

$$\xi = \sqrt{\sigma} \frac{uv + 1}{u + v}, \quad x = \sqrt{\tau} \frac{u - v}{u + v}. \quad (6.3)$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \kappa \varphi_1(u) \varphi_1(v), & \Phi_2 &= \kappa \varphi_2(u) \varphi_2(v), \\ \Psi_1 &= \kappa \psi_1(u) \psi_2(v), & \Psi_2 &= \kappa \psi_2(u) \psi_1(v), \\ \Theta_1 &= \kappa \theta_2(u) \theta_1(v), & \Theta_2 &= \kappa \theta_1(u) \theta_2(v), \end{aligned}$$

где $\kappa = 1/(u + v)^2$ и

$$\begin{aligned} \varphi_1(w) &= \sqrt{\sigma}(1 + w^2) + 2(\tau + r^2)w, & \varphi_2(w) &= \sqrt{\sigma}(1 + w^2) + 2(\tau - r^2)w, \\ \psi_1(w) &= 2s[(\chi + \sqrt{\tau})w^2 - (\chi - \sqrt{\tau})], & \psi_2(w) &= 2s[(\chi - \sqrt{\tau})w^2 - (\chi + \sqrt{\tau})], \\ \theta_1(w) &= \sqrt{\sigma}(1 - w^2) + 4s\sqrt{\tau}w, & \theta_2(w) &= \sqrt{\sigma}(1 - w^2) - 4s\sqrt{\tau}w. \end{aligned}$$



С учетом записанных выражений из (3.19)–(3.21) находим выражения для конфигурационных переменных

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{2s\tau}{r^2} \left[\frac{\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(v)} + \sqrt{\varphi_2(u)\varphi_1(v)}}{\sqrt{\theta_1(u)\theta_1(v)} - \sqrt{\theta_2(u)\theta_2(v)}} \right]^2, \\
 x_2 &= \frac{2s\tau}{r^2} \left[\frac{\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(v)} - \sqrt{\varphi_2(u)\varphi_1(v)}}{\sqrt{\theta_1(u)\theta_1(v)} + \sqrt{\theta_2(u)\theta_2(v)}} \right]^2, \\
 y_1 &= 2s \frac{\left[\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(v)} + \sqrt{\varphi_2(u)\varphi_1(v)} \right]^2 - 4\sigma(uv - 1)^2}{\left[\sqrt{\theta_1(u)\theta_1(v)} - \sqrt{\theta_2(u)\theta_2(v)} \right]^2}, \\
 y_2 &= 2s \frac{\left[\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(v)} - \sqrt{\varphi_2(u)\varphi_1(v)} \right]^2 - 4\sigma(uv - 1)^2}{\left[\sqrt{\theta_1(u)\theta_1(v)} + \sqrt{\theta_2(u)\theta_2(v)} \right]^2}, \\
 z_1 &= \frac{1}{2r(u+v)} \left[\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_1(v)} + \sqrt{\varphi_2(u)\varphi_2(v)} \right], \\
 z_2 &= \frac{1}{2r(u+v)} \left[\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_1(v)} - \sqrt{\varphi_2(u)\varphi_2(v)} \right].
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x_1} &= \frac{\sqrt{2s\tau}}{r} \frac{\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(v)} + \sqrt{\varphi_2(u)\varphi_1(v)}}{\sqrt{\theta_1(u)\theta_1(v)} - \sqrt{\theta_2(u)\theta_2(v)}}, \\
 \sqrt{x_2} &= \frac{\sqrt{2s\tau}}{r} \frac{\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(v)} - \sqrt{\varphi_2(u)\varphi_1(v)}}{\sqrt{\theta_1(u)\theta_1(v)} + \sqrt{\theta_2(u)\theta_2(v)}}.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Здесь произвол в выборе знака обеспечивает алгебраическое значение $\sqrt{2s\tau}$.

