УДК 532.5

Изоморфизмы некоторых интегрируемых систем на плоскости и сфере

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mails: borisov@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Получено 7 сентября 2006 г.

В работе рассмотрены взаимосвязи, имеющиеся между различными интегрируемыми системами на n-мерной сфере S^n и в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Некоторые из этих система являются классическими интегрируемыми задачами небесной механики в плоском и искривленном пространствах. Все рассмотренные системы обладают дополнительным квадратичным по импульсам первым интегралом и могут быть явно проинтегрированы с помощью метода разделения переменных. Для анализа таких систем хорошо разработаны методы топологического и качественного анализа. Результатом работы является заключение, что некоторые интегрируемые задачи в пространствах постоянной кривизны не являются существенно новыми системами с точки зрения теории интегрирования, и для их исследования достаточно воспользоваться известными утверждениями из классической небесной механики.

Ключевые слова: интегрируемые системы, задача двух центров, изоморфизм

A. V. Borisov, I. S. Mamaev

On isomorphisms of some integrable systems on a plane and a sphere

We consider trajectory isomorphisms between various integrable systems on an n-dimensional sphere S^n and a Euclidean space $\mathbb{R}^n$. Some of the systems are classical integrable problems of Celestial Mechanics in plane and curved spaces. All the systems under consideration have an additional first integral quadratic in momentum and can be integrated analytically by using the separation of variables. We show that some integrable problems in constant curvature spaces are not essentially new from the viewpoint of the theory of integration, and they can be analyzed using known results of classical Celestial Mechanics.

Keywords: integrable systems, two-center problem, isomorphisms
Mathematical Subject Classifications: 37N05, 70F10

1. Задача двух центров на плоскости и сфере

Рассмотрим движение точки единичной массы по сфере в поле двух ньютоновских центров. Под ньютоновским центром мы понимаем, как обычно, особенность, связанную с потенциалом

$$V = \mu \operatorname{ctg} \theta, \tag{1.1}$$

где μ — гравитационная постоянная, θ — угол, отсчитываемый от особенности, которую мы считаем помещенной в один из полюсов сферы. Обоснования вида (1.1), как аналога обычного евклидова ньютонового потенциала содержится как в классических [8], так и в современных работах [9]. (Более полные ссылки см. в [2, 5].) Задача Кеплера в пространствах постоянной кривизны обсуждается, например, в [8, 9]. Она является интегрируемой и обладает избыточной алгеброй интеграла. Задача центров на сфере (и псевдосфере), являющейся аналогом хорошо известной интегрируемой задачи Эйлера является более сложной. Ее интегрируемость и разделение переменных были установлены В. Киллингом [8] и независимо в современных работах В. В. Козлова, А. О. Харина [9], В. С. Отчика [12]. Явный вид дополнительного интеграла для задачи Киллинга в трехмерном случае был приведен в [2, 4] (он обобщает интеграл Эриксона–Хилла [7] для евклидова случая). В работах А. Альбуи [20, 21] было указано, что задачи Эйлера и Киллинга являются изоморфными и приведены рассуждения, позволяющие сделать это заключение. Мы здесь несколько упростим рассуждения [20, 21] и приведем явные формулы для указанного изоморфизма. В следующих разделах мы применим преобразование Альбуи для нахождения изоморфизмов между более общими интегрируемыми системами на сферах (не обязательно двумерных) и в евклидовом пространстве. Отметим также, что все указанные ниже результаты справедливы и для пространств с постоянной отрицательной кривизной. Но для определенности мы будем рассматривать только случай S^n, $n = 2, 3, \ldots$

Без ограничения общности положим радиус двумерной сферы равным единице и определим ее в трехмерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ соотношением

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 = 1. \tag{1.2}$$

Уравнения движения можно представить в форме

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f} + \lambda \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{f} = -\nabla U, \tag{1.3}$$

где

$$U = U_{\mathrm{Re}} = \mu_+ \frac{\beta q_0 + \alpha q_1}{\sqrt{1 - (\beta q_0 + \alpha q_1)^2}} + \mu_- \frac{\beta q_0 - \alpha q_1}{\sqrt{1 - (\beta q_0 - \alpha q_1)^2}}, \tag{1.4}$$

где $(\beta, \pm\alpha, 0)$ — координаты ньютоновских центров на сфере, а $\mu_\pm$ — их интенсивности. Неопределенный множитель Лагранжа λ находится с помощью уравнения связи (1.2), получаем $\lambda = -\dfrac{(\dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}) + (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{f})}{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})}$.

