Гидродинамические исследования вихревых движений на поверхности сферы[1]

Э. Цермело
Геттинген

Данная работа ставит своей целью развить теорию течения несжимаемой, невязкой (двухмерной) жидкости на поверхности шара. Подобная теория применительно к течениям на плоскости существует и довольно полно представлена в работе Пуанкаре «Теория вихрей» (1893). Подобное исследование интересно уже само по себе с геометрической точки зрения, так как на шаре доступны для наблюдения многие процессы, которые на плоскости часто теряются в бесконечности, по крайней мере для зрительного восприятия. Представляется возможным получить объяснение и некоторым явлениям, имеющим место при перемещении атмосферных циклонов, а также морских течений, по крайней мере пока они развиваются у поверхности Земли и пока вертикальной составляющей течения можно пренебречь по сравнению с горизонтальной составляющей. Однако вопросы геофизики, которые собственно инициировали написание данной работы, при дальнейшем рассмотрении отодвинутся на задний план, уступая место чисто геометро-аналитическим проблемам и методам. При этом я стремился сделать изложение как можно более строгим, доказывая здесь же все необходимые утверждения. В основе всего исследования лежат исключительно основные уравнения гидродинамики в прямоугольных координатах, которые воспроизведены для удобства в начале работы, а все приведенные мною литературные ссылки служат лишь в качестве указателя источников или для сравнения.

С этой точки зрения впервые использованная Кирхгофом применительно к данной проблеме стереографическая проекция сферы на плоскость использовалась здесь лишь частично, хотя с ее помощью на сферу можно перенести некоторые свойства плоскости, выведенные в моей работе непосредственно (для ср. Lamb “Hydrodynamics”, с. 114, с. 253). Этот метод проекции здесь не принципиален и имеет лишь ограниченное применение. Так, например, задача о стационарном течении (гл. II, § 4) решается без использования проекции, а «проблема равновесия» вихря (гл. III, §§ 6 и 7) вообще не имеет аналога на плоскости. По этой же причине здесь не упомянуты электромагнитные явления. Сходство с ними наблюдается лишь по отношению к возможным состояниям течения, но не к его изменению во времени, которое более характерно для гидродинамики.

Суть применяемого здесь метода заключается в следующем: я рассматриваю так называемый «простой вихрь» (ср. гл. II, § 2), то есть изолированный точечный вихрь *при постоянной*

[1] E. Zermelo, Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche, Z. Math. Phys. 47 (1902) 201–237.

(отличной от 0) вихревой плотности на всей поверхности сферы, в то время как в более ранних работах, насколько мне известно, рассматривались лишь точечные вихри (бесконечно тонкие вихревые нити), а течение остальной жидкости предполагалось безвихревым. Рассмотренная в последней главе проблема трех вихрей, являющаяся по сути «кульминацией» применения развитой общей теории, интересна благодаря определенной формальной аналогии с задачей о движении волчка и геометрической аналогии с задачей трех тел.

1. Движение жидкости на поверхности произвольной формы

1.1. Основные уравнения в гауссовых координатах

Пусть u и v — криволинейные координаты на заданной поверхности, а E, F, G — знаменитые гауссовы элементы первой квадратичной формы, тогда формула для квадрата элемента кривой записывается как

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

и отсюда живая сила точки с массой m, движущейся на поверхности, имеет вид:

$$T = \frac{m}{2}q^2 = \frac{m}{2}\left(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2\right),$$

где u', v' означают взятые по времени t производные от u и v. Если мы далее обозначим через $m\Phi$ потенциал действующих сил, то уравнения движения Лагранжа (второго рода) запишутся как

$$m\frac{d}{dt}\left(Eu' + Fv'\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial u}u'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}u'v' + \frac{\partial G}{\partial u}v'^2\right) = -m\frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

$$m\frac{d}{dt}\left(Fu' + Gv'\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial v}u'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}u'v' + \frac{\partial G}{\partial v}v'^2\right) = -m\frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Если выбрать прямоугольные координаты u, v, то $F = 0$ и можно задать

$$E = \frac{1}{U^2}, \quad G = \frac{1}{V^2},$$

следовательно:

$$ds^2 = \frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2}.$$

Тогда

$$\overline{u} = \frac{u'}{U}, \quad \overline{v} = \frac{v'}{V}$$

будут действительными составляющими скорости в направлении координат u, v, отсюда:

$$u' = \frac{du}{dt} = U\overline{u}, \quad v' = \frac{dv}{dt} = V\overline{v}, \qquad (a)$$

и наши уравнения движения запишутся как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right) + \frac{\overline{u}^2}{U}\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\overline{v}^2}{V}\frac{\partial V}{\partial u} = -\frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right) + \frac{\overline{u}^2}{U}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\overline{v}^2}{V}\frac{\partial V}{\partial v} = -\frac{\partial \Phi}{\partial v}. \qquad (1)$$

