

Конвективные режимы в малокомпонентной модели движения жидкости в почти аксиально-симметричной эллипсоидальной полости

А. Е. Гледзер

Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН
119017, Москва, Пыжевский пер., 3
E-mail: dolzhan@ifaran.ru

Получено 19 января 2007 г.

Исследуются типы движений в рамках 6-модовой модели конвекции в почти аксиально-симметричном эллипсоидальном объеме. Эффективное число Прандтля, число Рэлея и вертикальный размер объема меняются в широком диапазоне. Построен ряд диаграмм режимов. Выделены типы осцилляционных крупномасштабных движений, которые связаны либо с поворотами оси вращения жидкости, либо со сменой направления вращения в одной из главных вертикальных плоскостей симметрии. Полученные аналитические формулы позволяют определить периоды некоторых осцилляционных режимов в зависимости от внешних параметров задачи.

Ключевые слова: конвекция Рэлея-Бенара, малокомпонентные модели, линейные по координатам поля, «термические пятна»

A. E. Gledzer

The convection regimes in a low-order model of fluid motion in nearly axially symmetrical ellipsoidal cavity

The oscillatory types of motion in frame of 6-modes model of convection are considered into nearly axially symmetrical ellipsoidal volume. The pseudo-Prandtl, Rayleigh numbers and vertical aspect ratio are changed in large ranges. The regimes with different types of vorticity oscillations are determined, that are connected with the turning of the fluid rotation axis or with the alteration of rotation. For some of the regimes the analytical solution and formulae of oscillation periods were obtained.

Keywords: Rayleigh-Bénard convection, low-order models, linear space, thermal plumes
Mathematical Subject Classifications: 76R05, 76R10, 74F05, 37Exx

1. Введение

Данная работа посвящена исследованию так называемой крупномасштабной циркуляции в конвекции Рэлея-Бенара (Rayleigh-Bénard convection) в замкнутой эллипсоидальной полости с помощью малокомпонентной модели, предложенной Ф.В.Должанским в конце 70-х годов прошлого столетия. Красочная динамика жидкости в этой «бесконечной» задаче существенно зависит от трех безразмерных параметров: от числа Рэлея (мера интенсивности плавучести), от числа Прандтля (отношение кинематической вязкости к кинематической теплопроводности) и от геометрического отношения высоты полости к ее ширине, при этом форма полости не играет решающей роли.

Стиль и методика решения такого рода задач были в целом найдены лордом Рэлеем в 1916 году согласно аналитическому решению задачи устойчивости состояния покоя тонкого слоя жидкости между двумя бесконечными пластинами, поддерживаемыми при постоянной разности температур с подогревом снизу и охлаждении сверху (см. книгу [1]). Его изящное решение устанавливает знаменитые критические числа Рэлея (до сих пор актуальные) для различных типов граничных условий и предсказывает типы установившихся движений жидкости в виде вертикальных конвективных валов непосредственно за критической кривой. Именно эти свойства исследовались, например, в конце 60-х годов прошлого столетия в цилиндрических полостях прямоугольного и кругового сечений с подогревом жидкости горячей пластинкой в центре сосуда [2], [3]. Современная по тем временам экспериментальная техника и популярный метод конечных разностей дали возможность пронаблюдать установление и эволюцию (по мере увеличения нагрева) поднимающихся от горячей пластины линий тока жидкости и опускание их вдоль стенок сосуда. Совпадение экспериментальных данных и расчетов было при небольших числах Рэлея превосходным. А затем была отмечена стадия усложнения геометрии течения, еще дальше — турбулизация, вихреобразование. К настоящему времени известно множество картин конвективных движений, усложняющихся по мере увеличения числа Рэлея (концентрические роллы, спиральные и гексагональные структуры, хаос).

Похожие исследования существуют и для горизонтальной разности температур, приложенной к жидкости [4], [5].

Позднее, в 90-х годах прошлого столетия, с появлением суперкомпьютеров типа CRAY, с решительным продвижением спектральных методов по Галеркину (Galerkin approximation), с возможностью регулярного анализа различных типов граничных условий почти все исследования по-прежнему определяли в первую очередь кривую устойчивости состояния покоя, которая может иметь в координатах параметров числа Рэлея и геометрического отношения весьма сложный вид (см. fig. 3 статьи [6]). В работе [6] эти вычисления проводились как для двумерной, так и для трехмерной полости-параллелепипеда. В этой работе имеется подробное и прекрасно иллюстрированное описание вычисленной системы разнообразных конвективных валов, наступающей недалеко за точкой бифуркации (см. pp. 315–319 и figs. 4–11 в ней же). Особое внимание исследованиями [7] с подобными численными методами уделялось случаю большой теплопроводности (расплавленный металл, жидкие кристаллы), рассматривалась возможность применить предел нулевого числа Прандтля; проводились сравнения с экспериментом. Экспериментальные исследования изменения картины валов представлены, например, в небольшой статье по гистерезису [8] с упоминанием двух, четырех роллов с подъемом горячей жидкости в центре или падением холодной в центре в зависимости от способа установления числа Рэлея. Отметим работу [9] по исследованию конвекции в цилиндрической полости кругового сечения, в которой с помощью конструирования пространства Крылова методом Арнольди (Arnoldi method) находят собственные векторы линеаризованной задачи. Близкой этой статье по результатам является работа [10], всецело опирающаяся на метод Галеркина и цилиндрическую геометрию.

За последние десять лет выделяется тенденция к использованию общих методов, не касающихся геометрических свойств границы полости, определяя установившиеся течения по свойствам симметрии задачи. Не удивительно, что именно метод Галеркина с бездивергентными базисными функциями был использован в [11] для получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений и применялась матричная алгебра для описания бифуркационных диаграмм в кубической полости. Там же были получены чередования установившихся течений вблизи бифуркационных кривых. Примечательно, что авторы, фиксируя число Прандтля и геометрию полости, строят интересную бифуркационную диаграмму в параметрах числа Нуссельта (теплового подвода к жидкости) и числа Рэлея. Критическая кривая напоминает зависимость $Nu \sim Ra^{1/2}$, выведенную в работе [12] путем решения нелинейной системы с разделяющимися переменными.

Однако все эти работы не в состоянии определить поведение жидкости в сильно закритической области, где образовавшиеся вторичные стационарные циркуляции неустойчивы и сменяются осцилляциями. Кроме этого, как отмечается во многих работах, при больших числах Рэлея очень трудно применять численные методы, т.к. возрастает число степеней свободы, появляется много новых мод ([12]). Работа [13], наиболее близкая к предложенной по стилю, рассматривает двумерную задачу, в которой окружность подогревалась неравномерно снизу: сильнее в нижней точке, слабее на стыке с верхней частью, державшейся при постоянной температуре. Эта работа и описывает бифуркации Хопфа на основе уравнения Ландау, фиксирует усложнение спектра колебаний по мере увеличения числа Рэлея, представляет хаос. Решение проводится для перевернутого набок длинного двумерного цилиндра. Попутно авторы сравнивают различные методы определения критической кривой и дают хорошие рекомендации методу P.O.D. (proper orthogonal decomposition), подробно описанному в книге [14]. В работе [15] уже близко подходим к малокомпонентным моделям (low-order models), получившим широкое распространение после основополагающей работы Э. Лоренца [16], описывающей простейшее конвективное течение. Такие модели могут, согласно статье [15], адекватно описать и стационарные режимы вблизи бифуркаций, и подобные рассмотренным в работе [9] волны, и хаос. Авторы отвечают на вопросы о точности аппроксимации 6- и 10-модовыми моделями, о расходимости расчетов по причине невозможности сброса энергии в высокие моды, представляют динамические портреты систем. Матричное представление (matrix image) коэффициентов служит качественной иллюстрацией о механическом характере системы (например, три слабо связанных осциллятора).

В свете вышеизложенного целесообразно уделить больше внимания малокомпонентным моделям, тем более, что они имеют тесную связь с нелинейной механикой и изучены недостаточно. «Открытие Э.Лоренца произвело впечатление разорвавшейся бомбы: столь сложного поведения от простой, на первый взгляд, системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичными нелинейностями не ожидал никто.» ([17] стр. 68). Определенно, в последнее время интерес к малокомпонентным моделям заметно поубавился: приоритет в научных изданиях отдается то экспериментам с поставленными на поток производства технологиями роста кристаллов, то тщательному числовому расчету, тестирующему и процессор, и пакеты прикладных программ. Не последнюю роль в выборе научных издательств сыграло отличное качество созданных по расчетным данным трехмерных цветных иллюстраций с помощью блестящего языка программирования — OpenGL. Когда же речь заходит об актуально необходимом получении хотя бы общего представления о более сложных системах, например, о прогреве-вентиляции помещения со сложной границей (теплицы, сохранение фресок, архивы данных), то в первую очередь вспоминают об общефизических соображениях. Используя лишь законы термодинамики с уравнением Бернулли, получают довольно сложную картину баланса и противодействия ветрового воздействия и отопления, таким образом снова попадают под «разрывающуюся бомбу» от вырожденной малокомпонентной системы [18], [19]. По причине недостаточного знания такого

рода систем трудно указать стратегию дальнейших действий. А уже сглаженные установившиеся по времени вычисления CFD при реальных очень больших числах Рэлея для экзотических древних сооружений [20] отнюдь не напоминают даже устоявшееся представление о конвекции как о явлении со множеством термиков и вихрей.

К настоящему времени после экспериментальных исследований с помощью PIV-техники (Particle Image Velocimetry) в изучении конвекции терминология сильно обогатилась. Теперь в центре внимания не методика лорда Рэлея с критическими числами и конвективными валами, а скорее турбулентная конвекция при больших числах Рэлея с «термическими пятнами» (thermal plumes), их кластеризация (clustering). Особое внимание уделяется правильному описанию напряжений Рэйнольдса в приближении анизотропной турбулентности для объяснения наблюдаемых когерентных структур (coherent structures) и гистерезису (hysteresis), найденному Busse в 1967 году, когда наблюдаемые картины движений зависят от пути изменения числа Рэлея [7], [8]. Образовалось понятие, которого раньше не было в прилагемом смысле — крупномасштабная циркуляция (large-scale circulation, LSC) или «ветер» («wind») [21].

Центральными вопросами считаются формирование крупномасштабной циркуляции, или «ветра» и ее взаимодействие с динамикой «термических пятен». Опираясь на [21], многие исследователи соглашались, что LSC — следствие взаимодействия «термических пятен» друг с другом и с возникшей окружающей циркуляцией. В [22] наблюдали, как «термические пятна» соединяются, организуются друг по отношению к другу и формируют LSC. Сильнейшими сегодня, на взгляд автора, являются статьи [23], [24], [25], занимающиеся явлением очень быстрой сменой направления крупномасштабной циркуляции (wind reversals) после ее очень длительного существования. При этом акцентируется, что осциллирует и горизонтальное направление «ветра», хотя сила плавучести имеет только вертикальную компоненту в стандартной постановке конвекции Рэлея—Бенара. Расчет подобной конвективной динамики на длительное время очень важен в задачах метеорологии и физики Земного ядра. Авторы в численных расчетах используют теорию Grossmann—Lohse [26], [27], параметризующую тепловой подвод к жидкости и число Рэйнольдса в зависимости от чисел Рэлея и Прандтля (см. также [12]). Принципиально отметить, что в [25] была на основании качественных физических соображений и аппроксимаций выведена именно малокомпонентная система, похожая на модель Лоренца, на основании которой были определены на диаграмме параметров чисел Рэлея и Прандтля области стационарной циркуляции, ее периодических обращений, хаоса. Кроме этого, были получены параметризации числа Рейнольдса и частоты смены «ветра». Оговорим, что проводимые исследования в полостях с равновеликими высотой и диаметром могут отличаться физическим механизмом от результатов для полостей с высотой вдвое больше диаметра.

Данная работа была инициирована по просьбе Prof. A.Thess, занимающегося со своими сотрудниками исследованиями по конвекции в семиметровой бочке квазиэллиптического сечения («barrel of Ilmenau»), ставшей достопримечательностью г. Ilmenau в Тюрингии. В проведенной под его руководством недавней работе [28] для описания конвективных крупномасштабных осцилляционных движений жидкости в замкнутых объемах использовалась 6-модовая модель конвекции, предложенная в 1977 году Ф. В. Должанским [30]–[32]. Такая модель, будучи точной в классе недиссипативных, линейных по координатам движений, может служить основой для понимания механизмов смены типов режимов. Некоторые из них, включая меняющиеся знаки циркуляции или аналоги «хореографий» для гравитационных движений, рассматривались в работах [36], [37]. При этом вводимые в модель эффективные вязкость и теплопроводность отражают движение мелкомасштабных структур. В статье [28] смена знака скорости в любом заданном горизонтальном сечении течения объясняется глобальными поворотами горизонтальной оси вращения жидкости как целого, поскольку 6-модовая модель Ф. В. Должанского не описывает «термические пятна». Как отмечено в [29], в полости с одинаковыми высотой и диаметром

одноячейстая циркуляция может быть подразделена на три области: тонкий вязкий погранслой, основная центральная смешанная часть, толстый буферный слой, состоящий из «термических пятен», который и движет LSC (см. fig. 5 в [29]). Таким образом, работа [28] утверждает, что хотя деятельность «термических пятен» играет важную роль в LSC, но они рассматриваются как пассивные объекты, переносимые потоком.

По мнению автора предложенной статьи, в работе [28] все аргументировано единичными расчетами при не совсем удачных значениях параметров. Однако шестимодовая нелинейная система сложна, и, возможно, ее очень частные свойства, так удачно совпадающие с некоторыми наблюдениями, не следует рассматривать без связи с оставшимся вне внимания разнообразием структур. Как будет показано ниже, интересующие режимы имеют частный и вырожденный характер, и, взяв за основу 6-модовую модель Ф.В.Должанского, большее внимание следует направить и на другие возможные режимы.

В данной работе конвективные движения исследуются в широком диапазоне изменения эффективного числа Прандтля, числа Рэлея и различных величинах вертикального размера замкнутого объема в почти аксиально-симметричной эллипсоидальной «бочке». В §2 выводятся уравнения 6-модовой модели Ф. В. Должанского для случаев изотропного и анизотропного видов трения. В §3 для изотропного трения найдены стационарные решения системы и рассмотрена их устойчивость. В §4 представлены диаграммы режимов, определены области осцилляционных движений, где имеются повороты или вращения горизонтальной оси вращения жидкости. Получен и исследован режим, в котором осцилляционные движения жидкости происходят в фиксированных вертикальных плоскостях, что также приводит к смене направления крупномасштабных движений. В §5 приведен ряд аналитических формул для основного типа движений в объеме, которые дают возможность оценить периоды осцилляционных движений в зависимости от некоторых внешних параметров и рассмотрены для некоторых значений числа Прандтля диаграммы при анизотропном трении.