Определим гномоническую проекцию сферы (1.2) на плоскость, касающуюся сферы в точке $(0, 0, 1)$, следующим соотношением:

$$\boldsymbol{q} = b\boldsymbol{Q}, \tag{1.5}$$

где скалярная функция определяется из подобия треугольников (см. рис. 1):

$$b = \frac{1}{|\boldsymbol{Q}|} = q_0. \tag{1.6}$$

Сделаем дополнительно замену времени

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{b^2}\frac{d}{d\tau}. \tag{1.7}$$

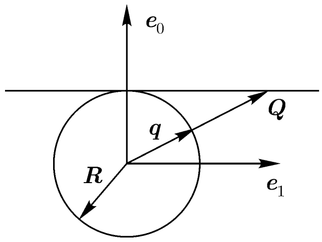

Рис. 1

Используя (1.5), (1.6), (1.7), находим

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{q_0}\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{Q}' = q_0\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{q}_0\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{Q}'' = q_0^2(q_0\ddot{\boldsymbol{q}} - \ddot{q}_0\boldsymbol{q}), \tag{1.8}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по новому времени τ.

Подставляя (1.3) в (1.8), получим

$$Q_1'' = \varkappa(Q_0f_1 - Q_1f_0), \quad Q_2'' = \varkappa(Q_0f_2 - Q_2f_0), \quad Q_0'' = 0, \quad \varkappa = \frac{Q_0^2}{|Q|^3}. \tag{1.9}$$

Используя (1.4) и ограничивая (1.9) на плоскость $Q_0 = 1$, находим

$$\begin{gathered}
Q_1'' = -\frac{\mu_+}{\beta^2}\frac{Q_1 + \frac{\alpha}{\beta}}{\left(\left(Q_1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{\beta}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{\mu_-}{\beta^2}\frac{Q_1 - \frac{\alpha}{\beta}}{\left(\left(Q_1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{\beta}\right)^2\right)^{3/2}},\\
\left(\frac{Q_2}{\beta}\right)'' = -\frac{\mu_+}{\beta^2}\frac{\frac{Q_2}{\beta}}{\left(\left(Q_1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{\beta}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{\mu_-}{\beta^2}\frac{\frac{Q_2}{\beta}}{\left(\left(Q_1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{\beta}\right)^2\right)^{3/2}}.
\end{gathered} \tag{1.10}$$

Таким образом после линейного преобразования

$$x_1 = Q_1, \quad x_2 = \frac{Q_2}{\beta}$$

получим систему, описывающую движение материальной точки на плоскости в потенциале двух гравитирующих центров:

$$\begin{gathered}
x_k'' = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2,\\
V = V_{\mathrm{Re}} = \frac{\overline{\mu}_+}{\sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2}} + \frac{\overline{\mu}_-}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2}},
\end{gathered} \tag{1.11}$$

где $\overline{\mu}_\pm = \frac{\mu_\pm}{\beta^2}$, $a = \frac{\alpha}{\beta}$.

Интегрируемость системы (1.11) была установлена Л. Эйлером (дополненное изложение его результатов имеется в лекциях К. Якоби [15]). Качественный анализ и классификация траекторий системы (1.11) впервые были выполнены К. Шарлье [14]. Уточненный анализ имеется у Депри‌ [6]. Таким образом мы (вслед за Альбуи [20, 21]) показали траекторный (в смысле того, что используется замена времени) изоморфизм интегрируемых задач Киллинга и Эйлера. Вследствие неоднозначности проекции (1.5) (переводящей две точки на сфере в одну на плоскости) этот изоморфизм определен только на половине полусферы, а все траектории, пересекающие экватор преобразуются при нем в инфинитные траектории на плоскости. Это создает определенные трудности при перенесении результатов о классификации траекторий [6, 14] с плоского случая на сферический. Без использования указанного изоморфизма сферическая (и псевдосферическая) задача двух центров была исследована в [3, 10] (соответственно в [11]).