Но так как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right) = \frac{1}{U}\frac{d\overline{u}}{dt} - \frac{\overline{u}}{U^2}\left(\frac{\partial U}{\partial u}U\overline{u} + \frac{\partial U}{\partial v}V\overline{v}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right) = \frac{1}{V}\frac{d\overline{v}}{dt} - \frac{\overline{v}}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial u}U\overline{u} + \frac{\partial V}{\partial v}V\overline{v}\right),$$

то уравнениям (1) можно придать и такой вид:

$$\frac{d\overline{u}}{dt} - \overline{v}W = -U\frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

$$\frac{d\overline{v}}{dt} - \overline{u}W = -V\frac{\partial \Phi}{\partial v}, \tag{2}$$

если задать

$$W = \frac{V}{U}\frac{\partial U}{\partial v}\overline{u} - \frac{U}{V}\frac{\partial V}{\partial u}\overline{v}.$$

Эти дифференциальные уравнения справедливы прежде всего лишь для одной-единственной материальной точки m, однако сохраняют свою форму и при непрерывном распределении материальных точек по поверхности, то есть при переходе к невязкой двухмерной жидкости. Только в этом случае вместо m нужно использовать переменную поверхностную плотность k, а к потенциалу массовых сил добавить функцию $p = p(u, v)$, учитывающую взаимное влияние частиц жидкости и называемую давлением жидкости; при этом pds всегда является силой, действующей по нормали на элемент кривой ds. Здесь нужно отметить, что к составлению основных уравнений можно прийти и иным способом, а именно рассматривая течение трехмерной жидкости между близкими параллельными поверхностями, устремляя затем расстояние между ними (то есть толщу жидкого слоя) к нулю. Итак, если давление, как мы будем предполагать в дальнейшем, есть функция одной плотности k, то мы можем определить

$$\int \frac{dp}{k} = P \quad \text{(«функция давления»)},$$

таким образом:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial u}, \quad \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial v},$$

и дифференциальные уравнения (1), (2) справедливы и для нашей жидкости, если мы зададим

$$\Phi = P + \Phi_1,$$

где Φ_1 означает потенциал массовых сил. Ранее мы выразили изменение составляющих скорости $(d\overline{u})/(dt)$, $(d\overline{v})/(dt)$ через потенциал Φ и сами скорости $\overline{u}$, $\overline{v}$. Но мы можем выразить изменение скорости $(\partial u)/(\partial t)$, $(\partial v)/(\partial t)$ в каждой точке поверхности u, v, используя соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{u}}{dt} = \dfrac{\partial \overline{u}}{dt} + \overline{u}U\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial u} + \overline{v}V\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{d\overline{v}}{dt} = \dfrac{\partial \overline{v}}{dt} + \overline{u}U\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial u} + \overline{v}V\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{cases} \quad \text{(ср. (a))}, \tag{b}$$

и, таким образом, получим из (2):

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + U\left(\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial u} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\right) - \overline{v}UV\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right) + \overline{v}UV\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right) = -U\frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + V\left(\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\right) - \overline{u}UV\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right) + \overline{u}UV\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right) = -V\frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Если здесь принять во внимание тот факт, что

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial u} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\overline{u}^2 + \overline{v}^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial u},$$

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(\overline{u}^2 + \overline{v}^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial v},$$

и далее задать

$$2\varrho = UV\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right)\right\} \qquad (c)$$

(ϱ есть мера вращения жидкости вокруг нормали к поверхности, которую также будем называть «вихревой плотностью» или завихренностью, ср. § 2), то в итоге получится

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{u}}{dt} = 2\overline{v}\varrho - U\dfrac{\partial}{\partial u}(\Phi + \tfrac{1}{2}q^2), \\[2ex] \dfrac{d\overline{v}}{dt} = -2\overline{u}\varrho - V\dfrac{\partial}{\partial v}(\Phi + \tfrac{1}{2}q^2). \end{cases} \qquad (3)$$

Теорема. *Зависимость вектора скорости от времени на участке поверхности определяется двумя компонентами, одна из которых ортогональна скорости и равна удвоенному произведению вихревой плотности ϱ на скорость, а другая равна градиенту функции χ, представляющей собой сумму половины квадрата скорости, функции давления P, а также потенциала Φ_1 действующих массовых сил.*

(Частный случай применительно к плоскости ($U = 1$, $V = 1$) ср. у Lamb, Hydrodynamics, с. 226.)