2. Модель конвекции

Используем стандартные уравнения Обербека-Буссинеска для несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{\nabla p'}{\rho_0} - \mathbf{g} \frac{T'}{T_0}; \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) T' &= \mu \cdot \gamma_z z, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $T'(\mathbf{r}, t) = T(\mathbf{r}, t) - T_0$ отклонение температуры от фонового значения.

Последнее уравнение в (2.1) записывается при наличии радиационного механизма теплопередачи к жидкости по закону Ньютона с коэффициентом μ с внешней вертикальной разницей температур, обеспечивающей неоднородный нагрев жидкости снизу (бароклинность), $\gamma_z < 0$.

Поля скорости и температуры в эллипсоиде $S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ представляются линейными по пространственным координатам (x, y, z) функциями:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z, t) &= \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \mathbf{W}_i(x, y, z), \\ \mathbf{W}_1 &= -\frac{b}{c} z \mathbf{j} + \frac{c}{b} y \mathbf{k}, \quad \mathbf{W}_2 = \frac{a}{c} z \mathbf{i} - \frac{c}{a} x \mathbf{k}, \quad \mathbf{W}_3 = -\frac{a}{b} y \mathbf{i} + \frac{b}{a} x \mathbf{j}; \\ T'(x, y, z, t) &= \sum_{k=1}^3 \tau_k(t) \Theta_k(x, y, z), \quad \Theta_1 = \frac{x}{a}, \quad \Theta_2 = \frac{y}{b}, \quad \Theta_3 = \frac{z}{c}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Параметры Пуанкаре $\omega_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) и температурные коэффициенты $\tau_k(t)$ ($k = 1, 2, 3$) связаны соответственно с относительной завихренностью жидкости в эллипсоиде $\nabla \times \mathbf{u}$ и с градиентом отклонения температуры жидкости в эллипсоиде $\nabla T'$ простыми линейными соотношениями.

Для описания диссипативных эффектов в системе (2.1) вводится «линейное трение» [33]–[35] $-\lambda \mathbf{u}$, $-\mu T'$.

Из (2.1) с учетом (2.2) можно получить в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= G_1 \omega_2 \omega_3 - \frac{q_2}{r_1} - \rho_x \omega_1 \delta, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= -G_2 \omega_1 \omega_3 + \frac{q_1}{r_2} - \rho_y \omega_2 \delta, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= G_3 \omega_1 \omega_2 - \rho_z \omega_3 \delta, \\ \frac{dq_1}{dt} &= \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2 - \rho_1 q_1 \delta, \\ \frac{dq_2}{dt} &= -\omega_1 q_3 + \omega_3 q_1 - \rho_2 q_2 \delta, \\ \frac{dq_3}{dt} &= \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1 - \delta Q_z - \rho_3 q_3 \delta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где введен масштаб времени $t_0 = 1/\omega_0$, так что безразмерные параметры имеют вид:

$$\begin{aligned} t' &= \omega_0 \cdot t; \quad \omega'_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}, \quad i = 1, 2, 3; \\ q_k &= -\frac{g c}{2 a b \omega_0^2} \cdot \frac{\tau_k}{T_0}, \quad k = 1, 2, 3; \quad Q_z = \frac{g c}{2 a b \omega_0^2} \cdot \frac{\gamma_z \cdot c}{T_0} < 0, \quad \delta = \frac{\mu}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В системе (2.3) штрихи опущены.

Постоянные $G_1, G_2, G_3, r_1, r_2, r_3$ определяются геометрией эллипсоида:

$$G_1 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}, \quad G_2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}, \quad G_3 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}; \quad r_1 = \frac{b^2 + c^2}{2 a b}, \quad r_2 = \frac{a^2 + c^2}{2 a b}, \quad r_3 = \frac{a^2 + b^2}{2 a b}.$$

В системе (2.3) последние члены уравнений соответствуют линейному трению, которое может быть как изотропным по скорости и температуре, так и включать в себя неизотропию — неодинаковую скорость затухания для различных параметров Пуанкаре $\omega_i(t)$ и градиентов отклонения температуры $q_k(t)$.

Для случая изотропного трения коэффициенты в (2.3) имеют следующие значения:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1, \quad \rho_x = \rho_y = \rho_z = \zeta_0, \quad \zeta_0 = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.5)$$

Эти коэффициенты определяются эффективным числом Прандтля ζ_0 , введенным в [30]–[32].

Для случая анизотропного трения коэффициенты определялись на основе аппроксимации членов $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ и $\kappa \Delta T'$ уравнений гидродинамики (ν и κ — коэффициенты вязкости и теплопроводности):

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \xi \frac{a^2 + b^2}{a^2}, \quad \rho_2 = \xi \frac{a^2 + b^2}{b^2}, \quad \rho_3 = \xi \frac{a^2 + b^2}{c^2}, \\ \rho_x &= \zeta_2 \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} \frac{b^4 + c^4}{b^2 \cdot c^2}, \quad \rho_y = \zeta_2 \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2} \frac{a^4 + c^4}{a^2 \cdot c^2}, \quad \rho_z = \zeta_2 \frac{a^4 + b^4}{a^2 \cdot b^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В (2.6) входят два параметра — эффективное число Прандтля для вязкого оператора второго порядка $\zeta_2 = \frac{5\nu}{\mu \cdot (a^2 + b^2)}$ и характеристика теплопроводности $\xi = \frac{5\kappa}{\mu \cdot (a^2 + b^2)}$, где согласно работе [28] $\zeta_2 \sim \zeta_0$, $\xi \sim 1$.

Очевидно, что традиционное число Прандтля для анизотропного трения (2.6) $Pr = \zeta_2/\xi$, а в случае изотропного (2.5) его роль играет эффективное число Прандтля ζ_0 .

Частота ω_0 , определяемая характерным временем t_0 , обычно принимается равной μ (см. [30]), или, при наличии внешнего вращения системы, $\omega_0 = \Omega_0$, но в данной задаче величину ω_0 будем далее задавать из условия, чтобы в численном счете или аналитических формулах получаемые величины параметров Пуанкаре $\omega_i(t)$ и градиентов отклонения температуры $q_k(t)$ в (2.3) не были большими. Этого можно достичь с помощью задания значения δ в (2.4).

Интенсивность внешнего притока тепла описывается числом Рэлея:

$$Ra = -\frac{Q_z}{\delta^2} = \frac{g c}{2 a b \mu^2} \cdot \frac{|\gamma_z| c}{T_0} \geq 0,$$

которое не зависит от параметра δ . В работе [28] введено число $R = \frac{2}{\zeta_0} \cdot Ra \cdot \frac{a b}{c^2}$, которое зависит от вертикального градиента температуры и не зависит от вертикального размера эллипсоида. Используемое число Ra естественным образом возникает в безразмерных уравнениях (2.3). Вид диаграмм, приводимых далее вблизи $c/a \sim 1$ слабо зависит от определения числа Рэлея.

Для численных расчетов параметры системы (2.3) были выбраны следующим образом (для некоторых величин указаны пределы изменения, точные данные выписаны в следующих параграфах):

$$c/a \in [0.0; 2.0], \quad a = 3.00, \quad b = 2.99, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \approx 0.08,$$

где ε — эксцентриситет главного горизонтального сечения эллипсоида ;

$$\zeta_0 = 10^{-2} \div 10^2, \quad Pr = 0.4, 1.0, 2.5, \quad \xi = 0.4, 1.0 ;$$

$$\ln Ra \in [-3.0; 15.0], \quad \delta \sim 10^{-2} \div 10^{-1} .$$

3. Режимы конвекции

Для системы (2.3) имеются стационарные решения. Приведем аналитические формулы для действительных решений, которые справедливы в общем случае для (2.5) и (2.6).

Состояние покоя жидкости (в дальнейшем будем выписывать только ненулевые компоненты):

$$q_{3s} = -\frac{Q_z}{\rho_3}, \tag{3.1}$$

формально существующее всегда, но устойчивое только при малых Ra ,

$$Ra < \min \left[\rho_1 \rho_3 \rho_y r_2, \rho_2 \rho_3 \rho_x r_1 \right].$$

При $a = b$, когда $G_3 = 0$, и нет различия между горизонтальными диссипативными коэффициентами из (2.5) (или (2.6)), имеются соотношения:

$$\begin{aligned} r_{12} = r_1 = r_2 = \frac{a^2 + c^2}{2 a^2}, \quad G_{12} = G_1 = G_2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}; \\ \rho_{xy} = \rho_x = \rho_y, \quad \rho_{12} = \rho_1 = \rho_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В этом случае имеется семейство решений:

$$\omega_{1s}^2 + \omega_{2s}^2 = \delta^2 \cdot \left[\frac{Ra}{\rho_{xy} r_{12}} - \rho_{12} \rho_3 \right], \quad \omega_{3s} = 0, \quad q_{3s} = \rho_{12} \rho_{xy} r_{12} \delta^2. \quad (3.3)$$

Если $a \neq b$, то осевая симметрия системы снимается, и появляется ряд корней стационарной системы (2.3):

$$\omega_{2s} = \pm \delta \cdot \sqrt{\frac{Ra}{r_2 \rho_y} - \rho_1 \rho_3}, \quad q_{1s} = \pm \rho_y r_2 \delta^2 \cdot \sqrt{\frac{Ra}{r_2 \rho_y} - \rho_1 \rho_3}, \quad q_{3s} = \rho_1 \rho_y r_2 \delta^2, \quad (3.4)$$

существующие при $Ra \geq Ra_i \equiv r_2 \rho_1 \rho_y \rho_3$;

$$\omega_{1s} = \pm \delta \cdot \sqrt{\frac{Ra}{r_1 \rho_x} - \rho_2 \rho_3}, \quad q_{2s} = \mp \rho_x r_1 \delta^2 \cdot \sqrt{\frac{Ra}{r_1 \rho_x} - \rho_2 \rho_3}, \quad q_{3s} = \rho_2 \rho_x r_1 \delta^2, \quad (3.5)$$

существующие при $Ra \geq Ra_j \equiv r_1 \rho_2 \rho_x \rho_3$.

Для всех описанных выше корней стационарной системы (2.3) компонента $\omega_{3s} = 0$. Корни с $\omega_{3s} \neq 0$ комплексные.

Исследование на устойчивость в линейном приближении ($\omega_i = \omega_{is} + \omega'_i$, $q_k = q_{ks} + q'_k$, $\{\omega'_i, q'_k\} \sim e^{s \tau}$) корней (3.4), (3.5) с параметрами (2.5) и (2.6) приводит к уравнениям шестого порядка для s , каждое из которых расщепляется на два кубических уравнения. Здесь $\tau = \mu \cdot t = \delta \cdot t'$. Предварительное изучение стационарных режимов и переход к колебаниям было проведено Ф. В. Должанским (см. §2 главы 3 книги [40]).

Для стационарных решений (3.4):

$$\begin{aligned} (s + \rho_3) \cdot (s^2 + s \cdot (\rho_1 + \rho_y)) + \frac{Ra - Ra_i}{\rho_y \cdot r_2} \cdot \rho_y \cdot \left(2 + \frac{s}{\rho_y} \right) &= 0; \\ (s + \rho_z) \cdot \left(s^2 + s \cdot (\rho_2 + \rho_x) + \frac{r_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_x - r_2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_y}{r_1} \right) - & \\ - G_3 \cdot \frac{Ra - Ra_i}{\rho_y \cdot r_2} \cdot \left(s \cdot G_1 + \left(\rho_2 \cdot G_1 - \rho_y \cdot \frac{r_2}{r_1} \right) \right) &= 0; \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для стационарных решений (3.5):

$$\begin{aligned} (s + \rho_3) \cdot (s^2 + s \cdot (\rho_2 + \rho_x)) + \frac{Ra - Ra_j}{\rho_x \cdot r_1} \cdot \rho_x \cdot \left(2 + \frac{s}{\rho_x} \right) &= 0; \\ (s + \rho_z) \cdot \left(s^2 + s \cdot (\rho_1 + \rho_y) + \frac{r_2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_y - r_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_x}{r_2} \right) + & \\ + G_3 \cdot \frac{Ra - Ra_j}{\rho_x \cdot r_1} \cdot \left(s \cdot G_2 + \left(\rho_1 \cdot G_2 - \rho_x \cdot \frac{r_1}{r_2} \right) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Расчеты по уравнениям проводятся с помощью формул Кардано.

Ниже мы рассмотрим случай изотропного трения (2.5). Можно показать, что первые уравнения в (3.6), (3.7) дают только устойчивые собственные значения ($\text{Re}(s) < 0$) при $\zeta_0 \leq 2$, так что неустойчивость в этом случае определяется вторыми кубическими уравнениями в (3.6), (3.7). Легко показать, что при больших числах Рэлея неустойчивость для стационарных решений (3.4) появляется при $c/a < \sqrt{1 + 2 \cdot (b/a)^2} = \sqrt{3 - 2 \cdot \varepsilon^2} \approx 1.7282$, что слегка меньше $\sqrt{3}$, а для стационарных решений (3.5) появляется при $c/a > \sqrt{\frac{1 - (b/a)^2 \cdot \zeta_0}{1 + \zeta_0}} = \sqrt{\frac{1 - \zeta_0 + \zeta_0 \cdot \varepsilon^2}{1 + \zeta_0}} \approx \sqrt{\frac{1 - \zeta_0}{1 + \zeta_0}}$ (при $\zeta_0 \neq 1$) (эти границы показаны линиями (2) и (3) на диаграммах следующего параграфа).

