УДК 514.763.337

Об одном частном интеграле, который можно извлечь из матрицы Пуассона

Д. Б. Зотьев
Волжский филиал Московского энергетического института (ВФ МЭИ (ТУ))
Кафедра промышленной теплоэнергетики
404110, г. Волжский, ул. Ленина 69
E-mail: zotev@inbox.ru

Получено 23 марта 2007 г.

Пусть поверхность, которая инвариантна относительно некоторой гамильтоновой системы, задана как совместный уровень некоторых функций. Существует ли частный интеграл, который можно явно получить из матрицы Пуассона этих функций ? Иногда он равен ее определителю. В представленной статье найдено необходимое и достаточное условие такого события. Возникающий при этом частный интеграл нетривиален, если и только если индуцированная пуассонова структура невырождена хотя бы в одной точке. Поэтому инвариантная поверхность должна быть четномерной.

Ключевые слова: гамильтонова система, частный интеграл, инвариантное подмногообразие.

D. B. Zotev

A criterion for a Poisson matrix determinant to be a partial integral of the Hamiltonian system

Consider a Hamiltonian system, restricted onto an invariant surface. Does it have an integral, which may be explicitly expressed through the equations, determining this submanifold? A simple criterion of the existence of partial integral, equal to their Poisson matrix determinant, has been found. This integral is not trivial iff the induced Poisson structure is nondegenerate at least at one point. Particularly, the submanifold is to be even-dimensional.

Keywords: Hamiltonian system, partial integral, invariant submanifold.
Mathematical Subject Classifications: 37J15, 37K05

Введение

Рассмотрим симплектическое многообразие (N, ω) и гладкую функцию H на N. Однозначно определенное векторное поле $\operatorname{sgrad} H$, где

$$\omega(X, \operatorname{sgrad} H) = dH(X) \qquad \forall X \in \mathcal{X}(N),$$

задает гамильтонову систему [2,5]. Скобка Пуассона определена равенством

$$\{f, H\} = -df(\operatorname{sgrad} H) = dH(\operatorname{sgrad} f).$$

Определение 1. *Если $\{f, H\}(x) = 0$ для всех $x \in M$, т.е. $f|_M$ является первым интегралом $(\operatorname{sgrad} H)|_M$, то функция f называется частным интегралом $\operatorname{sgrad} H$ на M.*

Для некоторых независимых гладких функций $f_j : N \to \mathbf{R}$ рассмотрим регулярное подмногообразие

$$M = \Big\{x \in N \mid f_1(x) = \ldots = f_{2n}(x) = 0\Big\}, \tag{1}$$

которое инвариантно относительно $\operatorname{sgrad} H$, т.е. $\operatorname{sgrad} H(x) \in T_x M$ для всех $x \in M$. Следующее предложение является хорошо известным фактом [5].

Предложение 1. *Поверхность M инвариантна относительно $\operatorname{sgrad} H$, если и только если*

$$\{H, f_j\} = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{j,k} f_k \qquad (1 \leqslant j \leqslant 2n) \tag{2}$$

для некоторых гладких функций $\alpha_{j,k}$, которые определены в окрестности M.

Почти все известные интегрируемые гамильтоновы системы заданы на кокасательных расслоениях или на орбитах коприсоединенного действия. Возможно, что в будущем станут более актуальными системы на инвариантных подмногообразиях. По-видимому, первый содержательный пример такой задачи был описан в [1], а ее фазовая топология была исследована в [3]. Эта система задана на

$$M = \Big\{x \in N \mid f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0\Big\}, \tag{3}$$

где N является регулярной 6-орбитой коприсоединенного действия, и она описывает волчок Ковалевской в двух силовых полях. Ее фазовое многообразие M является поверхностью нулевого уровня общего интеграла вида $f_1^2 + f_2^2$. Последний представляет собой такое обобщение интеграла Ковалевской, что M соответствует 1 классу Аппельрота классической задачи. Другие 4-мерные инвариантные подмногообразия вида (3), которые аналогичны 2, 3 и 4 классам Аппельрота, были недавно найдены в [4]. В вышеуказанных случаях возникают частные интегралы вида $\{f_1, f_2\}$, и довольно часто они наблюдались в других задачах. Легко проверить, что при $\{H, f_1\} = \varphi f_2$ и $\{H, f_2\} = \psi f_1$ функция $\{f_1, f_2\}$ является частным интегралом $\operatorname{sgrad} H$ на (3). Другое хорошо известное условие суть следующее: $\{H, f_1\} = g f_1$ и $\{H, f_2\} = -g f_2$. В обоих случаях имеем

$$\operatorname{trace}(\alpha)(x) = \alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} = 0 \qquad \forall x \in M,$$

где матрица α определяется посредством (2) и $n = 1$. Оказывается, что верно обратное: если $n = 1$, то при этом условии всегда существует частный интеграл вида $\{f_1, f_2\}$. В представленной статье это (впервые сформулированное) утверждение обобщается на случай произвольного $n \geqslant 1$.