1.2. Поток массы и несжимаемость

Под «потоком массы» $K_\wp$ через заданную кривую $\wp$ мы понимаем при стационарном течении общую массу жидкости, протекающую через кривую в определенном направлении за единицу времени. Если движение не совсем стационарное, то мы должны разделить протекающую за время τ массу на τ и устремить $\tau \to 0$. Таким образом, мы получим формулу

$$K_\wp = \int^{(\wp)} kq_n ds, \qquad (a)$$

в которой интеграл распространяется на кривую $\wp$ с переменной длиной дуги s, а q_n обозначает составляющую скорости в положительном направлении нормали n к кривой. Однако в наших прямоугольных координатах u, v

$$q_n = \frac{\overline{v}}{U}\frac{du}{ds} - \frac{\overline{u}}{V}\frac{dv}{ds}. \qquad (b)$$

И для того чтобы это уравнение всегда правильно определяло знак перед q_n, в дальнейшем мы будем принимать за «положительную» нормаль к кривой такое направление (на касательной плоскости к поверхности), что направление нормали совмещается с направлением ds на кривой тем же поворотом, что и направление v с направлением u, если мы смотрим на поверхность с определенной стороны. Следовательно, всегда будет:

$$K_\wp = \int^{(\wp)} k\left(\frac{\overline{v}}{U}du - \frac{\overline{u}}{V}dv\right), \tag{c}$$

но при этом должно быть задано и направление кривой $\wp$.

Особенно важен случай, когда кривая $\wp$ замкнута, не имеет самопересечений и ограничивает конечную область C таким образом, что положительная (левая) нормаль всегда направлена вовнутрь. Тогда $K = K_\wp$ есть масса жидкости, проникающей за единицу времени в C, и на основании принципа постоянности материи равна общему увеличению массы в C со временем:

$$\int^{(C)} \frac{\partial k}{\partial t} d\sigma = \int^{(C)} \frac{\partial k}{\partial t}\frac{du}{U}\frac{dv}{V},$$

где $d\sigma$ означает элемент поверхности.

Ну а теперь чисто формально можно превратить криволинейный интеграл K в интеграл по поверхности:

$$K = \int^{(\wp)} k\left(\frac{\overline{v}}{U}du - \frac{\overline{u}}{V}dv\right) = -\int^{(C)} dudv\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k\overline{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k\overline{v}}{U}\right)\right\}. \tag{1}$$

Отсюда, с учетом формулы для увеличения массы в C, находим

$$\int^{(\wp)} dudv\left\{\frac{1}{UV}\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k\overline{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k\overline{v}}{U}\right)\right\} = 0,$$

что верно для области C абсолютно произвольной формы, то есть подынтегральное выражение тоже должно обратиться в нуль, и мы получим так называемое «условие неразрывности»

$$\frac{1}{UV}\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k\overline{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k\overline{u}}{U}\right) = 0, \tag{2}$$

которое должно рассматриваться как третье основное уравнение наряду с уравнениями (1), (2) или (3) в § 1. Для «однородной и несжимаемой» жидкости k по определению постоянна во всех точках поверхности и не зависит от времени, поэтому примем ее равной единице. Из (2) получаем теперь «условие несжимаемости»

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\overline{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right) = 0. \tag{3}$$

В этом случае для каждой замкнутой кривой $\wp$ интеграл

$$K_\wp = \int^{(\wp)} \left(\overline{v}\frac{du}{U} - \overline{u}\frac{dv}{V}\right) = 0$$

и, следовательно, для любой кривой не зависит от формы траектории, соединяющей A и B; следовательно, мы можем говорить просто о потоке массы.

Если мы теперь примем произвольную фиксированную точку O нашей поверхности за точку отсчета, то для каждой другой точки поверхности $P \equiv P(u, v)$ значение интеграла

$$K_{OP} = \int\limits_{(O)}^{(P)} \left(\overline{v} \frac{du}{U} - \overline{u} \frac{dv}{V} \right) = \psi(u, v) \tag{1a}$$

будет определяться только координатами u, v точки P; интеграл определяет функцию точки поверхности, которую мы назовем «функцией тока» $\psi(u, v)$. При изменении исходной точки O эта функция, очевидно, изменяется лишь на аддитивную постоянную. Частные производные функции тока заданы тогда через

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = \dfrac{\overline{v}}{U}, \quad \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = -\dfrac{\overline{u}}{V} \quad \text{или} \\ \overline{u} = -V\dfrac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \overline{v} = +U\dfrac{\partial\psi}{\partial u} \end{cases} \tag{4}$$

и отсюда:

$$\frac{du}{dt} = U\overline{u} = -UV\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

$$\frac{dv}{dt} = U\overline{v} = +UV\frac{\partial\psi}{\partial u}. \tag{4a}$$

Таким образом, за распределение всей скорости отвечает одна-единственная функция $\psi(u, v)$, что существенно упрощает исследования несжимаемой жидкости на поверхности.

На кривых $\psi = \mathrm{const}$ согласно определению (1a) $K = \psi(u, v)$ и $q_n = 0$, то есть скорость направлена по касательной; такие кривые назовем «линиями тока».