Двумерные обобщения

На двумерной сфере к потенциалу (1.4) могут быть добавлены некоторые потенциалы, так что сохранится интегрируемость, кроме того полученная система остается разделимой в сфероконических координатах (соответствующие ссылки имеются в [2]). Рассмотрим здесь некоторые из них.

1. Две пары «мнимых» центров в перпендикулярных плоскостях:

$$U_{\mathrm{Im}}^{(1)} = \nu_+^{(1)}\frac{\beta^{-1}q_0 + i\alpha\beta^{-1}q_2}{\sqrt{1-(\beta^{-1}q_0 + i\alpha\beta^{-1}q_2)^2}} + \nu_-^{(1)}\frac{\beta^{-1}q_0 - i\alpha\beta^{-1}q_2}{\sqrt{1-(\beta^{-1}q_0 - i\alpha\beta^{-1}q_2)^2}},$$

$$U_{\mathrm{Im}}^{(2)} = \nu_+^{(2)}\frac{\alpha^{-1}q_1 + i\beta\alpha^{-1}q_2}{\sqrt{1-(\alpha^{-1}q_1 + i\beta\alpha^{-1}q_2)^2}} + \nu_-^{(2)}\frac{\alpha^{-1}q_0 - i\beta\alpha^{-1}q_2}{\sqrt{1-(\alpha^{-1}q_1 - i\beta\alpha^{-1}q_2)^2}}.$$

Если положить, что $\nu_-^{(1,2)} = \overline{\nu}_+^{(1,2)}$, где черта означает комплексное сопряжение, то функции $U_{\mathrm{Im}}^{(1,2)}$ — очевидно, вещественные, так как представляют собой сумму комплексно-сопряженных величин. После преобразований описанных выше находим соответствующие потенциалы на плоскости:

$$V_{\mathrm{Im}}^{(1)} = \frac{\nu_+^{(1)}}{\beta}\big(x_1^2 + (x_2+ia)^2\big)^{-1/2} + \frac{\nu_-^{(1)}}{\beta}\big(x_1^2 + (x_2-ia)^2\big)^{-1/2},$$

$$V_{\mathrm{Im}}^{(2)} = \frac{\nu_+^{(2)}}{\beta}\frac{x_1+ix_2}{\sqrt{a^2-(x_1+ix_2)^2}} + \frac{\nu_-^{(2)}}{\beta}\frac{x_1-ix_2}{\sqrt{a^2-(x_1-ix_2)^2}},$$

где $a = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

2. Полиномиальные и рациональные потенциалы могут быть получены при помощи производящей функции:

$$\Phi_z(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{A(z)F_z(\boldsymbol{q})},$$
$$F_z(\boldsymbol{q}) = \frac{q_0^2}{z} + \frac{q_1^2}{z-1} + \frac{q_2^2}{z-\beta^2}, \quad A(z) = z(z-\beta^2)(z-1). \tag{1.12}$$

Как показано в [18], объединение системы коэффициентов разложения этой функции в особых и регулярных точках $z = z_0 \in \mathbb{C}$ задает базис в пространстве полиномиальных и рациональных потенциалов, разделяющихся в сфероконических координатах. Частные случаи этих потенциалов указаны в работах [1, 13].

Напомним, что сфероконические координаты могут быть определены как корни уравнения $F_z(\boldsymbol{q}) = 0$, т. е.

$$F_z(\boldsymbol{q}) = \frac{(z-u)(z-v)}{A(z)}, \tag{1.13}$$

где $0 < u < \beta^2$, $\beta^2 < v < 1$ и есть сфероконические координаты.