Из (3.29) имеем

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x_2}w_1 &= \frac{i}{4s(u+v)} (\sqrt{\theta_2(u)\theta_1(v)} + \sqrt{\theta_1(u)\theta_2(v)}), \\
 \sqrt{x_1}w_2 &= \frac{i}{4s(u+v)} (\sqrt{\theta_2(u)\theta_1(v)} - \sqrt{\theta_1(u)\theta_2(v)}).
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Подставляя значения (6.5), получим выражения для вычисления экваториальных компонент угловой скорости

$$\begin{aligned}
 w_1 &= i \frac{r}{4s\sqrt{2s\tau}} \frac{\left[\sqrt{\theta_2(u)\theta_1(v)} + \sqrt{\theta_1(u)\theta_2(v)} \right] \left[\sqrt{\theta_1(u)\theta_1(v)} + \sqrt{\theta_2(u)\theta_2(v)} \right]}{(u+v) \left[\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(v)} - \sqrt{\varphi_2(u)\varphi_1(v)} \right]}, \\
 w_2 &= i \frac{r}{4s\sqrt{2s\tau}} \frac{\left[\sqrt{\theta_2(u)\theta_1(v)} - \sqrt{\theta_1(u)\theta_2(v)} \right] \left[\sqrt{\theta_1(u)\theta_1(v)} - \sqrt{\theta_2(u)\theta_2(v)} \right]}{(u+v) \left[\sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(v)} + \sqrt{\varphi_2(u)\varphi_1(v)} \right]},
 \end{aligned}$$

а из (3.28) найдем осевую компоненту

$$w_3 = i \frac{1}{2\sqrt{2s\tau}\sigma(u+v)(uv-1)} \left[\sqrt{\theta_1(u)\theta_2(u)\varphi_1(v)\varphi_2(v)} - \sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(u)\theta_1(v)\theta_2(v)} \right].$$

Таким образом, все фазовые переменные выражены через u, v алгебраически.



Для вывода дифференциальных уравнений воспользуемся переменными (5.4) как промежуточными. Дифференцируя их по времени в силу системы (1.1), получим

$$\frac{ds_1}{dt} = i \frac{r^2}{4x^3} (z_1 + z_2)(x_1 w_2 - x_2 w_1), \quad \frac{ds_2}{dt} = i \frac{r^2}{4x^3} (z_1 - z_2)(x_1 w_2 + x_2 w_1). \quad (6.9)$$

С другой стороны из (5.4), (6.3) имеем

$$s_1 = \frac{\sqrt{\sigma}(uv + 1) + (\tau + r^2)(u + v)}{2\sqrt{\tau}(u - v)}, \quad s_2 = \frac{\sqrt{\sigma}(uv + 1) + (\tau - r^2)(u + v)}{2\sqrt{\tau}(u - v)},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_1}{\partial u} &= -\frac{\varphi_1(v)}{2\sqrt{\tau}(u - v)^2}, & \frac{\partial s_1}{\partial v} &= \frac{\varphi_1(u)}{2\sqrt{\tau}(u - v)^2}, \\ \frac{\partial s_2}{\partial u} &= -\frac{\varphi_2(v)}{2\sqrt{\tau}(u - v)^2}, & \frac{\partial s_2}{\partial v} &= \frac{\varphi_2(u)}{2\sqrt{\tau}(u - v)^2}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{2\sqrt{\tau}(u - v)^2}{\varphi_1(u)\varphi_2(v) - \varphi_2(u)\varphi_1(v)} \left[\varphi_2(u) \frac{ds_1}{dt} - \varphi_1(u) \frac{ds_2}{dt} \right], \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{2\sqrt{\tau}(u - v)^2}{\varphi_1(u)\varphi_2(v) - \varphi_2(u)\varphi_1(v)} \left[\varphi_2(v) \frac{ds_1}{dt} - \varphi_1(v) \frac{ds_2}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Подставим значения (6.4), (6.5), (6.6) в (6.9) и внесем найденные выражения в (6.10). Получим

$$\begin{aligned} f(u, v) \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2u\sqrt{2s\tau\sigma}} \sqrt{\varphi_1(u)\varphi_2(u)\theta_1(u)\theta_2(u)}, \\ f(u, v) \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{2v\sqrt{2s\tau\sigma}} \sqrt{\varphi_1(v)\varphi_2(v)\theta_1(v)\theta_2(v)}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь $f(u, v) = (u - v)(1 - uv)/uv$. Заметим, что $f(u, v) = 2(V - U)$, где

$$U = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \quad V = \frac{1}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right). \quad (6.12)$$

Замена (6.12) в уравнениях (6.11) дает

$$(U - V) \frac{dU}{dt} = \sqrt{Q(U)}, \quad (U - V) \frac{dV}{dt} = \sqrt{Q(V)}, \quad (6.13)$$