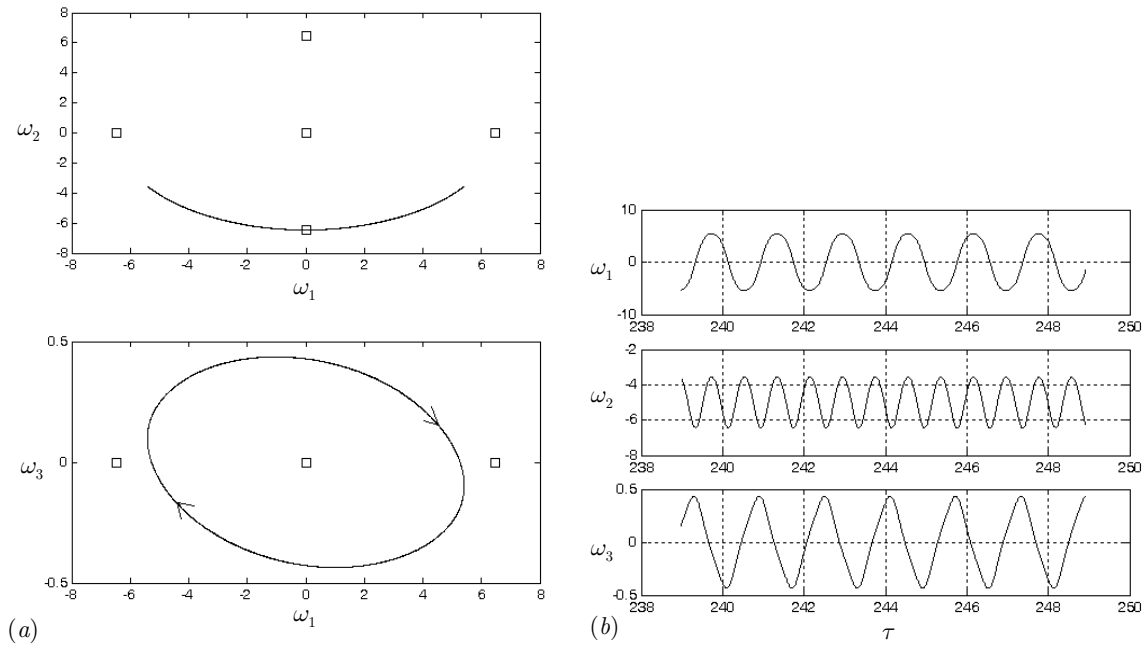


Рис. 1. Колебательный режим II для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$ с параметрами $c/a = 1.54$, $\ln Ra = 10.26$; начальные данные вблизи (3.4) с верхними знаками. (а): фазовые плоскости (ω_1, ω_2) , (ω_1, ω_3) ; (б): зависимость от времени.

После потери устойчивости стационарных решений (3.4) вначале устанавливается квазипериодический режим (в дальнейшем обозначенный на диаграммах II), в котором выделяется один период. На рис. 1а в фазовых плоскостях (ω_1, ω_2) , (ω_1, ω_3) и на рис. 1б в зависимости от времени показана динамика этого режима. В дальнейшем на рисунках фазовых плоскостей показано стрелочками направление движения точки, а прямоугольные рамки обозначают положение стационарных решений (3.4), (3.5).

При увеличении числа Рэлея этот режим теряет устойчивость, происходит бифуркация удвоения периода, и система выходит на режим, который обозначается далее *, с двумя периодами. Соответствующая динамика показана на рис. 2а, рис. 2б. Затем при дальнейшем изменении параметров происходит еще одна бифуркация удвоения периода, и возникает трехпериодный режим (\boxplus), см. рис. 3а, рис. 3б.

После потери устойчивости стационарных решений (3.5) возникает квазипериодический режим \diamond . Динамика в фазовой плоскости (ω_1, ω_3) показана на рис. 4а, зависимость от времени показана на рис. 4б,

Однако основным конвективным режимом при $c/a \sim 1$ на диаграммах рис. 7–11 оказался режим V, показанный на рис. 5а, рис. 5б: область периодических режимов, описанных выше, достаточно узкая по сравнению с ним. В нем качественно по сравнению с предыдущими изменилось движение в фазовой плоскости (ω_1, ω_3) . Оказалось, что этот режим допускает аналитическое исследование.

Рассмотрение движения лагранжевых частиц целесообразно начать с уравнений их движения. Обезразмерив соответствующие декартовы координаты на полуоси эллипсоида a, b, c , можно получить, используя выражения (2.2) для скорости жидкости в эллипсоиде:

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (+z \omega_2 - y \omega_3, -z \omega_1 + x \omega_3, +y \omega_1 - x \omega_2) .$$

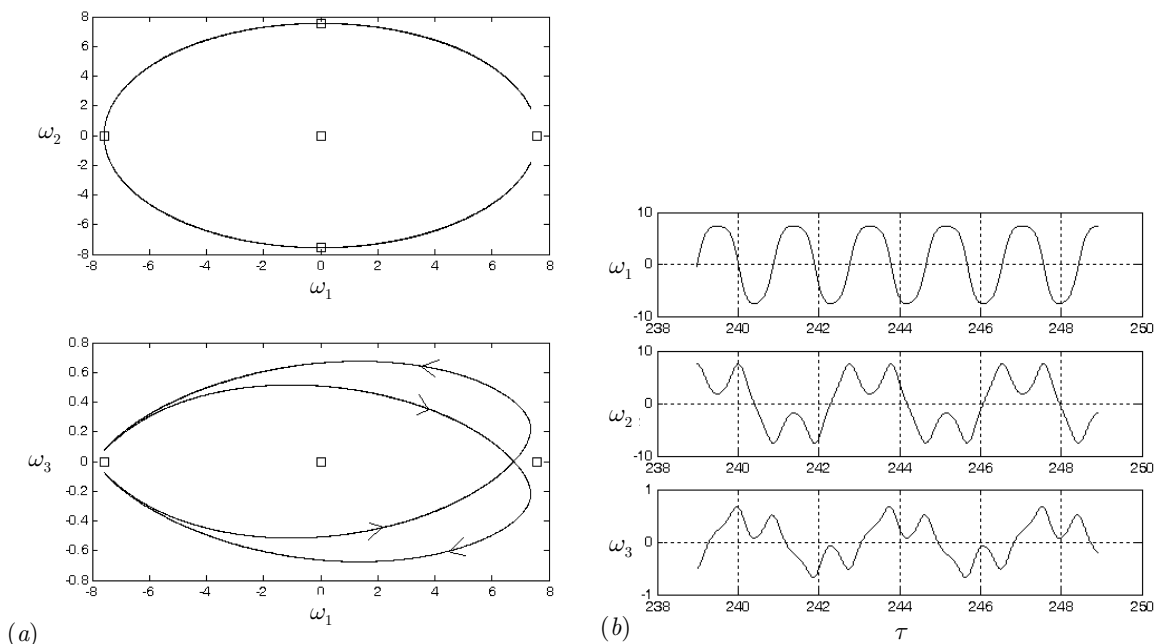


Рис. 2. Колебательный режим * для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$ с параметрами $c/a = 1.27$, $\ln Ra = 10.32$; начальные данные вблизи (3.5) с нижними знаками. (а): фазовые плоскости (ω_1, ω_2) , (ω_1, ω_3) ; (б): зависимость от времени

Для колебательных режимов \vee , Π , \diamond , \boxplus можно заметить, что в плоскости (x, y) происходит движение по почти прямолинейным отрезкам с меняющимися со временем направлениями. В плоскостях (x, z) , (y, z) движение происходит по эллипсам с изменяющимися положениями центров. В зависимости от знаков величин ω_1, ω_2 меняется направление вращения лагранжевых частиц по этим эллипсам в плоскостях (x, z) , (y, z) . На рис. 6 показаны траектории движения лагранжевых частиц в плоскостях (x, y) , (x, z) вместе с изменением величин параметров Пуанкаре (фазовые плоскости (ω_1, ω_2) , (ω_1, ω_3)). Маркеры-цифры связывают положение лагранжевой частицы в эллипсоиде со значениями величин ω_1, ω_2 и ω_3 в тот же момент времени. Можно заметить, что в плоскости (x, y) отрезки, по которым движется лагранжева частица наклоняются против часовой стрелки, чуть смещаясь, в плоскости (x, z) движение происходит по часовой стрелке, если ω_2 положительно и против часовой стрелки при отрицательном ω_2 . Как видно, линейные поля скорости и температуры не дают никакой возможности реализации сложных траекторий лагранжевых частиц, вся их динамика происходит по эллипсоидным орбитам. На рис. 6 масштабы осей эллипсоида по осям x, y и z изменены для визуализации.

4. Диаграммы режимов

Диаграммы режимов в координатах $(\ln Ra, c/a)$ показаны на рис. 7–15 для соответственно $\zeta_0 = 1.0; 0.1; 0.2; 0.4; 1.4; 1.8; 2.0; 8.0$.

Начальные условия для величин ω_1 и ω_2 выбираются в окрестностях всех пяти стационарных решений (3.1), (3.4), (3.5), начальные условия для ω_3 определялись из соотношения $|\omega_3| \sim |\omega_{1s}|, |\omega_{2s}|$, а для остальных величин (q_1, q_2, q_3) — соответствующие значения из ста-

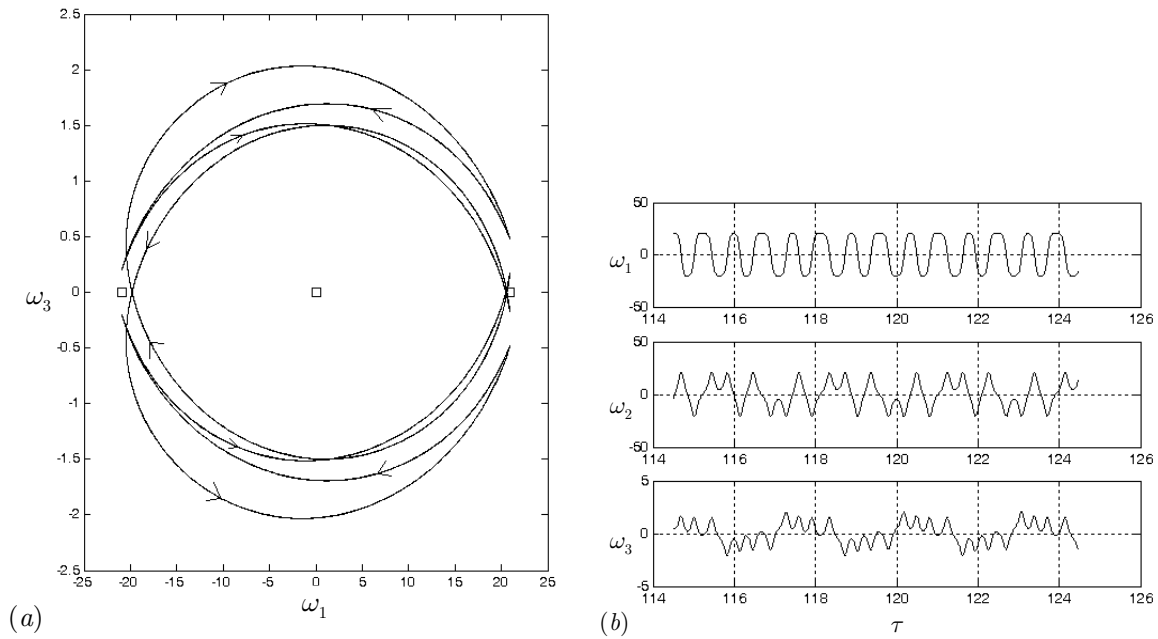


Рис. 3. Колебательный режим \boxplus для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$ с параметрами $c/a = 1.47$, $\ln Ra = 12.54$; начальные данные вблизи (3.5) с верхними знаками. (а): фазовая плоскость (ω_1, ω_3) ; (б): зависимость от времени

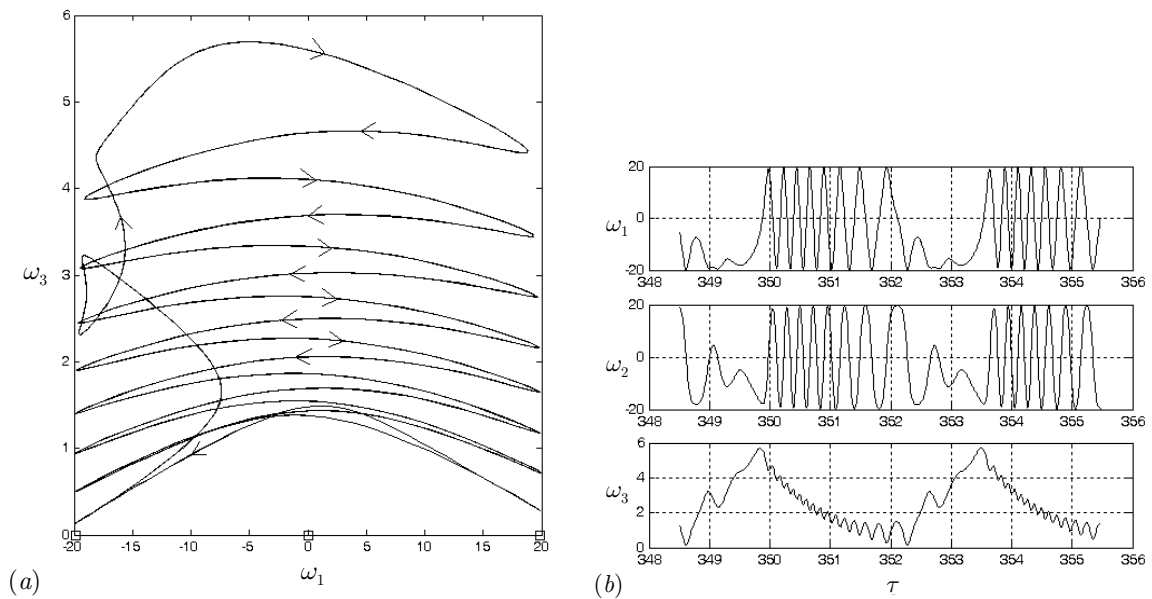


Рис. 4. Колебательный режим \diamond для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$ с параметрами $c/a = 0.585$, $\ln Ra = 11.58$; начальные данные вблизи (3.4) с нижними знаками. (а): фазовая плоскость (ω_1, ω_3) ; (б): зависимость от времени.