«Условие несжимаемости» (3), однако, относится лишь к невырожденным точкам: там, где скорость, например, становится бесконечной или где одна из величин U, V обращается в нуль, может терять свое значение. Если это происходит в одной точке P_1, в то время как для остальных точек условие (3) выполняется, тогда у потока массы K_c, где C является произвольной замкнутой кривой, ограничивающей точку P_1, может быть определенное независимое от формы C значение, оно может быть, однако, отличным от нуля и означать «втекание» массы в точку P_1; это была бы «точка источника» или «точка стока» (в зависимости от знака K_c), а также точкой ветвления функции тока. Но подобные случаи мы впоследствии исключим и ограничимся случаем однозначной функции тока.

1.3. Циркуляция и вихревой момент. Потенциал скорости

Наряду с рассмотренным в предыдущем параграфе интегралом $K = \int kq_n ds$ рассмотрим интеграл

$$2R_{\wp} = \int\limits_{(\wp)} q_s ds,$$

где q_s означает составляющую скорости в направлении ds, причем сразу же возьмем случай, когда кривая $\wp$ замкнута, не имеет самопересечений и пробегается в положительном направлении. Тогда интеграл будет называться «циркуляцией вдоль кривой $\wp$». Однако у нас

$$q_s = \frac{\overline{u}}{U}\frac{du}{ds} + \frac{\overline{v}}{V}\frac{dv}{ds}, \tag{a}$$

следовательно, получится

$$2R_\wp = \int^{(\wp)} q_s ds = \int^{(\wp)} \left(\frac{\overline{u}}{U}du + \frac{\overline{v}}{V}dv\right) =$$
$$= \int^{(C)}\int \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right)\right\} dudv = \int^{(C)} 2\varrho d\sigma, \quad (1)$$

где C означает ограниченную кривой $\wp$ область с элементом $d\sigma$ и

$$2\varrho = UV\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right)\right\}. \qquad (b)$$

Величину $R_\wp = \int^{(C)} \varrho d\sigma$ называют также «вихревым моментом в C», а ϱ «вихревой плотностью» в точке u, v; эта плотность есть не что иное, как нормальная составляющая ротора скорости частиц жидкости. Эта формула уже была дана в первых параграфах ((c), с. 84) для упрощения уравнений (3). Определение (a) и формула (1) дают в итоге следующие теоремы:

Теорема I. *Вихревой момент поверхности равен сумме вихревых моментов ее частей.*

(При этом предполагается, что на самих участках кривой скорость изменяется не скачкообразно.)

Теорема II. *Общий вихревой момент замкнутой поверхности равен нулю.*

Так как здесь можно стянуть кривую $\wp$ в одну (не сингулярную) точку, может быть так, что внутри односвязной поверхности F циркуляция вдоль каждой замкнутой кривой, то есть вихревой момент каждого участка поверхности F, равна нулю и соответственно везде обращается в нуль и вихревая плотность ϱ.

В этом случае интеграл

$$2R_{OP} = \int_{(O)}^{(P)} q_s ds = \int_{(O)}^{(P)} \left(\frac{\overline{u}du}{U} + \frac{\overline{v}ds}{V}\right) = \varphi(u,v) \qquad (c)$$

вдоль произвольной кривой, лежащей в F, от исходной точки O до любой другой точки поверхности $P = P(u,v)$ кривой $\wp$, имеет определенное, независимое от формы траектории $\wp$ значение $\varphi(u,v)$, характерное для точки $P = P(u,v)$, которое обозначается как «потенциал скорости» в точке P. Тогда составляющие скорости $\overline{u}$, $\overline{v}$ можно выразить так же, как в случае несжимаемости в § 2 (4) через функцию тока ψ, а именно через частные производные от φ:

$$\overline{u} = U\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad \overline{v} = V\frac{\partial\varphi}{\partial v}. \qquad (2)$$

Подобный потенциал скорости существует, согласно (1), на любой односвязной поверхности F и представляет собой однозначную функцию, если внутри F скорость не скачкообразна, а вихревая плотность ϱ везде обращается в нуль:

$$\frac{2\varrho}{UV} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right) = 0. \qquad (3)$$

Но если условие (3) выполняется и при этом F многосвязна или содержит сингулярные точки или линии, в которых ϱ теряет свое значение и исключение которых также превратит F в многосвязную поверхность, то хотя потенциал скорости $\varphi(u, v)$ там и существует, но он больше не является однозначным, а изменяется при обходах исключенных участков на некоторые аддитивные постоянные.

Кривые $\varphi = \text{const}$, на которых согласно (c) везде $q_s = 0$, в каждой точке ортогонально скорости, то есть они пересекают все линии тока под прямым углом и называются «уровневыми линиями».

Если же жидкость к тому же несжимаема (§ 2), что мы всегда будем предполагать в дальнейших исследованиях, то согласно (4) с. 86 можно ввести функцию тока ψ и получить таким образом для вихревой плотности из (b):

$$2\varrho = UV \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{U}{V} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{V}{U} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right\} \equiv D\psi. \tag{4}$$

Эта формула позволяет получить вихревую плотность из функции тока путем двухкратного дифференцирования и, наоборот, при заданном ϱ рассчитать ψ при помощи интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка.