Главный результат

Лемма 1. *Пусть* $1 \leqslant i, j \leqslant 2n$ *и* $Pf(\mathcal{P})$ *есть пфаффиан матрицы Пуассона* $\mathcal{P} = \Big(\{f_i, f_j\}\Big)$, *где функции* f_i *заданы на* N (1). *Тогда* $\forall x \in M$

$$\{Pf(\mathcal{P}), H\}(x) = -\operatorname{trace}\big(\alpha_{i,j}\big)(x) \cdot Pf(\mathcal{P})(x).$$

Доказательство. Если $\Big(\omega_{i,j}\Big)$ есть кососимметрическая $2n \times 2n$-матрица, то многочлен $Pf(\omega) \in \mathbf{Z}[\omega_{1,2}, \ldots, \omega_{i,j}, \ldots, \omega_{2n-1,2n}]$, удовлетворяющий $\big(Pf(\omega)\big)^2 = \det\big(\omega\big)$, называется пфаффианом матрицы $\Big(\omega_{i,j}\Big)$. Возьмем множество S_{2n} всех перестановок набора $(1, \ldots, 2n)$ и выберем подмножество

$$\widetilde{S}_{2n} = \Big\{(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n) \in S_{2n} \mid \quad \forall t \quad i_t < j_t,\ i_t < i_{t+1}\Big\}.$$

Легко проверить, что

$$Pf(\omega) = \sum_{\sigma=(i_1,j_1,\ldots,i_n,j_n)\in\widetilde{S}_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \omega_{i_1,j_1} \cdot \ldots \cdot \omega_{i_n,j_n},$$

где $\operatorname{sgn}(\sigma) = |\sigma|$ — знак перестановки. Следовательно

$$Pf(\mathcal{P}) = \sum_{\sigma\in\widetilde{S}_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \{f_{i_1}, f_{j_1}\} \cdot \ldots \cdot \{f_{i_n}, f_{j_n}\}.$$

Используя тождество Якоби $\{\{f_i, f_j\}, H\} = \{\{H, f_j\}, f_i\} - \{\{H, f_i\}, f_j\}$ получаем следующее выражение для $\{Pf(\mathcal{P}), H\}$ в любой точке $x \in M$:

$$\sum_{\sigma\in\widetilde{S}_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\begin{array}{c} \sum_{s=1}^{2n} \alpha_{j_1,s}\{f_s, f_{i_1}\}\{f_{i_2}, f_{j_2}\}\ldots\{f_{i_n}, f_{j_n}\} \\ -\sum_{s=1}^{2n} \alpha_{i_1,s}\{f_s, f_{j_1}\}\{f_{i_2}, f_{j_2}\}\ldots\{f_{i_n}, f_{j_n}\} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ +\sum_{s=1}^{2n} \alpha_{j_n,s}\{f_s, f_{i_n}\}\{f_{i_1}, f_{j_1}\}\ldots\{f_{i_{n-1}}, f_{j_{n-1}}\} \\ -\sum_{s=1}^{2n} \alpha_{i_n,s}\{f_s, f_{j_n}\}\{f_{i_1}, f_{j_1}\}\ldots\{f_{i_{n-1}}, f_{j_{n-1}}\}. \end{array} \right) \tag{4}$$

Из суммы (4) возьмем ненулевое слагаемое вида

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{j_p,s}\{f_s, f_{i_p}\}\{f_{i_1}, f_{j_1}\}\ldots\{f_{i_{p-1}}, f_{j_{p-1}}\}\{f_{i_{p+1}}, f_{j_{p+1}}\}\ldots\{f_{i_n}, f_{j_n}\}. \tag{5}$$

Очевидно, что $s = i_q$ или $s = j_q$. Если $s = i_q$ и

$$\sigma = (i_1, j_1, \ldots, i_p, j_p, \ldots, i_q, j_q, \ldots, i_n, j_n)$$

то рассмотрим следующие перестановки:

$$\begin{array}{ll} \sigma' = (i_1, j_1, \ldots, i_p, i_q, \ldots, j_q, j_p, \ldots, i_n, j_n) & \text{если} \quad j_q < j_p, \\ \sigma' = (i_1, j_1, \ldots, i_p, i_q, \ldots, j_p, j_q, \ldots, i_n, j_n) & \text{если} \quad j_q > j_p \end{array}$$

(взятые из $\widetilde{S}_{2n}$). Выберем из (4) следующее слагаемое

$$\operatorname{sgn}(\sigma')\alpha_{j_p,s}\{f_s, f_{j_q}\}\{f_{i_1}, f_{j_1}\}\ldots\{f_{i_p}, f_{i_q=s}\}\ldots\{f_{i_n}, f_{j_n}\}$$