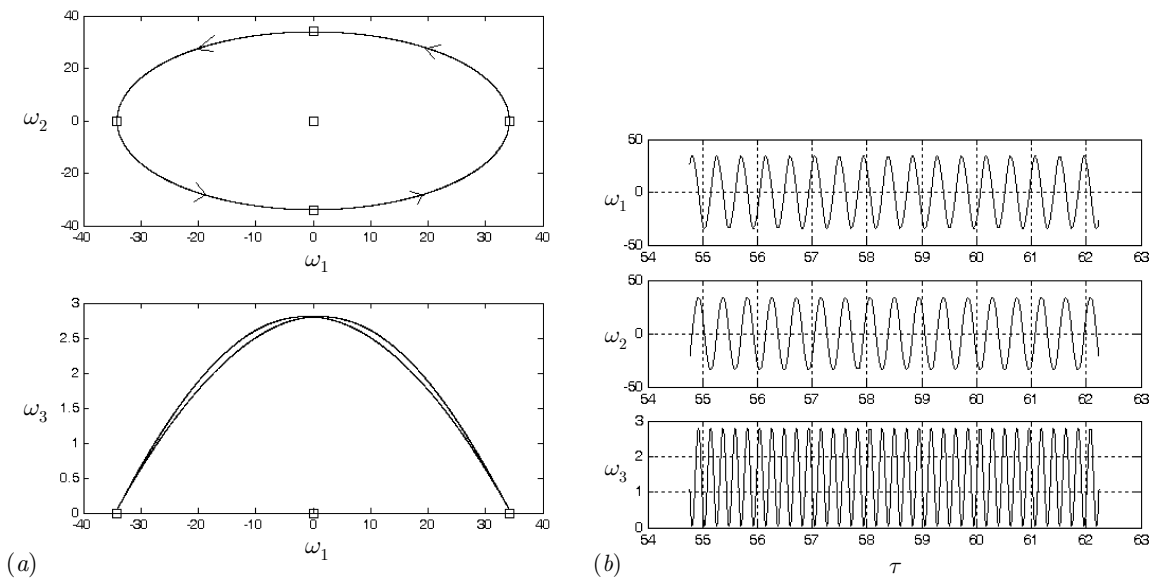


Рис. 5. Основной конвективный режим ∇ для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$ с параметрами $c/a = 0.96$, $\ln Ra = 13.02$; начальные данные вблизи (3.4) с нижними знаками. (а): фазовые плоскости (ω_1, ω_2) , (ω_1, ω_3) ; (б): зависимость от времени.

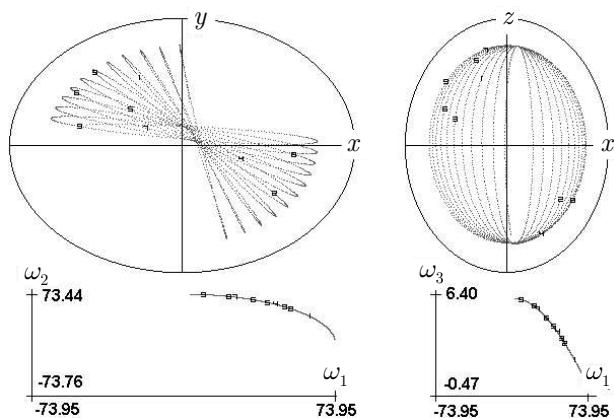


Рис. 6. Лагранжевы траектории режима ∇ для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$ с параметрами $c/a = 0.915$, $\ln Ra = 14.52$; начальные данные для параметров Пуанкаре $\omega_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) и температурных коэффициентов $\tau_k(t)$ ($k = 1, 2, 3$) заданы вблизи (3.4) с нижними знаками; начальное положение частицы $(0.675 a, -0.2 b, 0.35 c)$; маркеры-цифры поставлены для моментов времени: 1 — $t \approx 100.28$, 2 — $t \approx 100.41$, 3 — $t \approx 100.44$, 4 — $t \approx 100.50$, 5 — $t \approx 100.54$, 6 — $t \approx 100.62$, 7 — $t \approx 100.71$, 8 — $t \approx 100.75$, 9 — $t \approx 100.88$.

ционарных решений. Наиболее важным для результатов оказалось начальное значение компоненты q_3 . Динамика сильно отличается при выборе q_3 для стационарных решений (3.4), (3.5) или (3.1). Для каждой выбранной пары параметров Ra , c/a рассчитывается поведение системы (2.3) на значительный промежуток времени до установления какой-либо определенной картины в фазовом пространстве параметров Пуанкаре $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.



На рис. 7 представлена диаграмма режимов при $\zeta_0 = 1.0$. На ней значком \ddagger показано состояние покоя системы, соответствующее стационарному решению (3.1). Стационарные конвективные решения (3.4) и (3.5) показаны значками соответственно \ddagger , ¥ . Показаны также области колебательных режимов Π , $*$, \boxplus , \diamond , \vee .

На диаграмме рис. 7 (и всех последующих) сплошная линия (1) отделяет область физической реализации (3.1) и описывается при $a \approx b$ формулой:

$$Ra = r_{12} \rho_{12} \rho_{xy} \rho_3.$$

Сплошная кривая (2) рис. 7–14 показывает границу линейной устойчивости стационарных решений (3.4), которая рассчитывалась по второму уравнению (3.6). Правее этой кривой стационарные решения (3.4) неустойчивы. Эта кривая описывается следующим выражением:

$$\frac{Ra - Ra_i}{r_2 \rho_y} = \frac{\rho_2 + \rho_x}{G_3} \cdot \frac{r_1 \cdot \rho_z \cdot (\rho_2 + \rho_x + \rho_z) + (r_1 \rho_2 \rho_x - r_2 \rho_1 \rho_y)}{r_1 \cdot G_1 \cdot (\rho_x + \rho_z) + r_2 \cdot \rho_y}.$$

Отсюда следует показанная на диаграммах асимптотика $c/a = \sqrt{3 - 2 \cdot \varepsilon^2}$ при больших числах Рэлея для режима \ddagger : если $Ra \rightarrow +\infty$ в последнем уравнении, то для (2.5) $r_1 \cdot G_1 \cdot (\rho_x + \rho_z) + r_2 \cdot \rho_y = 0 \implies \frac{b^2 - c^2}{a^2 + c^2} + 1/2 = 0$, и $c/a = \sqrt{1 + 2 \cdot (b/a)^2} = \sqrt{3 - 2 \cdot \varepsilon^2}$.

В случае $a = b$ кривая устойчивости (2) уходит на бесконечность ($G_3 = 0$). Тогда с учетом существования семейства решений (3.3) можно сделать вывод, что система (2.3) будет иметь при $a = b$ только стационарные решения на окружности (3.3).

Сплошная кривая (3) рис. 7–14 показывает границу линейной устойчивости стационарных решений (3.5), которая рассчитывалась по второму уравнению (3.7). Правее и выше этой кривой стационарные решения (3.5) неустойчивы. Кривая описывается следующим образом:

$$\frac{Ra - Ra_j}{r_1 \rho_x} = \frac{r_1 \rho_2 \rho_x - r_2 \rho_1 \rho_y}{G_3} \cdot \frac{\rho_z}{r_2 G_2 \rho_1 - r_1 \rho_x}.$$

Отсюда следует показанная на диаграммах асимптотика при больших числах Рэлея для режима ¥ , $c/a = \sqrt{\frac{1 - \zeta_0 + \zeta_0 \cdot \varepsilon^2}{1 + \zeta_0}}$. Если $\zeta_0 = 1$, то $c/a = \varepsilon/\sqrt{2} \approx 0.05769$. Наличие в этой области колебаний объясняется влиянием начальных данных, которые не были слишком близки к соответствующим стационарным решениям. Из диаграмм рис. 7, рис. 8, рис. 9, рис. 10 для соответственно $\zeta_0 = 1.0, 0.1, 0.2, 0.4$ видно, что при высоких числах Рэлея режим ¥ переходит в колебательный \diamond , а при низких граничит с режимом \ddagger . Исследование линейной устойчивости стационарных решений (3.4) (в области их существования) с помощью второго уравнения (3.6) дает примерно такую же аналитическую зависимость в приближении $a \approx b$.

Для других низких значений числа Прандтля $\zeta_0 < 1.6$ некоторые диаграммы показаны на рис. 8, рис. 9, рис. 10, рис. 11.

Все показанные на этих диаграммах рис. 7–11 режимы получаются при начальных данных для величин ω_1 и ω_2 из окрестностей всех пяти стационарных решений (3.1), (3.4), (3.5). Начиная со значения $\zeta_0 \approx 1.6$, могут появиться отличия в решениях, имеющих начальные данные около стационарного состояния (3.1) и около остальных четырех стационарных состояний (3.4), (3.5). Здесь для первого типа начальных данных при определенных начальных значениях компоненты ω_3 появляются новые осцилляции, названные далее ω_2 -колебания, для которых отличны от нуля и зависят от времени только три компоненты ω_2, q_1, q_3 .

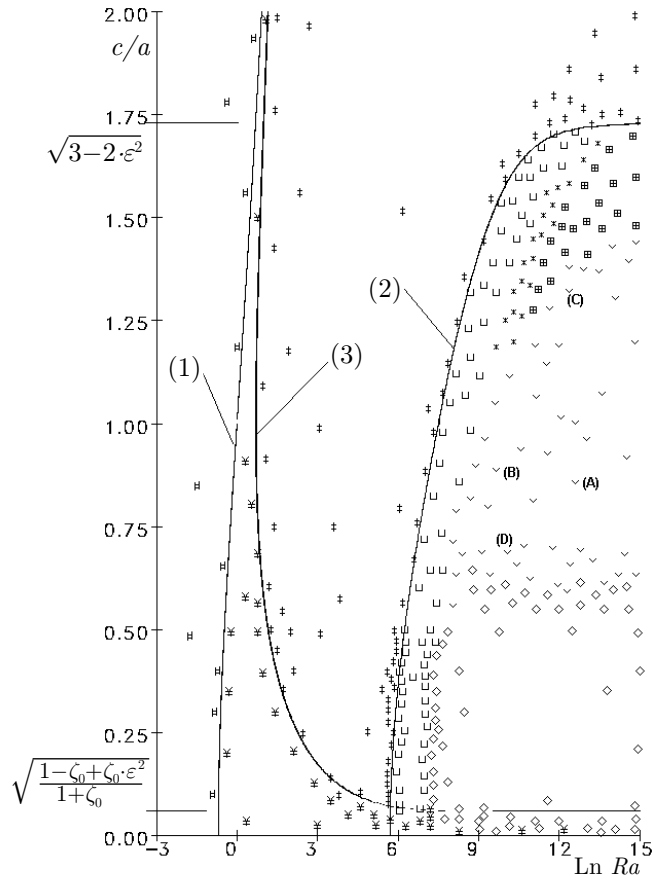


Рис. 7. Диаграмма режимов для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$: \ddagger — покой (3.1); \ddagger , \nexists — стационарные решения соответственно (3.4), (3.5); Π , $*$, \boxplus , \diamond , ∇ — колебательные решения, описанные в тексте; линии (1), (2), (3) — границы устойчивости стационарных решений.

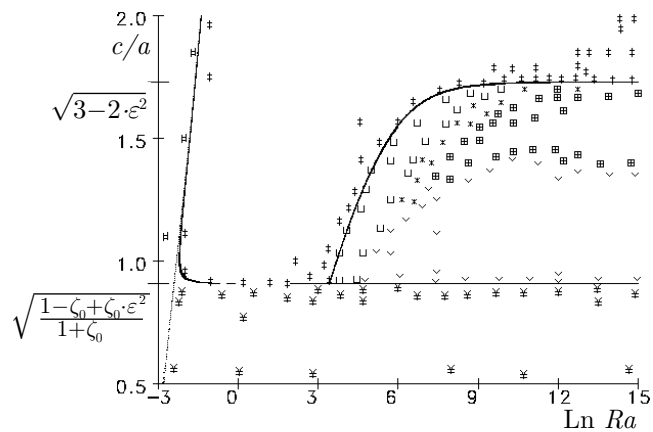


Рис. 8. Диаграмма режимов для изотропного трения при $\zeta_0 = 0.1$.

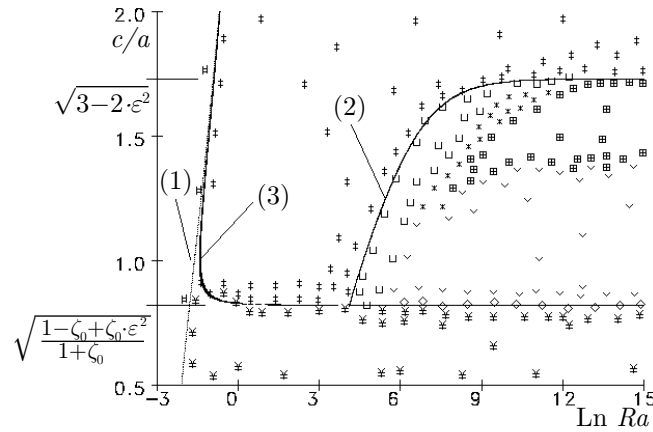


Рис. 9. Диаграмма режимов для изотропного трения при $\zeta_0 = 0.2$.

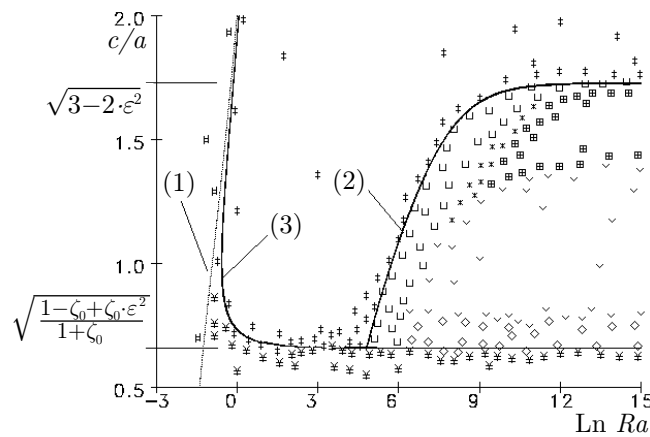


Рис. 10. Диаграмма режимов для изотропного трения при $\zeta_0 = 0.4$.

На рис. 12 и рис. 13 представлены диаграммы для эффективного числа Прандтля $\zeta_0 = 1.8$. Здесь значком \pm показан режим, являющийся совокупностью ω_2 -колебаний при начальных условиях, соответствующих (3.1) и прежних стационарных решений (3.4) для остальных начальных условий. Сплошная линия (2) — та же граница, что и для диаграммы рис. 7. Остальные значки — \cup , \times , \oplus , ∇ , \triangleleft — подразумевают те же режимы, что и, соответственно, прежние значки Π , $*$, \boxplus , ∇ , \diamond (графически похожие на новые), но для начальных условий около стационарных решений (3.4), (3.5). Для начальных данных около стационарного решения (3.1) имеем всегда в этих режимах ω_2 -колебания. Отметим, что в диапазоне $1.6 \leq \zeta_0 \leq 2.0$ наблюдается очень сложная зависимость решений системы (2.3) от начального значения ω_3 , в противоположность другим значениям эффективного числа Прандтля ζ_0 . Можно лишь заметить, что при абсолютных величинах начального значения ω_3 , которые малы по сравнению с начальными данными для ω_1 и ω_2 , как раз и наблюдается эта поправка режимов, а в обратной ситуации — все, как прежде. Диаграмма рис. 12 рассчитывалась при низких значениях $|\omega_3|$, а для диаграммы рис. 13 использовалось повышенное значение $|\omega_3|$.