где

$$Q(w) = \frac{1}{2s\tau}(w^2 - 1)\left(w^2 - \frac{4s^2\chi^2}{\sigma}\right)[(\sqrt{\sigma}w + \tau)^2 - r^4]$$

— многочлен уже лишь шестой степени. Уравнения (6.13) можно переписать и в стандартном для гиперэллиптических квадратур виде

$$\frac{dU}{\sqrt{Q(U)}} - \frac{dV}{\sqrt{Q(V)}} = 0, \quad \frac{U dU}{\sqrt{Q(U)}} - \frac{V dV}{\sqrt{Q(V)}} = dt.$$



Укажем связь полученного результата с бифуркационной диаграммой. Рассмотрим многочлен

$$\varphi_1(w) \varphi_2(w) \theta_1(w) \theta_2(w), \quad (6.16)$$

стоящий под радикалом в правых частях уравнений (6.11) и установим все случаи наличия у него кратного корня. Результат многочлена (6.16) и его производной по w с точностью до ненулевого постоянного множителя равен

$$s^4 \tau^{12} (\tau^2 - 2p^2 \tau + r^4)^{14} [2s^2 - (p^2 - r^2)]^4 [2s^2 - (p^2 + r^2)]^4 [\tau^2 - 2(p^2 - 2s^2)\tau + r^4]^2. \quad (6.17)$$

Как отмечалось, в силу соотношений (2.13), на рассматриваемом классе движений $s \neq 0$. Остальные случаи обращения в нуль выражения (6.17) приводят к уравнениям, перечисленным в теореме 3. Поэтому найденная бифуркационная диаграмма содержится в дискриминантном множестве многочлена (6.16). Такое явление типично для систем с разделяющимися переменными.

Заметим также, что все корни многочлена (6.16) с учетом обозначений (2.12) и тождеств (3.13), (6.2) вычисляются явно:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} [(\sqrt{\tau} \pm a)^2 - b^2], \quad \frac{1}{\sqrt{\sigma}} [(\sqrt{\tau} \pm b)^2 - a^2], \quad \pm \sqrt{\frac{\chi + \sqrt{\tau}}{\chi - \sqrt{\tau}}}, \quad \pm \sqrt{\frac{\chi - \sqrt{\tau}}{\chi + \sqrt{\tau}}}.$$

Поэтому области изменения u, v легко определяются из соответствующих условий вещественности для любых значений s, τ . Полученные уравнения вместе с явными алгебраическими зависимостями исходных фазовых переменных от u, v дают возможность установить количество связанных компонент в составе интегральных многообразий и характер происходящих бифуркаций, а также аналитически вычислять инварианты Фоменко—Цишанга для возникающего слоения Ливилля.

Список литературы

- [1] Аппельрот Г.Г. *Не вполне симметричные тяжелые гироскопы* // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1940, с. 61–156.
- [2] Боговявленский О.И. *Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики* // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1984, т. 48, № 5, с. 883–938.
- [3] Ковалевская С.В. *Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки* // Научн. работы, М.: Изд-во АН СССР, 1948, с. 153–220.
- [4] Рейман А.Г., Семенов-Тянь-Шанский М.А. *Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений* // Функци. анализ и его приложения, 1988, т. 22, № 2, с. 87–88.
- [5] Харламов М.П. *Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле* // Механика твердого тела, 2004, вып. 34, с. 47–58.
- [6] Харламов М.П. *Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле* // Механика твердого тела, 2002, вып. 32, с. 32–38.
- [7] Харламов М.П., Савушкин А.Ю. *Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской* // Укр. математ. вестник, 2004, т. 1, № 4, с. 548–565.

- [8] Харламов М.П., Савушкин А.Ю. *Явное интегрирование одной задачи о движении обобщенного волчка Ковалевской* // ДАН, 2005, т. 401, № 3, с. 321–323.
- [9] Харламов М.П., Савушкин А.Ю., Шведов Е.Г. *Бифуркационное множество в одной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской* // Механика твердого тела, 2003, вып. 33, с. 10–19.
- [10] Kharlamov M.P. *Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields* // Reg. & Chaot. Dyn., 2005, V. 10, № 4, p. 381–398.
- [11] Zotev D.B. *Fomenko-Zieschang invariant in the Bogoyavlenskiyi case* // Reg. & Chaot. Dyn., 2000, V. 5, № 4, p. 437–458.