или, соответственно,

$$-\operatorname{sgn}(\sigma')\alpha_{j_p,s}\{f_s, f_{j_q}\}\{f_{i_1}, f_{j_1}\}\ldots\{f_{i_p}, f_{i_q=s}\}\ldots\{f_{i_n}, f_{j_n}\},$$

которое отличается от (5) только знаком. Если $s = j_q$ и

$$\sigma = (i_1, j_1, \ldots, i_p, j_p, \ldots, i_q, j_q, \ldots, i_n, j_n),$$

то рассмотрим следующие перестановки:

$$\sigma' = (i_1, j_1, \ldots, i_p, j_q, \ldots, i_q, j_p, \ldots, i_n, j_n) \quad \text{если} \quad i_q < j_p,$$
$$\sigma' = (i_1, j_1, \ldots, i_p, j_q, \ldots, j_p, i_q, \ldots, i_n, j_n) \quad \text{если} \quad i_q > j_p$$

(взятые из $\widetilde{S}_{2n}$). Выберем из (4) следующее слагаемое

$$\operatorname{sgn}(\sigma')\alpha_{j_p,s}\{f_s, f_{i_q}\}\{f_{i_1}, f_{j_1}\}\ldots\{f_{i_p}, f_{j_q=s}\}\ldots\{f_{i_n}, f_{j_n}\},$$
или, соответственно,
$$-\operatorname{sgn}(\sigma')\alpha_{j_p,s}\{f_s, f_{i_q}\}\{f_{i_1}, f_{j_1}\}\ldots\{f_{i_p}, f_{j_q=s}\}\ldots\{f_{i_n}, f_{j_n}\},$$

которое отличается от (5) только знаком.

Опуская аналогичные рассуждения можно заключить следующее. Предположим, что некоторое слагаемое суммы (4) отлично от нуля и соответствующий ему множитель $\alpha_{j_p,s}$ или $\alpha_{i_p,s}$ не является диагональным. Тогда в сумме (4) всегда найдется слагаемое, которое отличается только знаком. Поэтому сумма (4) равна

$$-\sum_{\sigma\in\widetilde{S}_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\begin{array}{c} (\alpha_{i_1,i_1} + \alpha_{j_1,j_1} + \ldots + \alpha_{i_n,i_n} + \alpha_{j_n,j_n})\cdot \\ \cdot\{f_{i_1}, f_{j_1}\}\cdot\ldots\cdot\{f_{i_n}, f_{j_n}\} \end{array} \right).$$

Первый множитель внутри больших скобок равен $\operatorname{trace}\big(\alpha_{i,j}\big)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Рассмотрим симплектическое многообразие N и гладкую функцию H на нем. Пусть $M \subset N$ есть регулярное подмногообразие вида* (1)*, которое инвариантно относительно* $\operatorname{sgrad} H$.

Тогда функция $\det\Big(\{f_i, f_j\}\Big)$ *является частным интегралом* $\operatorname{sgrad} H$ *на M, если и только*

$$\forall x \in M \quad \operatorname{trace}\big(\alpha_{i,j}\big)(x) = 0, \tag{6}$$

где матрица $\big(\alpha_{i,j}\big)$ определена посредством (2) и $1 \leqslant i, j \leqslant 2n$.

Доказательство является прямым следствием леммы 1. Если функции f_i заменить на независимые функции $\widetilde{f}_j(f_1, \ldots, f_{2n})$ то

$$\widetilde{\alpha}_{k,l}(x) = \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial \widetilde{f}_k}{\partial f_i}\alpha_{i,j}(x)\frac{\partial f_j}{\partial \widetilde{f}_l} \qquad \forall x \in M.$$

Следовательно $\big(\alpha_{i,j}\big)$ есть матрица некоторого линейного оператора, и условие $\operatorname{trace}\big(\alpha_{i,j}\big) = 0$ не зависит от выбора уравнений (1).

Пример

Существует один интересный случай, когда условие (6) выполнено. Рассмотрим симплектическое многообразие N и гладкую функцию $f : N \to \mathbf{R}$. Пусть $M \subset N$ — гладкая, связная компонента множества

$$\{x \in N \ : \ df(x) = 0\}. \tag{7}$$

Такое многообразие M называется *критическим* для f. Если f является общим интегралом $\operatorname{sgrad} H$, т.е. $\{f, H\} \equiv 0$, то M инвариантно относительно $\operatorname{sgrad} H$ [5].