В «незавихренной» поверхности F, на каждом участке которой $\varrho = 0$ и, следовательно, существует потенциал скорости φ, будет, таким образом:

$$D\psi = 0, \quad \text{но одновременно с этим и} \quad D\varphi = 0,$$

последнее уравнение получают из (3) § 2 с помощью формулы (2) для $\overline{u}$ и $\overline{v}$.

Теперь для области C произвольной формы, не содержащей сингулярные точки:

$$\begin{aligned}
\int^{(C)} 2\varrho\psi d\sigma &= \int^{(C)} \psi D\psi d\sigma = \int^{(C)}\!\!\int \psi \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{U}{V} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{V}{U} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right\} dudv \\
&= -\int^{(C)}\!\!\int \left\{ \left(\frac{U}{V} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{V}{U} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2 \right\} dudv + \int^{(\wp)} \psi \left(\frac{U}{V} \frac{\partial \psi}{\partial u} dv - \frac{V}{U} \frac{\partial \psi}{\partial v} du \right) \\
&= -\int^{(C)}\!\!\int \left(\overline{u}^2 + \overline{v}^2 \right) \frac{dudv}{UV} + \int^{(\wp)} \psi \left(\frac{\overline{u}}{U} du + \frac{\overline{v}}{V} dv \right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где криволинейный интеграл в правой части уравнения берется вдоль $\wp$, границы C, пробегаемой в положительном направлении. Здесь можно ввести также результирующую скорость q и ее составляющую q_s и получить:

$$\int^{(C)} 2\varrho\psi d\sigma = -\int^{(C)} q^2 d\sigma + \int^{(\wp)} \psi q_s ds. \tag{5'}$$

Криволинейный интеграл по $\wp$ обращается в нуль, если C представляет собой замкнутую поверхность (без сингулярностей). Если же C лишь участок поверхности, ограниченный контуром, состоящим из одной или нескольких линий тока $\psi = \psi_\lambda = \text{const}$, то интеграл по замкнутому контуру представим в виде суммы

$$\int \psi_\lambda q_s ds = \psi_\lambda \int^{(\psi_\lambda)} q_s ds = 2\psi_\lambda R_\lambda$$

и вновь обращается в нуль на любом участке C с однозначным потенциалом скорости, **где любая циркуляция является нулевой**. Тогда одновременно обращается в нуль и левая часть уравнения (5), и остается

$$\int\limits^{(C)} q^2 d\sigma = \int\limits^{(C)} \left(\overline{u}^2 + \overline{v}^2\right) d\sigma = 0.$$

Таким образом, на любом участке C должно быть $q^2 = 0$ и $\psi = \mathrm{const}$, то есть жидкость должна везде находиться в состоянии покоя. Из всего вышесказанного получаем теорему:

Теорема III. *На* **замкнутой** *поверхности, а также в односвязной области на поверхности, ограниченной непроницаемым контуром* $(q_n = 0)$*, не существует незавихренного движения несжимаемой жидкости, если скорость* **непрерывна**. *Следовательно, на таких участках распределение скорости и «состояние течения» однозначно определено завихренностью, то есть функцией* $\varrho = \varrho(u, v)$.

То есть если бы $\psi = \psi_1$ и $\psi = \psi_2$ были двумя решениями дифференциального уравнения (4) $D\psi = 2\varrho$, принимающими на указанной кривой, которая в рассматриваемом случае может состоять не более чем из одной линии тока, постоянные значения $\overline{\psi_1}$ и $\overline{\psi_2}$, тогда для разности $\psi_0 = \psi_1 - \psi_2$ на всей поверхности должно быть $D\psi_0 = D\psi_1 - D\psi_2 = 0$, а на ее границе $\overline{\psi_0} = \overline{\psi_1} - \overline{\psi_2} = \mathrm{const}$, что по вышеупомянутому доказательству возможно лишь при $\psi_0 = \mathrm{const}$, то есть $\psi_1 = \psi_2 + \mathrm{const}$.

При выводе соотношения (1)

$$R = \frac{1}{2} \int\limits^{(\wp)} q_s ds = \int\limits^{(C)} \varrho d\sigma$$

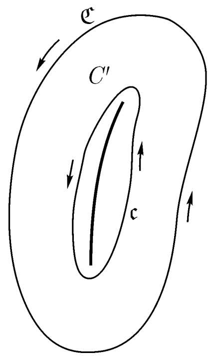

Рис. 1

мы поставили условие, что область C, по которой мы интегрировали, не содержит сингулярностей, соотнесенных с составляющими скорости и их первыми производными, и везде имеет определенное значение $2\varrho = D\psi$. Теперь исследуем природу возможных сингулярностей, исключив случай, когда ϱ не определено на всей конечной поверхности. Пусть $\mathfrak{I}$ будет сингулярной кривой, которую возможно стянуть в одну точку, C — поверхность с границей $\wp$, не содержащей иных сингулярностей кроме $\mathfrak{I}$. Далее окружим $\mathfrak{I}$ замкнутой кривой произвольной формы, проходящей на поверхности C в положительном направлении по отношению к $\mathfrak{I}$, и тогда, применив к области C', расположенной между $\mathfrak{C}$ и C, теорему (I), получим:

$$2R' \equiv \int\limits^{(C')} 2\varrho d\sigma = \int\limits^{(\wp)} q_s ds - \int\limits^{(c)} q_s ds.$$