Подставляя в качестве потенциала производящую функцию (1.12) и выполняя описанные выше преобразования получим систему на плоскости с потенциалом

$$\varphi_z(\boldsymbol{q}) = \frac{A^{-1}(z)}{\frac{z}{z-1}x_1^2 + \frac{z}{z(1+a^2)-1}x_2^2 + 1}, \quad a = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{1.14}$$

После замены параметра $z = \dfrac{1}{1+a^2-\xi}$ получим производящую функцию на плоскости в форме

$$\begin{gathered}\varphi_\xi(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{\widetilde{A}(\xi) f_\xi(\boldsymbol{q})},\\ f_\xi(\boldsymbol{q}) = \frac{x_1^2}{\xi - a^2} + \frac{x_2^2}{\xi} + 1, \quad \widetilde{A}(\xi) = \frac{\xi(\xi - a^2)}{(1+a^2)(\xi - 1 - a^2)^2},\end{gathered} \tag{1.15}$$

где $a = \dfrac{\alpha}{\beta}$. То есть получили производящую функцию полиномиальных и рациональных потенциалов на плоскости разделяющихся в сфероконических координатах. Таким образом, *интегрируемая система, описывающая динамику точки на полусфере в потенциале* $U_{\mathrm{Re}} + U_{\mathrm{Im}} + \Phi_z$, *траекторно эквивалентна системе на плоскости в потенциале* $V_{\mathrm{Re}} + V_{\mathrm{Im}} + \varphi_z$.

Рассмотрим некоторые частные случаи потенциалов на сфере и плоскости.

Потенциалы гуковских центров на сфере:

$$\begin{aligned} U_0 &= \operatorname{Rez} \frac{1}{z}\Phi_z\Big|_{z=0} = \frac{1}{\beta^2 q_0^2},\\ U_1 &= \operatorname{Rez} \frac{1}{z-1}\Phi_z\Big|_{z=1} = \frac{1}{\alpha^2 q_1^2},\\ U_2 &= \operatorname{Rez} \frac{1}{z-\beta^2}\Phi_z\Big|_{z=\beta^2} = -\frac{1}{\alpha^2\beta^2 q_2^2},\end{aligned}$$

им траекторно изоморфны соответственно:

$$\begin{aligned} V_0 &= \operatorname{Rez} \frac{1}{z}\varphi_z\Big|_{z=0} = \mathrm{const} + \frac{1}{\beta^2}(x_1^2 + x_2^2),\\ V_1 &= \operatorname{Rez} \frac{1}{z-1}\varphi_z\Big|_{z=1} = \frac{1}{\alpha^2 x_1^2},\\ V_2 &= \operatorname{Rez} \frac{1}{z-\beta^2}\varphi_z\Big|_{z=\beta^2} = -\frac{1}{\alpha^2\beta^6 x_2^2}.\end{aligned}$$

Потенциал U_0 (как и приведенные потенциалы U_1, U_2) в качестве дополнительного слагаемого, не влияющего на интегрируемость был впервые указан в [9]. Эти потенциалы можно трактовать как аналоги гуковских потенциалов на плоскости [9]. Добавление гуковского потенциала V_0 в плоскую задачу двух центров было указано Ж. Лагранжем. Известен также интегрируемый квадратичный потенциал на сфере (или потенциал Неймана [17]):

$$U_N = \operatorname{Rez} z^2\Phi_z\Big|_{z=\infty} = -\big(\beta^2 q_1^2 + q_2^2 + (1+\beta^2) q_0^2\big),$$

ему соответствует рациональный потенциал на плоскости вида

$$V_N = \operatorname{Rez} z^2\varphi_z\Big|_{z=\infty} = -\frac{1}{1 + x_1^2 + (1+a^2)^{-1} x_2^2}.$$

Можно показать, что более общие системы, отмеченные Лиувиллем [22], также допускают обобщения на сферу с помощью рассматриваемых преобразований.

3. Рассмотрим теперь в общем виде систему на сфере S^2 в сфероконических координатах. Лагранжиан этой системы можно представить в виде:

$$\mathscr{L} = \frac{u-v}{8}\big(-A(u)\dot{u}^2 + A(v)\dot{v}^2\big) - \frac{W(u,\, v)}{u-v}, \tag{1.16}$$

где, как и выше $A(z) = z(z-\beta^2)(z-1)$. В уравнениях движения сделаем замену времени $dt = q_0^2\, d\tau = \frac{uv}{\beta^2}\, d\tau$ и перейдем к переменным

$$\xi = \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{u}, \quad \eta = \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{v}.$$