Определение 2. *Пусть M — критическое многообразие для функции $f : N \to \mathbf{R}$. Если $\forall x \in M$ функция $f|D(x)$ является функцией Морса, где $D(x) \subset N$ есть произвольный, достаточно малый 2-диск, который трансверсален M, то M называется невырожденным.*

Чтобы проверить это условие достаточно ограничить гессиан $d^2 f(x)$ на произвольное пространство $L_x \subset T_x N$, которое трансверсально $T_x M$. Если получается невырожденная билинейная форма $\forall x \in M$, то многообразие M является невырожденным критическим для f. Если каждая связная компонента множества (7) обладает этим свойством, то f называется функцией Ботта [2,5].

Предложение 2. *Рассмотрим симплектическое многообразие N и такие гладкие функции H, f на нем, что $\{H, f\} \equiv 0$. Пусть $M \subset N$ есть регулярное подмногообразие вида* (1)*, которое является невырожденным критическим для f. Тогда существует такой частный интеграл Φ поля $\operatorname{sgrad} H$ на M, что в произвольных локальных координатах вида $(\mathbf{f}, \mathbf{x}) = (f_1, \ldots, f_{2n}, x_1, \ldots, x_{2m})$ выполнено следующее равенство :*

$$\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{x}) = \det\Big(\{f_i, f_j\}\Big) \cdot \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial f_i \partial f_j}\right) \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant 2n). \tag{8}$$

Доказательство. Из леммы Морса [2] следует, что в некоторой окрестности U_x каждой точки $x \in M$ существуют такие независимые функции $g_j(f_1, \ldots, f_{2n})$, что

$$f = \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j g_j^2 \quad \varepsilon_j = \pm 1, \qquad \{H, g_i\} = \sum_{j=1}^{2n} \beta_{i,j} g_j$$

и подмногообразие $M \cap U_x$ можно определить уравнением $g_1 = \ldots = g_{2n} = 0$. Далее мы имеем:

$$0 = \{H, f\} = \{H, \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j g_j^2\} = 2 \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j g_j \{H, g_j\} = 2 \sum_{i,j=1}^{2n} \varepsilon_j \beta_{j,i} g_j g_i.$$

Фиксируем число $k \in \{1, \ldots, 2n\}$ и предположим, что $g_j(z) = 0$ для всех $j \neq k$, но $g_k(z) \neq 0$. Поскольку мы имеем $\varepsilon_k \beta_{k,k}(z) g_k^2(z) = 0$ то $\beta_{k,k}(z) = 0$. Следовательно $\operatorname{trace}\big(\beta_{i,j}\big)(x) = 0$ для всех $x \in M$. Поэтому функция $\det\Big(\{g_i, g_j\}\Big)$ является частным интегралом $\operatorname{sgrad} H$ на M (теорема 1). Легко видеть, что гессиан

$$d^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial g_i \partial g_j}\right) = \operatorname{diag}(2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_{2n}).$$

При замене функций $g_1, \ldots, g_{2n}$ матрицы $d^2 f(x)$ и $\Big(\{g_i, g_j\}\Big)$ ведут себя, как ковариантный и контравариантный тензоры. Поэтому их произведение является матрицей некоторого линейного оператора. Один из его инвариантов есть детерминант. Он равен $\pm 2^{2n} \cdot \det\Big(\{g_i, g_j\}\Big)$. Поскольку эта функция является частным интегралом, то и функция (8) является им. Предложение доказано.

Предложение 2, которое было получено в качестве примера приложений теоремы 1, может быть существенно усилено посредством других соображений. Как заметил А.А. Ошемков, все инварианты матрицы

$$\Big(\{f_i, f_j\}\Big) \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial f_i \partial f_j}\right)$$

должны быть частными интегралами $\operatorname{sgrad} H$ на M.

Вернемся к волчку Ковалевской в двух силовых полях [1,3]. Согласно предложению 2, функция $4\{f_1, f_2\}^2$ является частным интегралом на (3). Впервые (в статье [1]) частный интеграл $\{f_1, f_2\}$ был найден из других соображений.

Список литературы

[1] Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики, *Изв. АН СССР, Сер. мат,* 1984, т. 48, № 5, с. 883–938.

[2] Болсинов А. В. и Фоменко, А. Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, т. I,* Ижевск: Изд-во Удмуртский университет, 1999, с. 191–192.

[3] Zotev D. B. Fomenko-Zieschang Invariant in the Bogoyavlenskyi Integrable Case, *Regul. Chaotic Dyn.,* 2000, vol. 5, pp. 437–458.

[4] Kharlamov M. P. Bifurcation Diagrams of the Kowalevski Top in Two Constant Fields, *Regul. Chaotic Dyn.,* 2005, vol. 10, pp. 381–398.

[5] Fomenko A. T. *Symplectic Geometry. (Second edition),* vol. 5 of *Advanced Studies in Contemporary Mathematics,* Luxembourg: Gordon and Breach, 1995.