Для эффективного числа Прандтля $\zeta_0 = 2.0$ (рис. 14) диаграмма становится достаточно сложной. Добавляется режим \star , где при начальных условиях около корней (3.4), (3.5) появля-

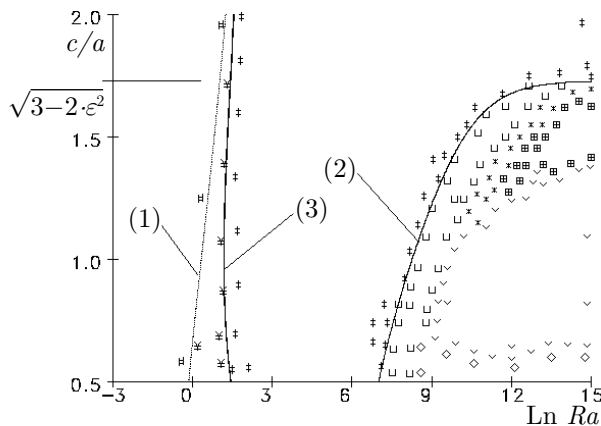


Рис. 11. Диаграмма режимов для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.4$.

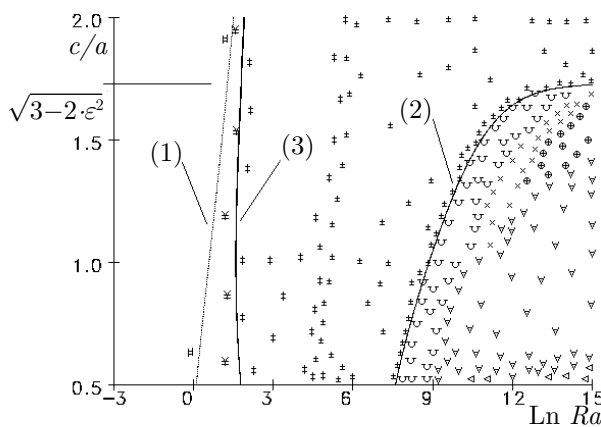


Рис. 12. Диаграмма режимов для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.8$ при малых по сравнению с ω_{1s} или ω_{2s} начальных значениях $|\omega_3|$.

ются малые ω_2 -колебания в окрестностях (3.4), а для начальных условий около стационарного решения (3.1) получаются развитые ω_2 -колебания. Также проявляется режим \bullet с уже достаточно заметной областью, для которого при всех начальных данных имеем только ω_2 -колебания. Режимы \pm, \ddagger, \bullet в области между кривыми устойчивости (2) и (3) сильно перемешаны.

Эффективное число Прандтля $\zeta_0 = \zeta_{0cr} = 2.0$ является критическим при вычислении области устойчивости стационарных состояний (3.4) из первого уравнения (3.6). В этом случае при $\zeta_0 > \zeta_{0cr}$ кривая устойчивости описывается уравнением:

$$\frac{Ra - Ra_i}{r_2} = \frac{\rho_3 \rho_y}{\rho_y - (\rho_1 + \rho_3)} \cdot (\rho_1 + \rho_y) \cdot (\rho_1 + \rho_3 + \rho_y).$$

Соответствующая линия (4) показана на рис. 15 для $\zeta_0 = 8.0$. Сплошные кривые (1) и (3) — те же, что и на прежних диаграммах рис. 7–14. Для таких больших эффективных чисел Прандтля набор режимов правее линии (4) существенно отличается от рис. 7–14. Режимы II (\cup), \ast (\times), \vee (∇), \boxplus (\oplus), \diamond (\triangleleft) теперь не существуют. Основным является ω_2 -режим (\bullet) для всех начальных данных (3.1), (3.4), (3.5). Другой основной режим (ω_1 -режим) (подобно ω_2 -режиму) имеет только

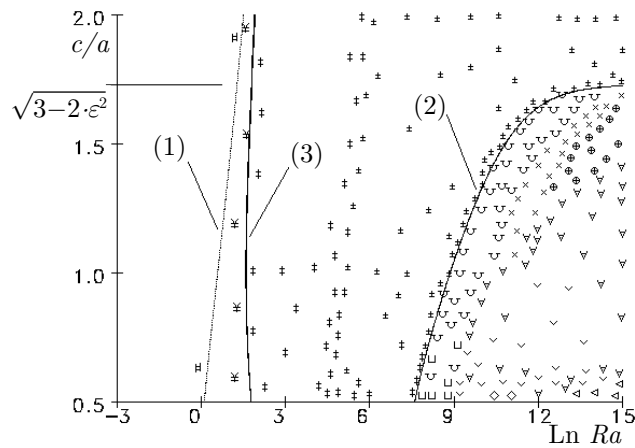


Рис. 13. Диаграмма режимов для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.8$ со сравнимыми с ω_{1s} или ω_{2s} начальными значениями $|\omega_3|$.

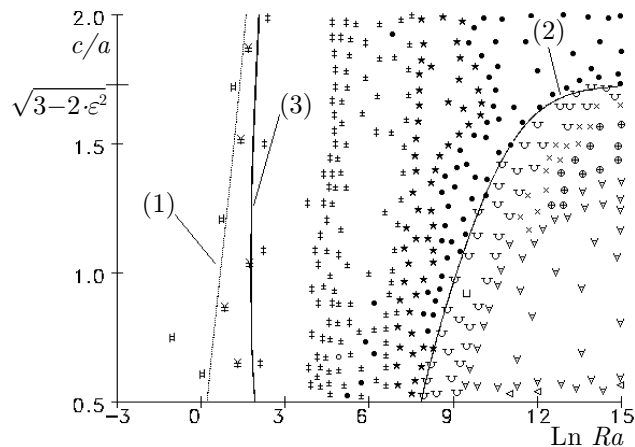


Рис. 14. Диаграмма режимов для изотропного трения при $\zeta_0 = 2.0$.

три ненулевые компоненты ω_1, q_2, q_3 . В дальнейшем он обозначается \circ . Для $c/a < 1.0$ и больших чисел Рэлея существует режим \heartsuit , показанный на рис. 16, с отличными от нуля всеми шестью компонентами ω_i, q_k , в особенности, с $\omega_3 \neq 0$. Можно также видеть из диаграммы узкую область проявления новых режимов \odot и \oslash . Для режима \odot решения от пяти начальных условий могут уйти на ω_2 -колебания или на ω_1 -колебания. Режим \oslash хаотический. Можно заметить, что при $\ln Ra < 8.0$ и $c/a < 1.5$ имеет место сильная перемежаемость режимов $\bullet, \circ, \oslash, \odot$. Лагранжевы частицы при режимах \bullet и \circ движутся и в горизонтальной плоскости (x, y) , и в вертикальных плоскостях $(x, z), (y, z)$. Координаты x (для \circ), y (для \bullet) не меняются, а в плоскостях (x, z) (для \bullet), (y, z) (для \circ) частицы движутся по дуге эллипсов с фиксированными центрами, меняя направление вращения.

Для эффективного числа Прандтля $\zeta_0 = 8.0$ были проведены расчеты ω_2 -режима и ω_1 -режима при умеренных и достаточно высоких величинах c/a . Оказалось, что при $c/a \approx 1$ эти режимы строго регулярны (рис. 17а, рис. 17б), а при $c/a \approx 2$ имеется небольшая хаотизация режимов \bullet и \circ (рис. 18а, рис. 18б).

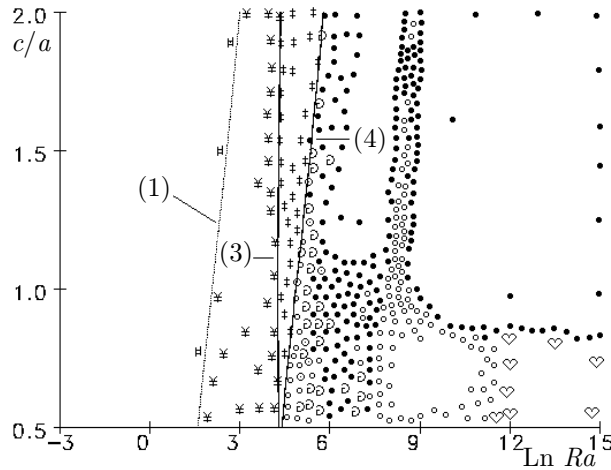


Рис. 15. Диаграмма режимов для изотропного трения при $\zeta_0 = 8.0$.

Можно показать, что ω_2 -режим описывается следующей системой:

$$\frac{d^2\omega_2}{dt^2} + \frac{d\omega_2}{dt} (\rho_1 + \rho_y) \delta + \omega_2 \left(\rho_1 \rho_y \delta^2 - \frac{q_3}{r_2} \right) = 0,$$

$$\frac{dq_3}{dt} + q_3 \rho_3 \delta + Q_z \delta + r_2 \left(\omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_2^2 \rho_y \delta \right) = 0.$$

Описание ω_1 -режима производит та же система с заменой коэффициентов r_2, ρ_1, ρ_y на соответственно r_1, ρ_2, ρ_x и неизвестной ω_2 на ω_1 . Поскольку в аксиально-симметричном эллипсоиде полуоси a и b отличаются мало, то имеем фактически одну систему для описания ω_2 - и ω_1 -режимов. Это означает, что режимы \bullet и \circ в этом случае в общем одно и то же. Выход на тот или иной режим определяется начальными данными, что очевидно из рассмотрения сложной структуры областей реализации режимов \bullet и \circ . Представляя неизвестные ω_2 (или ω_1) и q_3 в виде суммы гармонических колебаний с частотами, различающимися в два раза, можно получить решение системы, и, следовательно, найти область реализации этих конвективных движений на диаграмме режимов в координатах $(\ln Ra, c/a)$. Оказывается, это узкая полоса правее линии (4). Подробный анализ зависимостей величин ω_2 (или ω_1) и q_3 от времени, полученных численным счетом при различных значениях $\ln Ra, c/a$, говорит о сложности спектров таких режимов и невозможности их описания двучастотными колебаниями.

Таким образом, для больших эффективных чисел Прандтля (большая вязкость, малая теплопроводность) принципиальным является вращение в двух главных вертикальных плоскостях эллипсоида.

5. Приближения периодических режимов.

В фазовой плоскости (ω_1, ω_2) введем амплитудно-фазовые характеристики:

$$\omega_1 = A(t) \cos \theta(t), \quad \omega_2 = A(t) \sin \theta(t). \tag{5.1}$$



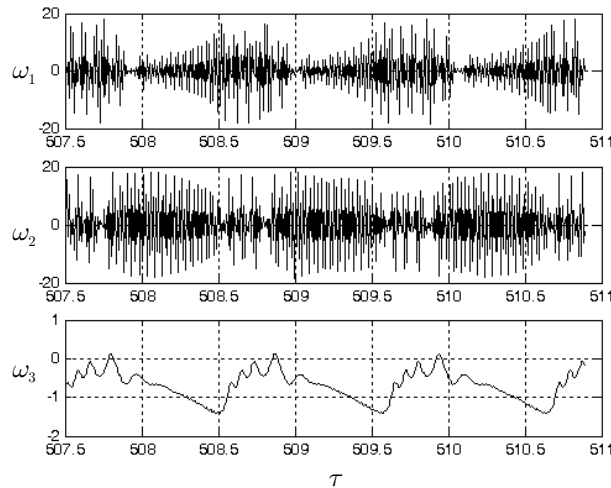


Рис. 16. Вид регулярного колебательного режима ♡ для изотропного трения при $\zeta_0 = 8.0$ с параметрами $c/a = 0.55$, $\ln Ra = 14.7$. Начальные данные вблизи (3.4) с верхними знаками

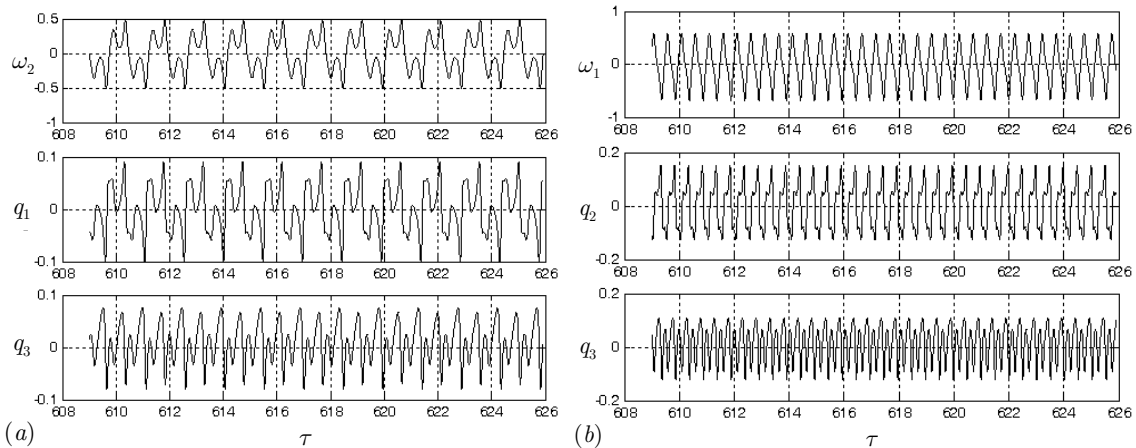


Рис. 17. Основные колебательные режимы для изотропного трения при $\zeta_0 = 8.0$: (а): вид ω_2 -колебаний (режим ●) с параметрами $c/a = 0.785$, $\ln Ra = 7.32$, начальные данные вблизи (3.5) с верхними знаками; (б): вид ω_1 -колебаний (режим ○) с параметрами $c/a = 0.785$, $\ln Ra = 8.10$, начальные данные вблизи (3.5) с нижними знаками

Угол $\theta(t)$ аналогичен азимутальному углу $\phi(t)$ работы [28]. Он определяет направление горизонтальной оси вращения жидкости в конвективном движении в эллипсоиде. Для режима II (рис. 1) в плоскости (ω_1, ω_2) этот угол совершает осцилляционные движения в ограниченном интервале, что демонстрирует рис. 19а. Для движения * (рис. 2) этот угол меняется практически от 0 до 2π (рис. 19b). Для режима V (рис. 5), где в плоскости (ω_1, ω_2) совершается круговое движение, угол $\theta(t)$ практически линейно монотонно изменяется. Заметим, что изменение угла на π соответствует обращению вращения жидкости в эллипсоиде на противоположное. Однако этот же эффект получается для режимов ω_2 или ω_1 , где вращение постоянно осуществляется в вертикальных плоскостях с изменением вращения на противоположное. Это соответствует изучаемым в [28] «осцилляциям крупномасштабного ветра».