Можно показать, что уравнения движения в этом случае можно представить в форме

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \xi'}\right)' - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \xi} = (1+a^2)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{(1+a^2-\xi)W}{\xi-\eta}\right), \\
\left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \eta'}\right)' - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \eta} = (1+a^2)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{(1+a^2-\eta)W}{\xi-\eta}\right), \\
\widetilde{T} = \frac{\xi-\eta}{8}\left(\frac{(\xi')^2}{\xi(a^2-\xi)} - \frac{(\eta')}{\eta(a^2-\eta)}\right),
\end{gathered} \tag{1.17}$$

где $a = \frac{\alpha}{\beta}$, штрих означает производную по τ. Условие потенциальности правой части этих уравнений имеет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0.$$

Следовательно, в этом случае $W = U(u) + V(v) = \widetilde{U}(\xi) + \widetilde{V}(\eta)$, а уравнения (1.17) также представляются в лагранжевой форме, с лагранжианом

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \widetilde{T} - \frac{1+a^2}{\xi-\eta}\big((1+a^2-\xi)\widetilde{U}(\xi) + (1+a^2-\eta)\widetilde{V}(\eta)\big).$$

При этом несложно показать, что $\widetilde{T}$ соответствует кинетической энергии частицы на плоскости, записанной в эллиптических координатах ξ, η, определяемых уравнением

$$\frac{x_1^2}{\zeta-a^2} + \frac{x_2^2}{\zeta} + 1 = \frac{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}{\zeta(\zeta-a^2)},$$

где x_1, x_2 — декартовы координаты.

Таким образом динамика материальной точки на сфере с потенциалом, разделяющимся в сфероконических координатах, траекторно изоморфна динамике точки на плоскости, с потенциалом, разделяющимся в эллиптических координатах.

Замечание. Отметим, что недавно общая параметризация таких систем, использующая ряды для гипергеометрической функции Аппеля была предложена в работе [19].

Обобщения на случай $\mathbb{R}^3$ и S^3

Предыдущий изоморфизм естественным образом обобщается на пространственную задачу, т. е. задачу двух центров в S^3 и $\mathbb{R}^3$. Пространственная задача двух центров в $\mathbb{R}^3$ обсуждается еще у Якоби [15]. Для S^3 интегрируемость задачи двух центров также была отмечена В. Киллингом [8]. Действительно, если на трехмерной сфере, вложенной в $\mathbb{R}^3$

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1,$$

поместить ньютоновские центры в точки $(\beta, \pm\alpha, 0, 0)$, то потенциальная энергия по-прежнему определяется соотношением (1.4), и все соотношения (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) остаются справедливыми, если теперь считать, что $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{q}$ — четырехмерные векторы. Соответственно уравнения (1.9) в данном случае принимают вид:

$$Q_0'' = 0, \quad Q_i'' = k(Q_0 f_i - Q_i f_0), \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя эти уравнения и (1.4), можно показать, что после линейного преобразования

$$x_1 = Q_1, \quad x_2 = \frac{Q_2}{\beta}, \quad x_3 = \frac{Q_3}{\beta}$$

получим обычную натуральную систему

$$x_i'' = -\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

с потенциалом задачи двух центров в $\mathbb{R}^3$:

$$\widetilde{V} = \frac{\overline{\mu}_+}{\sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2 + x_3^2}} + \frac{\overline{\mu}_-}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

где, как и выше, $a = \frac{\alpha}{\beta}$. Таким образом, *задача о движении точки в поле двух ньютоновских центров на трехмерной (полу)сфере S^3 траекторно эквивалентна задаче двух центров в трехмерном евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^3$.

Этот результат естественным образом обобщается на случай линейной комбинации потенциалов U_{Re}, U_{Im} и Φ_z, но при этом получается неинтегрируемая система как на сфере, так и на плоскости.

Авторы искренне благодарят А. Альбуи за многочисленные полезные обсуждения и комментарии, а также Институт небесной механики в Париже за теплый прием и возможность плодотворно работать по обсуждаемой в статье тематике.

Исследования выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 04-0564367, 05-01-01058), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-1312.2006.1), INTAS (грант 04-80-7297).

Работа проведена при поддержке Института математики и механики УрО РАН и в рамках ЕНО «Регулярная и хаотическая гидродинамика».