Эта теорема действительна для любых контуров c, сколь угодно плотно окружающих сингулярность $\mathfrak{I}$, так что в пределе

$$\lim 2R' \equiv \lim \int\limits^{(C')} 2\varrho d\sigma = \int\limits^{(\wp)} q_s ds - \lim \int\limits^{(c)} q_s ds$$

или

$$2R_{\wp} \equiv \int\limits^{(\wp)} q_s ds = \lim \int\limits^{(C')} 2\varrho d\sigma + \lim \int\limits^{(c)} q_s ds = 2\overline{R} + 2R_{\mathfrak{I}}.$$

Таким образом, теорема (I) верна и в том случае, если в правой части уравнения мы, исключив сингулярность $\mathfrak{J}$, добавим к предельному значению интеграла $\int 2\varrho d\sigma$ предельное значение $2R_{\mathfrak{J}}$ циркуляции вдоль $\mathfrak{J}$, сопоставив кривой $\mathfrak{J}$ конечный вихревой момент $R_{\mathfrak{J}}$. Если мы так же будем поступать со всеми возникающими сингулярностями, то наши предыдущие теоремы, например I и II, с. 87, III, с. 89, останутся верными. Кроме этого, мы можем полностью игнорировать те сингулярности, при которых $2R_{\mathfrak{J}} = \lim \int^{(c)} q_s ds$ равен нулю. Это всегда случай, когда составляющие скорости также остаются непрерывными и в окрестности $\mathfrak{J}$, (то есть разрывы могут иметь только производные $\frac{\partial \overline{u}}{\partial u}$, $\frac{\partial \overline{u}}{\partial v}$ и т. д.), так как при стягивании кривой c к $\mathfrak{J}$ для лежащих друг против друга элементов ds и ds' выражения $q_s ds$ и $q'_s ds' = -q_s ds' = -q_s ds$ равны и противоположны по знаку, следовательно, они сокращаются. Если же вдоль кривой $\mathfrak{J}$ скорость разрывна, так что ее тангенциальные составляющие справа и слева от $\mathfrak{J}$ равны соответственно $q_{\mathfrak{J}}$ и $q'_{\mathfrak{J}}$, а нормальные составляющие совпадают (так как по условию в $\mathfrak{J}$ нет источников и стоков), тогда

$$2R_{\mathfrak{J}} = \int^{(\mathfrak{J})} \left(q'_{\mathfrak{J}} - q_{\mathfrak{J}}\right) ds.$$

Таким образом, $2R_{\mathfrak{J}}$ равен интегралу от скачка скорости вдоль кривой $\mathfrak{J}$. Полученное значение мы назовем «вихревым моментом кривой $\mathfrak{J}$».

Если сингулярность $\mathfrak{J}$ состоит лишь из одной точки, то, стягивая c к этой точке, находим, что $R_{\mathfrak{J}}$ всегда обращается в нуль, если величина скорости на окружающей $\mathfrak{J}$ кривой ограничена сверху. Следовательно, если $R_{\mathfrak{J}}$ примет конечное значение, отличное от нуля, тогда скорость на $\mathfrak{J}$ станет бесконечно большой, при этом нормальная составляющая q_n в окружающем $\mathfrak{J}$ малом круге c обратится в нуль одновременно с его радиусом, так как $\mathfrak{J}$ не является источником. Иными словами: жидкость будет обтекать сингулярную точку с бесконечной скоростью, а соседние линии тока будут описывать малые эллипсы вокруг $\mathfrak{J}$ с возрастающей скоростью по мере приближения к ней. Такую точку мы назовем «точечным вихрем», а предельное значение — половиной циркуляций в окружающем малом круге — «вихревым моментом» этого точечного вихря.

Таким образом, из всех возникающих сингулярностей особого внимания заслуживают лишь «вихревые точки» и «сингулярные линии», причем последние можно назвать и «вихревыми линиями», так как их можно заменить рядом точечных вихрей.