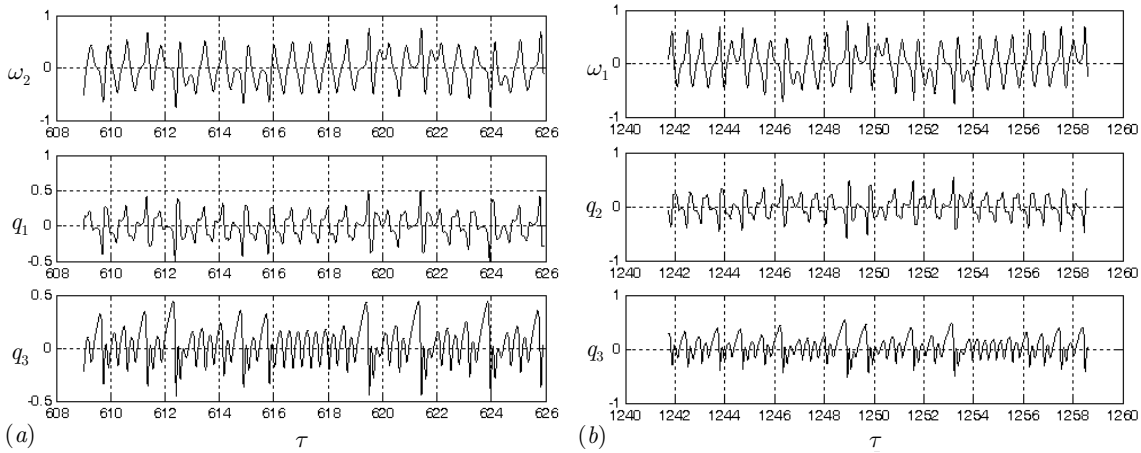


Рис. 18. Основные колебательные режимы для изотропного трения при $\zeta_0 = 8.0$: (а): вид ω_2 -колебаний (режим ●) с параметрами $c/a = 1.83, \ln Ra = 8.58$, начальные данные вблизи (3.4) с нижними знаками; (б): вид ω_1 -колебаний (режим ○) с параметрами $c/a = 1.91, \ln Ra = 8.70$, начальные данные вблизи (3.4) с верхними знаками

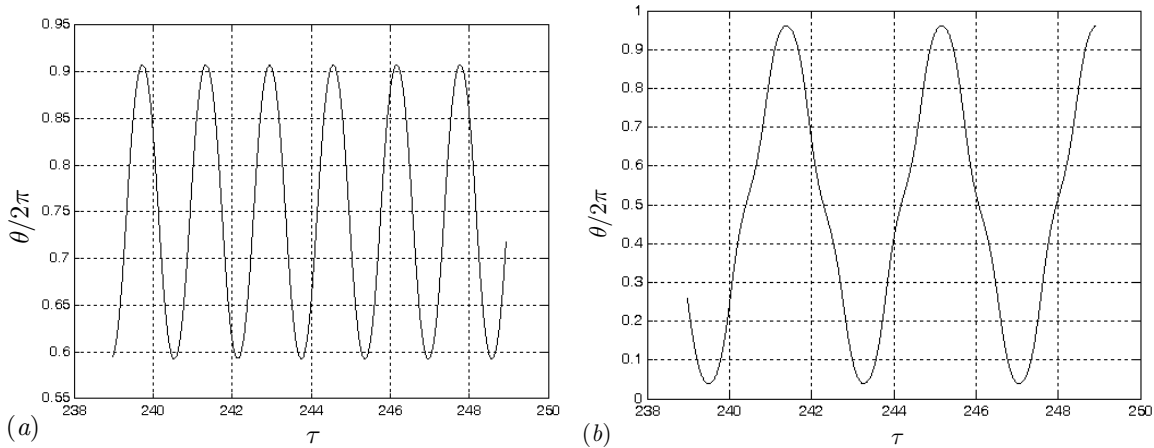


Рис. 19. Зависимости угла θ от времени τ для (а): колебаний II для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$ с параметрами $c/a = 1.54, \ln Ra = 10.26$; начальные данные вблизи (3.4) с верхними знаками; (б): колебаний * для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$ с параметрами $c/a = 1.27, \ln Ra = 10.32$; начальные данные вблизи (3.5) с нижними знаками

Рассмотрим подробнее режим V (рис. 5), для которого, как уже отмечалось, в плоскости (ω_1, ω_2) имеется достаточно равномерное вращение на окружности (3.3) в какую-либо одну сторону, а в плоскости (ω_1, ω_3) — колебательное движение по некоторой дуге (рис. 5). Такая динамика дает возможность упрощенного аналитического описания системы (2.3). Для этого представим величины $\omega_3, \frac{d\theta}{dt}$ в виде:

$$\begin{aligned} \omega_3/\delta &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\Omega_{2m} \cos(2m\theta) + \tilde{\Omega}_{2m} \sin(2m\theta) \right), \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{1}{\delta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\Phi_{2m} \cos(2m\theta) + \tilde{\Phi}_{2m} \sin(2m\theta) \right), \end{aligned} \tag{5.2}$$

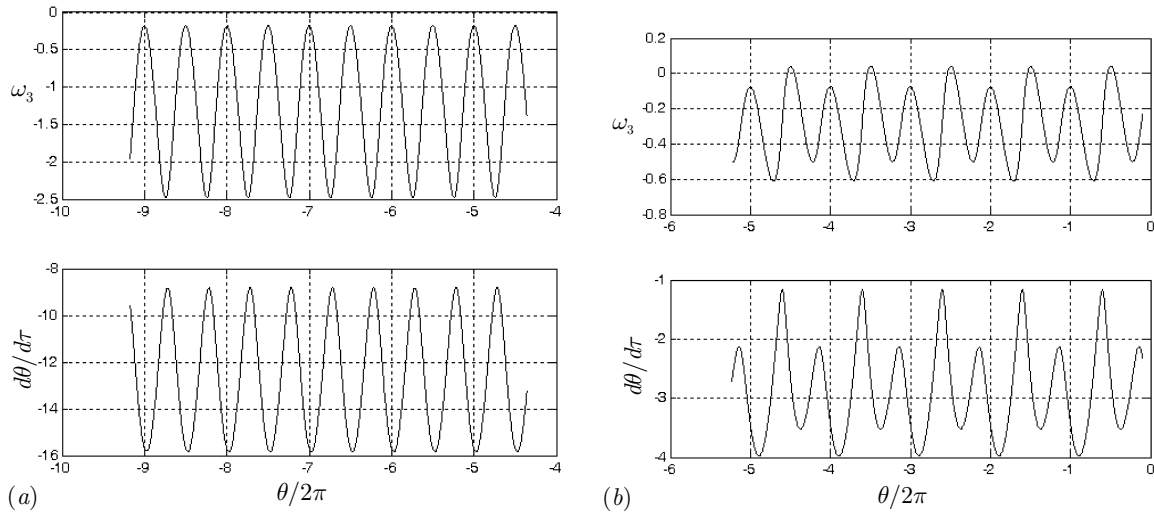


Рис. 20. Колебания ω_3 для изотропного трения: зависимости величин $\omega_3, \frac{d\theta}{dt}$ от угла θ . (a): $\zeta_0 = 1.0, c/a = 0.855, \ln Ra = 12.6$, начальные данные вблизи (3.4) с верхними знаками; (b): $\zeta_0 = 1.0, c/a = 0.885, \ln Ra = 9.66$, начальные данные вблизи (3.4) с верхними знаками.

причем, как оказалось, достаточно использовать только первые члены этих разложений (5.2), $m = 0, 1, 2$. В эти разложения (5.2) зависимость от времени входит только через θ . В справедливости этих представлений можно удостовериться, если результаты расчета системы (2.3) представить в виде зависимостей от угла θ . На рис. 20a и рис. 20b при $\zeta_0 = 1.0$ представлены зависимости $\omega_3, \frac{d\theta}{dt}$, полученные численно для некоторых точек диаграммы рис. 7. Из рис. 20a видно, что для параметров $c/a = 0.855, \ln Ra = 12.6$ (точка А диаграммы рис. 7) достаточно иметь гармоники $m = 0, 1$, а для точки В диаграммы рис. 7 (см. рис. 20b) ($c/a = 0.885, \ln Ra = 9.66$) необходимо учитывать $m = 2$.

При получении уравнения для ω_3 используем третье уравнение (2.3):

$$\frac{d\omega_3}{dt} = -\rho_z \omega_3 \delta + \frac{G_3}{2} \cdot A^2 \cdot \sin 2\theta.$$

Уравнение для θ получается при подстановке выраженных из первых двух уравнений (2.3) величин q_1, q_2 в четвертое и пятое уравнения системы (2.3) с последующим использованием равенства $a \approx b$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\rho_{12xy} \frac{d\theta}{dt} \delta - G_{12} \cdot \frac{d\omega_3}{dt} - g_{12} \omega_3 \delta,$$

где $\rho_{12xy} \equiv \rho_{12} + \rho_{xy}, g_{12} \equiv G_{12} \cdot \rho_{12} - \rho_{xy}$, а величины $G_{12}, \rho_{xy}, \rho_{12}$ определялись по формуле (3.2). При выводе этого уравнения использовался факт, что $A(t) \approx A_{00} = \text{const}$, что соответствует движению по (3.3) в фазовой плоскости (ω_1, ω_2) .

Подставляя разложения (5.2) в эти уравнения, получим решение этой системы при $m = 0, 1$:

$$\begin{aligned}
 G &\equiv 2 \cdot \left(\frac{G_3}{2} \cdot Ra \right)^2 \cdot \frac{\rho_{xy}}{\rho_z} \cdot \frac{1 + G_{12}}{r_{12}^2} \cdot \frac{G_{12} \cdot (\rho_z - \rho_{12}) + \rho_{xy}}{\rho_{12xy}} \cdot \frac{1}{\rho_{xy}^2} \gg 1; \\
 \emptyset_0 &= \pm \sqrt{\Lambda}/2, \\
 \Lambda &= \sqrt{G + (\rho_z^2 - \rho_{12xy}^2)^2/4 - (\rho_z^2 + \rho_{12xy}^2)/2} \gg 1; \\
 \emptyset_2 &= 2 \emptyset_0 \cdot (G_3 \cdot Ra/2) \cdot (f/\rho_{xy}) \cdot r_{12}^{-1} \cdot [\Lambda + \rho_z^2]^{-1} \cdot [\Lambda + \rho_{12xy}^2]^{-1}; \\
 \tilde{\emptyset}_2 &= (G_3 \cdot Ra/2) \cdot (\tilde{f}/\rho_{xy}) \cdot r_{12}^{-1} \cdot [\Lambda + \rho_z^2]^{-1} \cdot [\Lambda + \rho_{12xy}^2]^{-1}; \\
 f &= G_{12} \cdot \Lambda + \rho_{12xy} \cdot g_{12} - \frac{2a^2}{a^2 + c^2} \cdot \rho_z \cdot \rho_{xy}, \\
 \tilde{f} &= -G_{12} \cdot \Lambda \cdot (\rho_{xy} + \rho_z) - \Lambda \cdot \rho_{xy} - \rho_{12xy} \cdot \rho_z \cdot g_{12}; \\
 A_0^2 &= \frac{Ra}{r_{12} \cdot \rho_{xy}}, \quad A_{00} = A_0 \cdot \delta; \\
 \Omega_0 &= - (G_3 \cdot A_0^2/2) \cdot \rho_z^{-1} \cdot (2 \cdot \emptyset_0 \cdot \tilde{\emptyset}_2 + \rho_z \cdot \emptyset_2) \cdot [\Lambda + \rho_z^2]^{-1}; \\
 \Omega_2 &= - (G_3 \cdot A_0^2/2) \cdot 2 \cdot \emptyset_0 \cdot [\Lambda + \rho_z^2]^{-1}, \quad \tilde{\Omega}_2 = + (G_3 \cdot A_0^2/2) \cdot \rho_z \cdot [\Lambda + \rho_z^2]^{-1};
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

В дальнейшем эти формулы использовались с коэффициентами изотропного трения (2.5).

Проведем сравнение полученных аналитических формул при $m = 0, 1$ и численного расчета при $\zeta_0 = 1.0$ (диаграмма рис. 7) с $\delta \approx 0.049787$ в четырех точках (А,В,С,Д) диаграммы рис. 7. Точка В требовала для описания также $m = 2$, т. к. находится близко к режиму II. Точка С находится близко к верхней границе режимов ∇ и \boxplus . Точка Д находится близко к нижней границе режимов ∇ и \diamond . Таким образом, для точки Д имеются расхождения между теорией с $m = 0, 1$ и численными расчетами.

	Формулы (5.3), (5.4), (5.5)	Численно
А	$\ln Ra = 12.6, c/a = 0.855, A_{00} = 29.14, \eta = 11.41, T = 0.532, \emptyset_0 = -12.373, \emptyset_2 = -3.456, \tilde{\emptyset}_2 = -1.212, \Omega_0 = -24.75, \Omega_2 = 23.08, \tilde{\Omega}_2 = 0.933$	$\ln Ra = 12.6, c/a = 0.855, A_{00} = 29.05, \eta = 12.32, \emptyset_0 = -12.33, \emptyset_2 = -3.346, \tilde{\emptyset}_2 = -1.067, \Omega_0 = -26.73, \Omega_2 = 23.04, \tilde{\Omega}_2 = 1.876$
В	$\ln Ra = 9.66, c/a = 0.885, A_{00} = 6.60, \eta = 6.72, T = 2.546, \emptyset_0 = -2.675, \emptyset_2 = -0.0977, \tilde{\emptyset}_2 = -1.027, \Omega_0 = -5.35, \Omega_2 = 5.30, \tilde{\Omega}_2 = 0.99$	$\ln Ra = 9.66, c/a = 0.885, A_{00} = 6.58, \eta = 6.68, \emptyset_0 = -2.698, \emptyset_2 = -0.123, \tilde{\emptyset}_2 = -1.037, \Omega_0 = -5.75, \Omega_2 = 4.99, \tilde{\Omega}_2 = 2.13$
С	$\ln Ra = 12.36, c/a = 1.315, A_{00} = 20.59, \eta = 2.35, T = 1.067, \emptyset_0 = -7.775, \emptyset_2 = 5.047, \tilde{\emptyset}_2 = -0.526, \Omega_0 = -15.55, \Omega_2 = 18.28, \tilde{\Omega}_2 = 1.18$	$\ln Ra = 12.36, c/a = 1.315, A_{00} = 20.54, \eta = 2.22, \emptyset_0 = -7.727, \emptyset_2 = 5.162, \tilde{\emptyset}_2 = -0.496, \Omega_0 = -14.10, \Omega_2 = 18.24, \tilde{\Omega}_2 = 1.88$
Д	$\ln Ra = 10.08, c/a = 0.685, A_{00} = 8.97, \eta = 2.48, T = 2.086, \emptyset_0 = -3.898, \emptyset_2 = -2.041, \tilde{\emptyset}_2 = -1.401, \Omega_0 = -7.80, \Omega_2 = 6.84, \tilde{\Omega}_2 = 0.88$	$\ln Ra = 10.08, c/a = 0.685, A_{00} = 8.93, \eta = 4.47, \emptyset_0 = -4.635, \emptyset_2 = -1.997, \tilde{\emptyset}_2 = -0.905, \Omega_0 = -10.91, \Omega_2 = 6.09, \tilde{\Omega}_2 = 2.13$



Имеющиеся в Таблице расхождения между теоретическими и численными значениями величин $\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_2$ не влияют существенно на динамику, т. к. эти величины дают малый вклад по сравнению с компонентами Φ_0 или Φ_2, Ω_0 или Ω_2 .