Список литературы

[1] Богоявленский, О.И., Интегрируемые случаи динамики твердого тела и интегрируемые системы на сферах S^n, *Изв. АН СССР, сер. мат.,*1985, т. 49, № 5, с. 899–915.

[2] Borisov, A. V. and Mamaev, I.S., Generalized Problem of Two and Four Newtonian Centers, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.,* 2005, vol. 92, pp. 371–380.

[3] Возмищева, Т.Г., Ошемков, А.А,. Топологический анализ задачи двух центров на двухмерной сфере,*Мат. сборник,* 2002, т. 193, № 8, с. 3–38.

[4] Мамаев, И.С., Две интегрируемые системы на двумерной сфере, *Доклады РАН,* 2003, т. 389, № 3, с. 338–340.

[5] Borisov, A.V. and Mamaev, I.S., Generalized Problem of Two and Four Newtonian Centers, (accepted for publication in Celestial Mech. Dynam. Astronom.)

[6] Deprit, A., Le probléme des deux centers fixes, *Bull. Soc. Math. Belg.,* 1962, vol. 14, pp. 12–45.

[7] Erikson, H.A. and Hill, E.L., A Note on the One–Electron States of Diatomic Molecules, *Phys. Rev. L.,* 1949, vol. 75, pp. 29–31.

[8] Killing, W. *Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen*, *J. Reine Angew. Math,* 1885, vol. 98, pp. 1–48. Русск. перев.: в кн. Борисов А. В., Мамаев И. С. (ред.) *Классическая динамика в неевклидовых пространствах*. Москва-Ижевск: ИКИ, 2004.

[9] Kozlov, V.V. and Harin, A.O., Kepler's Problem in Constant Curvature Spaces, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.,* 1992, vol. 54, pp. 393–399.

[10] Vozmischeva, T.G., Classification of Motions for Generalization of the Two-Centers Problem on a Sphere, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.,* 2000, vol. 77, pp. 37–48.

[11] Vozmischeva, T.G., The Lagrange and two-center problems in the Lobachevsky space, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.,* 2002, vol. 84, pp. 65–85.

[12] Отчик, В.С., Симметрия и разделение переменных в задаче двух кулоновских центров в трехмерных пространствах постоянной кривизны, *Доклады АН БССР,* 1991, т. 35, № 5, с. 420–424.

[13] Wojciechowski, S., Integrable one–particle Potentials Related to the Neumann System and the Jacobi Problem of Geodesic Motion on an Ellipsoid, *Phys. Lett. A,* 1985, vol. 107, pp. 106–111.

[14] Шарлье К. *Небесная механика*. М.: Наука, 1996. Пер. с нем.: Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels. Walter de Gruyter & Co, 1927.

[15] Якоби К. *Лекции по динамике*. М.–Л., 1936. Пер. с нем.: Jacobi C. G. J. *Vorlesungen über Dynamik*. Berlin, G. Reimer, 1884.

[16] Козлов, И.С., Задача четырех неподвижных центров и ее приложения к теории движения небесных тел, *Астрон. ж.,* 1974, т. 51, вып. 1, с. 191–198.

[17] Neumann, J., De problemate quado mechanico, quad ad priman integralium ultraellipticorum classem revocatur, *J. Reine Angew. Math.,* 1859, vol. 56, pp. 46–63.

[18] Садетов, С.Т., Серии рациональных потенциалов, разделяющихся в эллиптических координатах. *Докл. РАН,* 2006, т. 411, № 3, с. 309–313.

[19] Dragović, V., Separability in Hamilton–Jacobi Sense in Two Degrees of Freedom and the Appell Hypergeometric Functions, *J. Nonlinear Math. Phys.,* 2005, vol. 2, pp. 170–177.

[20] Albouy, A., *The underlying geometry of the fixed centers problem*, in *Topological Methods, Variational Methods and their applications*, ed. by H. Brezis, K. C. Chang, S. J. Li, P. Rabinowitz, W. S. 2003, p. 11–21.

[21] Albouy, A. and Stuchi, I., Generalizing the Classical Fixed–Centers Problem in a non–Hamiltonian Way, *J. Phys. A,* 2004, vol. 37, pp. 9109–9123.

[22] Liouville, J., Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer, *Math. Pure Appl.,* 1846, vol. 11, Sér. I, pp. 345–378.