1.4. Теорема Гельмгольца и движение вихря

Ранее мы рассматривали лишь мгновенное распределение скорости по нашей поверхности, положение линий тока и т. д. в определенный момент времени. Теперь возникает вопрос: а как изменяется это состояние скорости, каким образом деформируются линии тока? Или, иными словами: как устроено абсолютное движение жидкости? При сформулированных условиях на этот вопрос отвечает теорема Гельмгольца, которая верна как для нашей двухмерной жидкости на поверхности, так и для жидкости в пространстве; эту теорему мы сформулируем так:

Теорема I. *Если на невязкую двухмерную жидкость на поверхности произвольной формы действуют массовые силы, обладающие потенциалом, а давление является функцией только поверхностной плотности, то циркуляция вдоль замкнутой кривой $\wp$, состоящей из одних и тех же частиц жидкости (или завихренность определенного объема жидкости C) не изменяется со временем.*

А именно, если мы согласно (1) § 3 запишем:

$$2R_{\wp} = \int^{(\wp)} \left(\frac{\overline{u}}{U} \delta u + \frac{\overline{v}}{V} \delta v \right),$$

где δ означает независимое по времени варьирование, и поэтому:

$$\frac{d\delta u}{dt} = \delta \frac{du}{dt} = \delta(\overline{u}U) = \frac{\partial(\overline{u}U)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial(\overline{u}U)}{\partial v}\delta v$$

$$\frac{d\delta v}{dt} = \delta \frac{dv}{dt} = \delta(\overline{v}V) = \frac{\partial(\overline{v}V)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial(\overline{v}V)}{\partial v}\delta v,$$

таким образом:

$$2\frac{dR}{dt} = \int^{(\wp)} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right)\delta u + \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right)\delta v + \frac{\overline{u}}{U}\delta\left(\overline{u}U\right) + \frac{\overline{v}}{V}\delta\left(\overline{v}V\right) \right\} =$$

$$= \int^{(\wp)} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right) + \frac{\overline{u}^2}{U}\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\overline{v}^2}{V}\frac{\partial V}{\partial u} \right\} \delta u +$$

$$+ \int^{(\wp)} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right) + \frac{\overline{u}^2}{U}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\overline{v}^2}{V}\frac{\partial V}{\partial v} \right\} \delta u + \int \left(\overline{u}\delta\overline{u} + \overline{v}\delta\overline{v}\right)$$

или из уравнений движения (1) § 1:

$$2\frac{dR}{dt} = \int^{(\wp)} \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial u}\delta u - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\delta v + \overline{u}\delta\overline{u} + \overline{v}\delta\overline{v} \right\} =$$

$$= \int^{(\wp)} \left(-\delta\Phi + \frac{1}{2}\delta(q^2) \right) = \int \delta\left(\frac{1}{2}q^2 - \Phi\right) = \left[\frac{1}{2}q^2 - \Phi\right]_A^A = 0,$$

где интегрирование производится вдоль замкнутой кривой $\wp$. Следовательно, утверждение

$$R = \frac{1}{2}\int^{(\wp)} q_s ds = \int^{(C)} \varrho d\sigma = \mathrm{const} \tag{1}$$

верно.

Из нашей теоремы можно сделать следующие выводы:

Теорема II. *Если завихренность части жидкости равна нулю ($\varrho = 0$) в какой-то момент времени, то она будет равна нулю всегда.*

Теорема III. *Если жидкость несжимаема, то завихренность ϱ любой материальной точки постоянна, то есть завихренность определяется текущим положением точки.*

Согласно теореме I $\varrho d\sigma = \mathrm{const}$; а из-за несжимаемости жидкости будет $d\sigma = \mathrm{const}$.

Теорему Гельмгольца мы могли бы вывести и из уравнения (3) § 1 следующим образом. Мы можем записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right) &= 2\varrho\frac{\overline{v}}{U} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\Phi + \frac{1}{2}q^2\right), \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right) &= -2\varrho\frac{\overline{u}}{V} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\Phi + \frac{1}{2}q^2\right), \end{aligned} \tag{a}$$

так как U и V не зависят от t. Если теперь продифференцировать второе уравнение по u, а первое по v и вычесть получившийся результат из первого результата, то получится:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial t}\left(\frac{\overline{v}}{V}\right) - \frac{\partial^2}{\partial v \partial t}\left(\frac{\overline{u}}{U}\right) = -2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varrho\overline{u}}{V}\right) - 2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varrho\overline{v}}{U}\right).$$

Но здесь, по определению (стр. 84) левая сторона уравнения $= \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{2\varrho}{UV}\right)$, так что мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varrho}{UV}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varrho\overline{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varrho\overline{v}}{U}\right) = 0. \tag{2}$$

Это уравнение отличается от (2) в § 2 лишь тем, что здесь вместо k стоит ϱ, то есть то «уравнение непрерывности» выражает постоянство массы $kd\sigma$ материальной частицы, а это уравнение выражает постоянство ее завихренности $\varrho d\sigma$.