Область реализации колебаний ∇ получится при условии, что величина $\frac{d\theta}{dt}$ не обращается в нуль, т. к. в плоскости (ω_1, ω_2) происходит почти равномерное вращение, т. е. $\Phi_0^2 > \sum_{m \geq 1} (\Phi_{2m}^2 + \tilde{\Phi}_{2m}^2)$. Или

$$\eta = \frac{\Phi_0^2}{\sum_{m \geq 1} (\Phi_{2m}^2 + \tilde{\Phi}_{2m}^2)} > 1.$$

Это и выделяет область режима ∇ , которая с гармониками $m = 1$ определяется отношением:

$$\eta = \frac{\Phi_0^2}{\Phi_2^2 + \tilde{\Phi}_2^2} = 2 \cdot \frac{\rho_{xy}}{\rho_z} \cdot \frac{2a^2}{a^2 + c^2} \cdot \left[1 + \frac{\rho_z^2}{\Lambda}\right] \cdot \left[1 + \frac{\rho_{12xy}^2}{\Lambda}\right] \cdot \frac{G_{12} \cdot (\rho_z - \rho_{12}) + \rho_{xy}}{\rho_{12xy}} \cdot \frac{\Lambda^2}{G} \cdot \frac{\Lambda/4}{g_{12}^2 + G_{12}^2 \cdot \Lambda} > 1, \tag{5.4}$$

$$G_{12} = G_1 = G_2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}; \rho_{xy} = \rho_x = \rho_y, \rho_{12} = \rho_1 = \rho_2 \quad (a = b).$$

Из оценок следует, что в общем величина G в (5.3) велика ($\sim Ra^2$), поэтому и $\Lambda \approx \sqrt{G}$ является достаточно большой величиной. Основную роль в (5.4) играет дробь $\frac{\Lambda/4}{(G_{12} \cdot \rho_{12} - \rho_{xy})^2 + G_{12}^2 \cdot \Lambda}$. Если $a = c$ ($G_{12} = 0$), то эта дробь ($\sim \Lambda$) велика, а с ней и величина η в (5.4) максимальна. Это выделяет область наиболее характерного ее проявления режима ∇ , т. е. «язык» конвекции (рис. 7–14).

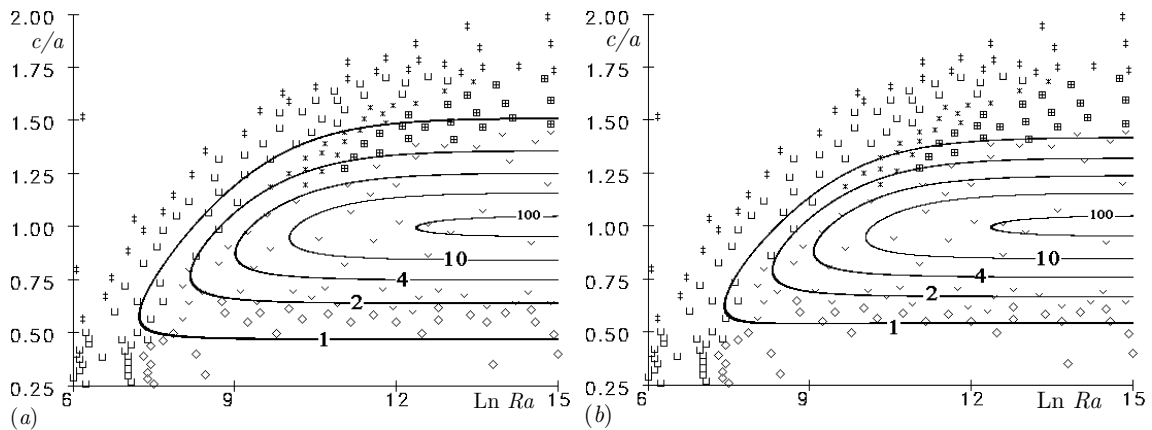


Рис. 21. Линии постоянных значений η для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$. (а): при учете гармоник $m = 1$; (б): при учете гармоник $m = 1, 2$.

На рис. 21а для случая $\zeta_0 = 1.0$ проведены линии постоянных значений η , вычисляемых согласно (5.4) (при учете гармоник $m = 1$).



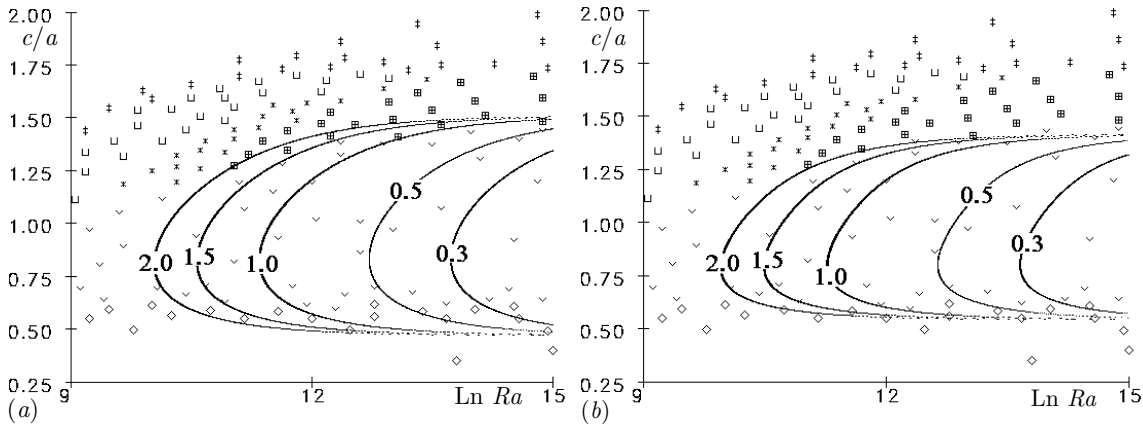


Рис. 22. Линии постоянных значений периода T движения в плоскости (ω_1, ω_2) для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$. (a): при учете гармоник $m = 0, 1$; (b): при учете гармоник $m = 0, 1, 2$.

С помощью формул (5.2) можно получить период колебаний, т.е. период вращения угла θ в плоскости (ω_1, ω_2) . Для этого необходимо проинтегрировать уравнение для θ на промежутке полного изменения угла θ (на величину 2π), т. е.

$$\tau = \int \frac{d\theta}{\Phi_0 + \sum_{m \geq 1} (\Phi_{2m} \cos(2m\theta) + \tilde{\Phi}_{2m} \sin(2m\theta))} + \text{const.}$$

Тогда для режима ∇ период колебаний в плоскости (ω_1, ω_2) равен:

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{\Lambda}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)^{-1/2}. \tag{5.5}$$

На рис. 22а для случая $\zeta_0 = 1.0$ проведены линии постоянных значений T , вычисляемых согласно (5.5) (при учете только гармоник $m = 0, 1$).

На рис. 23 показаны зависимости от времени величины $\omega_1(\tau)$, получаемой численно, для рассчитанных в Таблице случаев А,В,С,Д диаграммы рис. 7. Отсюда можно видеть периоды колебаний в плоскости (ω_1, ω_2) и сравнить эти численные значения с теоретическими, которые записаны в Таблице.

Ввиду ограниченной точности аналитического расчета при участии гармоник $m = 0, 1$, было найдено также аналитическое решение уравнений с дополнительной гармоникой $m = 2$ в (5.2). Результаты расчетов линий уровней для η and T представлены на рис. 21b, рис. 22b.

Все приведенные до сих пор диаграммы и графики были построены для изотропного трения (2.5) при различных эффективных числах Прандтля ζ_0 . Случай неизотропного трения (2.6) не сильно отличается от показанных выше результатов. На диаграмме рис. 24 показаны режимы при эффективном числе Прандтля $\zeta_2 = 1.0$ и характеристике теплопроводности $\xi = 1.0$, что соответствует общепринятому числу Прандтля $Pr = 1.0$. Здесь обозначения режимов и линий (1), (2) те же, что и на рис. 7. При этом диаграммы для неизотропного трения (2.6) выглядят в определенной мере проще, чем для изотропного (2.5). Из рис. 7 и рис. 24 видно, что при неизотропном трении (2.6) отсутствуют стационарный режим ∇ и соответствующий ему колебательный \diamond . Это объясняется тем, что кривая (3) линейной устойчивости стационарных решений (3.5), которая рассчитывалась по второму уравнению (3.7), лежит левее кривой (1), т. е. вне области

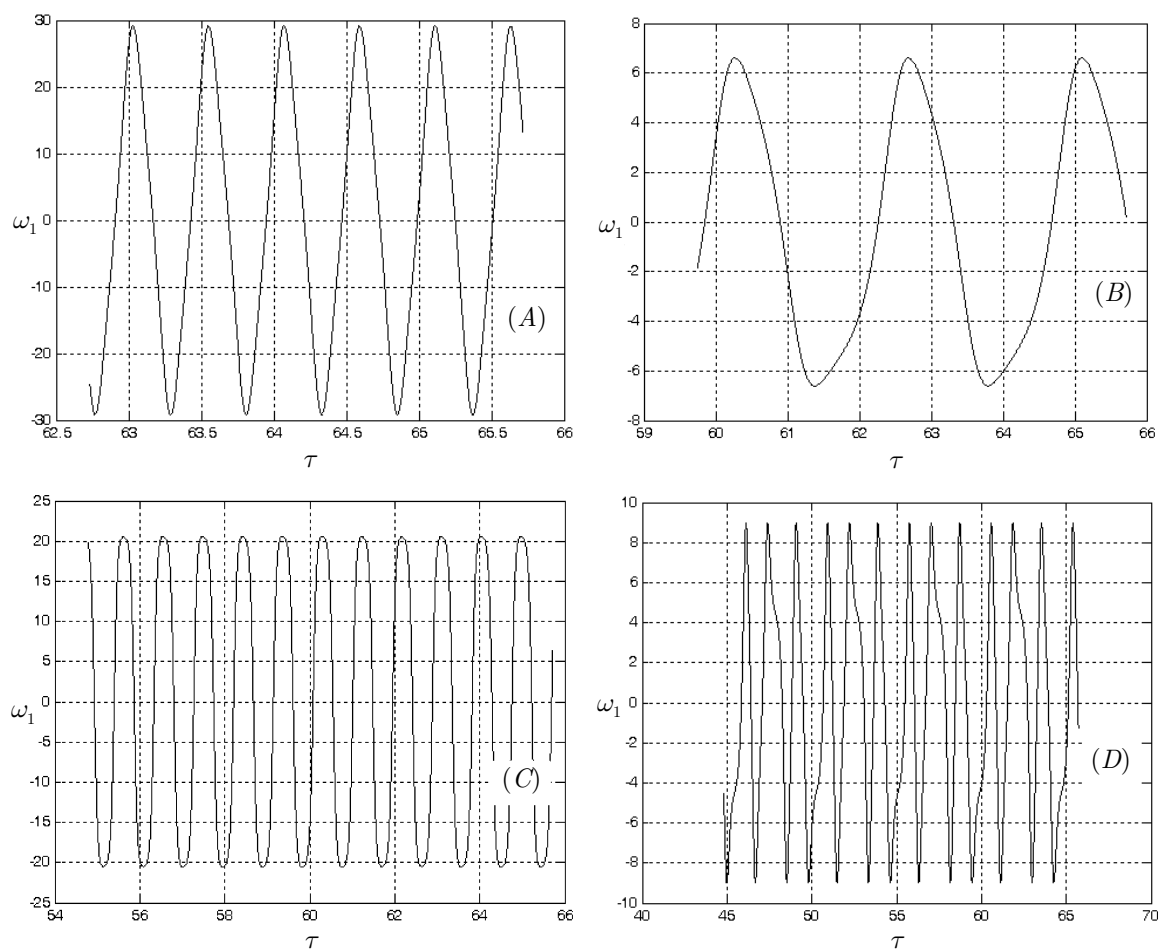


Рис. 23. Численные зависимости от времени величины $\omega_1(\tau)$ в различных точках диаграммы рис. 7 (для изотропного трения при $\zeta_0 = 1.0$).

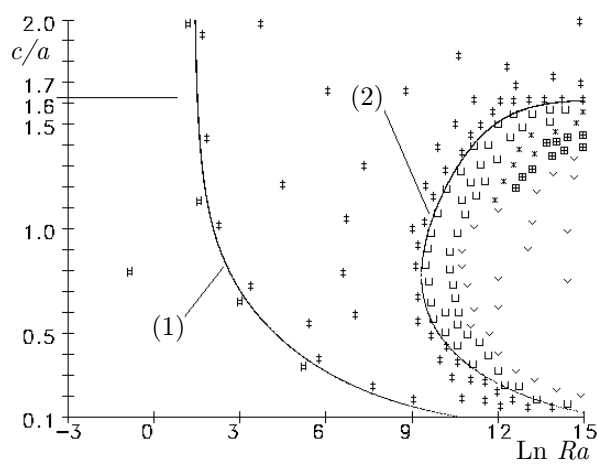


Рис. 24. Диаграмма режимов для анизотропного трения при $\zeta_2 = 1.0, \xi = 1.0$.

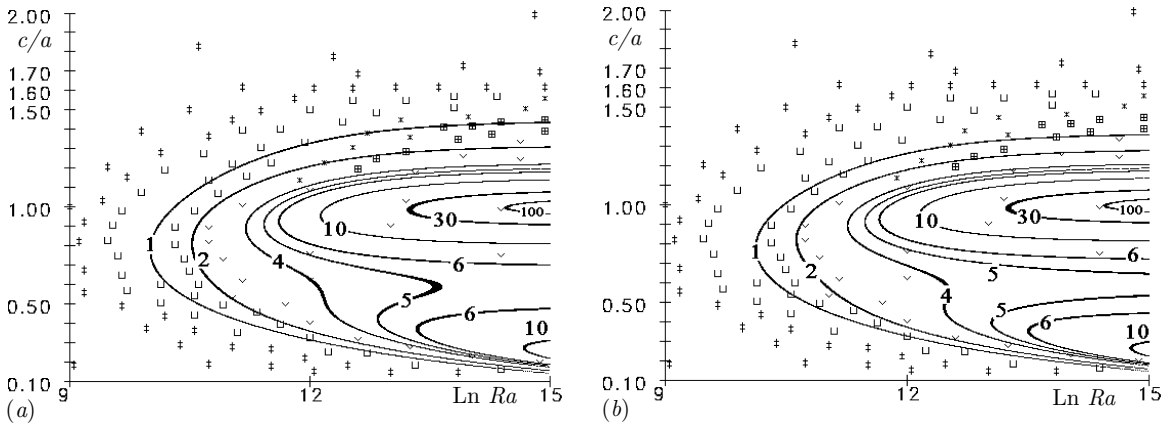


Рис. 25. Линии постоянных значений η для анизотропного трения при $\zeta_2 = 1.0, \xi = 1.0$. (a): при учете гармоник $m = 1$; (b): при учете гармоник $m = 1, 2$.

существования этих стационарных решений. Граница (2) линейной устойчивости стационарных решений (3.4), которая рассчитывалась по второму уравнению (3.6), при больших числах Рэлея теперь описывается в приближении $\varepsilon = 0$ алгебраическим уравнением $\left(\frac{c}{a}\right)^4 \cdot \left(\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2\right) = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2$. Отсюда получим его решение $c/a \approx 1.63$.

На рис. 25а и рис. 25b показаны линии постоянных значений параметра η , выделяющего колебательный режим ∇ на диаграмме, рассчитанные при $m = 1$ и $m = 1, 2$. В случае анизотропного трения (2.6) коэффициент ρ_{xy} становится большим при $c/a \rightarrow 0$, это приводит к появлению дополнительного максимума величины η при $c/a \rightarrow 0$.

6. Заключение

Основные результаты данной работы связаны с осцилляционными движениями. Стационарные решения (3.4) (\ddagger), (3.5) (¥), границы устойчивости которых на диаграммах рис. 7–14 показаны линиями (2), (3), при увеличении числа Рэлея переходят в осцилляционные движения нескольких типов. Для периодических решений типов II, * горизонтальная ось вращения (в плоскости (ω_1, ω_2)) осциллирует в ограниченном интервале изменения угла θ (см. рис. 19). При этом скорость в фиксированной горизонтальной плоскости меняет знаки. Тот же эффект получается при монотонном изменении угла θ для режима ∇ (рис. 5, рис. 20). Еще один вид осцилляционных режимов (\bullet, \circ), достаточно широкий на диаграмме на рис. 14 и основной на диаграмме рис. 15, соответствует движению в вертикальных плоскостях эллипсоида. Для него направление горизонтальной оси вращения меняет знаки, что также дает изменение направления скорости в фиксированной горизонтальной плоскости.

В заключение отметим, что рассмотренная модель описывает одначейковые (или однорольные) циркуляции. Несмотря на всю ограниченность такого описания, имеются примеры, когда такие циркуляции получались и не в малокомпонентных моделях. Так, в статье [24] исследуется численно случай цилиндрической полости с высотой вдвое больше диаметра. Авторам удалось наблюдать реализацию одначейковой циркуляции даже при достаточно больших числах Рэлея. При его дальнейшем увеличении происходит расщепление циркуляции на две части. Существует также возможность перехода между этими двумя режимами, когда нестационарности течения производились «термическими пятнами», значительно более теплыми или холодными, чем окру-

жение. Механизм тот же, что и указанный в статье [25] для полости с равновеликими высотой и диаметром. Авторы работы [24] недавно наблюдали, как при $Pr = 0.7$, $Ra = 9 \cdot 10^5$ течение, состоявшее из единственной вертикальной циркуляции, позже расщепляется на два противонаправленных рола, и затем снова появляется одноструйная циркуляция, но с противоположным направлением «ветра».

Конечно, конвекция Рэлея—Бенара предлагает огромное разнообразие картин конвекции. Так, в статье [6] для полости квадратного сечения при отношении длины к высоте $A = 1.0$ имеет место подъем от нагретой нижней стороны вдоль стенки и опускание вдоль противоположной стенки параллельно с сторонам куба (fig. 4 статьи [6]). При $A = 1.5$ наблюдается искривление линий тока, стремление следовать вдоль диагонали (fig. 5 статьи [6]). В этих случаях также реализуются одноструйные циркуляции. При дальнейшем увеличении параметра A уже появляются многоролловые структуры.

Конечно, с гидродинамической точки зрения, рассмотрения линейных по координатам полей недостаточно, а необходимо получить хотя бы оценку влияния пространственной структуры завихренности на режимы, показанные на диаграмме. Это еще желательно и потому, что важно исследовать чувствительность картин по отношению к дополнительному притоку тепла с боковых сторон полости. Вспоминая работу [13], где для малых чисел Рэлея наблюдали симметричные валики, для больших — колебания с сильными наклонами и деформацией валиков, а при дальнейшем увеличении разности температур были видны нестационарные картины вихрей, можно сказать в отношении методики малокомпонентных моделей, что описание таких сложных структур требует учета более сложных мод.

Важно отметить факт необходимости оценки роли влияния отброшенных мод на оставшиеся. Необходимо организовать диссипацию энергии от больших масштабов. Однако основная динамика не должна зависеть от точного механизма диссипации. И предлагается это сделать согласно идее Гейзенберга (см. [15]), когда эффект дальних мод на первые моды эквивалентен увеличению диссипации с коэффициентом, который невозможно определить *a priori*, т.е. необходимо сравнивать расчеты с наблюдениями. Например, введенные в §2 коэффициенты анизотропного трения для 6-модовой модели Ф. В. Должанского основывались на достаточно качественной аппроксимации структуры погранслоя, не имеющей строгого математического обоснования. А подробный расчет диаграмм при различных числах Прандтля как раз и необходим, чтобы, не зная точного значения коэффициентов для случаев изотропного и анизотропного видов трения, можно было составить общее представление о конвекции.

Рассматриваемая 6-модовая модель является простейшей бароклиной моделью, в которой проявляется эффект крупномасштабных осцилляций. Более сложные модели могут учитывать мелкомасштабную структуру течений. При этом осцилляции возникают и для баротропных течений, как это происходит в модели работ [38], [39] (см. также книгу [40]), где с учетом квадратичных по координатам полей исследовалось явление переброса из одного квазистационарного состояния в другое, которое, в частности, осуществляется и при постоянном внешнем воздействии на систему. При этом, как оказалось, при движении в фазовом пространстве вблизи неустойчивых стационарных состояний системы обнаруживается явление, сходное с затягиванием потери устойчивости (см. §4, главу 4 книги [41]).

Автор благодарит Ф. В. Должанского и В. М. Пономарева за поддержку и консультации и выражает глубокую признательность А. Thess за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-05-64588).

Список литературы

- [1] Lesieur, M., *Turbulence in Fluids*, vol. 40 of *Fluid Mechanics and its Applications*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1997.
- [2] Torrance, K.E., Orloff, L. and Rockett, J.A., Experiments on Natural Convection in Enclosures with Localized Heating from Below, *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 36, p. 21–32.
- [3] Torrance, K.E. and Rockett, J.A., Numerical Study of Natural Convection in an Enclosure with Localized Heating from Below — Creeping Flow to the Onset of Laminar Instability, *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 36, p. 33–54.
- [4] Zhang, S.Q. and Tangborn, A.V., Flow Regimes in Two-Dimensional Mixed Convection with Spatially Periodic Lower Wall Heating *Phys. Fluids*, 1994, vol. 6, pp. 3285–3293.
- [5] McBain, G.D., Convection in a Horizontally Heated Sphere, *J. Fluid Mech.*, 2001, vol. 438, pp. 1–10.
- [6] Gelfgat, A.Yu., Different Modes of Rayleigh–Bénard Instability in Two- and Three-Dimensional Rectangular Enclosures, *J. Comp. Phys.*, 1999, vol. 156, pp. 300–324.
- [7] Gelfgat, A.Yu., Bar-Yoseph, P.Z. and Yarin, A.L., Stability of Multiple Steady States of Convection in Laterally Heated Cavities, *J. Fluid Mech.*, 1999, vol. 388, pp. 315–334.
- [8] Hof, B., Lucas, B.G.J. and Mullin, T., Flow State Multiplicity in Convection, *Phys. Fluids*, 1999, vol. 11, p. 2815–2817.
- [9] Borońska, K. and Tuckerman, L.S., Standing and Travelling Waves in Cylindrical Rayleigh–Bénard Convection, *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 559, pp. 279–298.
- [10] Wanschura, M., Kuhlmann, H.C. and Rath, H.J., Three-Dimensional Instability of Axisymmetric Buoyant Convection in Cylinders Heated from Below, *J. Fluid Mech.*, 1996, vol. 326, pp. 399–415.
- [11] Puigjaner, D., Herrero, J., Giralt, F. and Simó, C., Stability Analysis of the Flow in a Cubical Cavity Heated from Below, *Phys. Fluids*, 2004, vol. 16, pp. 3639–3655.
- [12] Calzavarini, E., Doering, C.R., Gibbon, J.D., Lohse, D., Tanabe, A. and Toschi, F., Exponentially Growing Solutions in Homogeneous Rayleigh–Bénard Convection, arXiv:nlin.CD/0602040, V. 1, 18 Feb. 2006.
- [13] Hasan, N., Anwer, S.F. and Sanghi, S., Natural Convection in a Bottom Heated Horizontal Cylinder, *Phys. Fluids*, 2005, vol. 17, 064105.
- [14] Holmes, Ph., Lumley, J.L. and Berkooz, G., *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [15] Podvin, B., Le Quéré, P., Low-order Models for the Flow in a Differentially Heated Cavity, *Phys. Fluids*, 2001, vol. 13, pp. 3204–3214.
- [16] Lorenz, E.N. Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, 1963, vol. 20, pp. 130–141.
- [17] Данилов, Ю.А., *Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение*. М.: КомКнига, 2006.
- [18] Lishman, B. and Woods, A.W., The control of naturally ventilated buildings subject to wind and buoyancy, *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 557, pp. 451–471.
- [19] Andersen, K.T., Airflow Rates by Combined Natural Ventilation with Opposing Wind — Unambiguous Solutions for Practical Use, *Build. Env.*, 2007, vol. 42, pp. 534–542.
- [20] Ahmed, A.K., Feeling the Breeze on Arabian Nights, *Fluent news*, 2004, vol. 13, pp. 13.
- [21] Xi, H.–D., Lam, S. and Xia, K.–Q. From Laminar Plumes to Organized Flows: the Onset of Large-Scale Circulation in Turbulent Thermal Convection, *J. Fluid Mech.*, 2004, vol. 503, pp. 47–56.

- [22] Shishkina, O. and Wagner, C., Analysis of Thermal Dissipation Rates in Turbulent Rayleigh-Bénard Convection, *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 546, pp. 51–60.
- [23] Verzicco, R. and Camussi, R., Numerical Experiments on Strongly Turbulent Thermal Convection in a slender cylindrical cell, *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 477, pp. 19–49.
- [24] Stringano, G. and Verzicco, R., Mean Flow Structure in Thermal Convection in a Cylindrical Cell of Aspect Ratio One Half, *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 548, pp. 1–16.
- [25] Araujo, F.F., Grossmann, S. and Lohse, D., Wind Reversals in Turbulent Rayleigh-Bénard Convection, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, 084502.
- [26] Grossmann, S. and Lohse, D., Scaling in Thermal Convection: a Unifying Theory, *J. Fluid Mech.*, 2000, vol. 407, pp. 27–56.
- [27] Grossmann, S. and Lohse, D., Fluctuations in Turbulent Rayleigh-Bénard Convection: the Role of Plumes, *Phys. Fluids*, 2004, vol. 16, no 12, pp. 4462–4472.
- [28] Resagk, Ch., du Puits, R., Thess, A., Dolzhansky, F.V., Grossmann, S., Araujo, F.F. and Lohse, D., Oscillations of the Large Scale Wind in Turbulent Thermal Convection, *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, 095105.
- [29] Qiu, X.-L., Shang, X.-D., Tong, P. and Xia, K.-Q., Velocity Oscillations in Turbulent Rayleigh-Bénard Convection, *Phys. Fluids*, 2004, vol. 16, no 2, pp. 412–423.
- [30] Должанский, Ф.В., Вынужденная конвекция жидкости внутри эллипсоида, *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1973, т. 9, № 6, с. 163–172.
- [31] Должанский, Ф.В., О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов, *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 2001, т. 37, № 4, с. 446–458.
- [32] Должанский, Ф.В., О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий, *УФН*, 2005, т. 175, № 12, с. 1257–1288.
- [33] Должанский, Ф.В., Мямлина, Л.А., О влиянии бароклинного механизма нелинейного взаимодействия на устойчивость конвективных течений в поле сил Кориолиса, *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1976, т. 12, № 1, с. 3–12.
- [34] Должанский, Ф.В., О влиянии сил Кориолиса на формирование конвективного процесса внутри эллипсоида, *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1973, т. 9, № 8, с. 908–918.
- [35] Obukhov, A.M. and Dolzhansky, F.V., On Simple Models for Simulation of Nonlinear Processes in Convection and Turbulence, *Geoph. Fluid. Dyn.*, 1975, vol. 6, pp. 195–209.
- [36] Должанский, Ф.В., Пономарев, В.М., Простейшие медленные многообразия баротропных и бароклинных движений вращающейся жидкости, *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, 2002, т. 38, № 3, с. 316–330.
- [37] Гледзер, А.Е., О медленных движениях в редуцированных уравнениях стратифицированной жидкости в поле сил Кориолиса, *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, 2003, т. 39, № 6, с. 735–748.
- [38] Гледзер, Е.Б., Пономарев, В.М., О вынужденном движении жидкости внутри эллипсоида, *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1977, т. 13, № 10, с. 1003–1008.
- [39] Gledzer, E.B. and Ponomarev, V.M., Instability of Bounded Flows with Elliptical Streamlines, *J. Fluid Mech.*, 1992, vol. 240, p. 1–30.
- [40] Гледзер, Е.Б., Должанский, Ф.В., Обухов, А.М., *Системы гидродинамического типа*, М.: Наука, ГРФМЛ, 1981.
- [41] Динамические системы (Современные проблемы математики, фундаментальные направления), Т. 5 М.: ВИНТИ, 1985.