Теперь в случае несжимаемости по (3) § 2

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\overline{u}}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\overline{v}}{U}\right) = 0,$$

так что (2) записывается как

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = -UV\left(\frac{\overline{u}}{V}\frac{\partial\varrho}{\partial u} + \frac{\overline{v}}{U}\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right) = -U\overline{u}\frac{\partial\varrho}{\partial u} - V\overline{v}\frac{\partial\varrho}{\partial v} \tag{3}$$

или

$$\frac{d\varrho}{dt} \equiv \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{dv}{dt} = 0,$$

то есть $\varrho = \mathrm{const}$. Здесь также можно выразить u и v через функцию тока ψ (4) § 2 и получить:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = UV\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right). \tag{4}$$

Или если вместо 2ϱ из (4) § 3 подставить его значение $D\psi$:

$$\frac{\partial D\psi}{\partial t} = UV\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial D\psi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial D\psi}{\partial v}\right), \tag{4'}$$

то получим неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка относительно $\psi = \psi(u, v, t)$; это уравнение определяет движение жидкости с течением времени.

Если найти непрерывное решение $\psi = \psi(u, v, t)$ этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям, то можно найти давления, используя уравнения (a), которые записываются так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\Phi + \frac{1}{2}q^2\right) &= 2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{V}{U}\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial t},\\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\Phi + \frac{1}{2}q^2\right) &= 2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{U}{V}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial t}.\end{aligned} \tag{5}$$

Или, используя вариации δu, δv, в виде:

$$\delta\left(\Phi + \frac{1}{2}q^2\right) = \left(2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{V}{U}\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial t}\right)\delta u + \left(2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{U}{V}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial t}\right)\delta v. \tag{5'}$$

Согласно (4), левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал (так как уравнение (4) было выведено путем исключения Φ из уравнений (a) или (5)). Итак, интегрированием мы можем найти функцию $\Phi + \frac{1}{2}q^2$; далее нужно лишь вычесть $\frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}U^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2}V^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2$, чтобы найти Φ, а затем вычесть потенциал Φ_1 массовых сил (ср. с. 84), чтобы найти функцию давления $P = \int \frac{dp}{k} = p$, то есть само давление как функцию от u, v и t.

Особенно важен случай, когда $\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$, то есть когда течение стационарное. Тогда выражение $\frac{\partial\varrho}{\partial t}$ также должно обращаться в 0, то есть, согласно (4):

$$\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0, \tag{4a}$$

или путем интегрирования:

$$2\varrho = D\psi = f(\psi) \tag{4b}$$

получаем соотношение, которое геометрически выражается так:

Теорема IV. *При стационарном течении несжимаемой жидкости на поверхности произвольной формы завихренность ϱ должна быть постоянной на каждой линии тока* ($\psi = \mathrm{const}$).

Это утверждение достаточно очевидно, так как при стационарном течении частицы жидкости с неизменным ϱ (теорема III) движутся вдоль неподвижных линий тока, и при этом ϱ в каждой точке пространства всегда должна оставаться постоянной[2].

В этом случае давление определяется очень просто. Так как здесь

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\Phi + \frac{1}{2}q^2\right) = 2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\Phi + \frac{1}{2}q^2\right) = 2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

следовательно:

$$\Phi + \frac{1}{2}q^2 = \Phi_1 + p + \frac{1}{2}q^2 = \int 2\varrho\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right) = \int 2\varrho d\psi. \tag{6}$$

И на линиях тока $\psi = \mathrm{const}$, $\varrho = \mathrm{const}$ одновременно с этим будет и

$$\Phi = \mathrm{const},$$

а если нет массовых сил, давление постоянно:

$$p = \mathrm{const}.$$

1.5. Сохранение живой силы

Из вида (2) наших основных гидродинамических уравнений в § 1 непосредственно следует:

$$\overline{u}\frac{d\overline{u}}{dt} + \overline{v}\frac{d\overline{v}}{dt} = -U\overline{u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - V\overline{v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} = -\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{du}{dt} - \frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

[2]Для частного случая плоскости, где $D\psi = \Delta\psi$, условие стационарности $\Delta\psi = f(\psi)$ можно найти уже в сочинениях Лагранжа (Oeuvrest. 4, с. 720), ср. также Stokes (Math. Phys. Papers т. 1, с. 264), Lamb, Hydrod. с. 263).

или в случае несжимаемой жидкости, когда $\overline{u}$ и $\overline{v}$ выражаются, согласно § 2, через ψ:

$$\overline{u}\frac{d\overline{u}}{dt} + \overline{v}\frac{d\overline{v}}{dt} = VU\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right). \tag{1}$$

Итак, интегрируя по поверхности C:

$$\int^{(C)}\left(\overline{u}\frac{d\overline{u}}{dt} + \overline{v}\frac{d\overline{v}}{dt}\right)d\sigma = \int^{(C)}\!\!\int dudv\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right).$$

Левая часть уравнения является не чем иным, как частной производной по времени всей живой силы жидкости, содержащейся в C:

$$\frac{dT_C}{dt} = \frac{d}{dt}\int^{(C)}\frac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{v}^2)d\sigma.$$

Пусть $\wp$ — граница C, тогда правую часть перепишем в виде:

$$\int^{(C)} dudv\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \int^{(\wp)}\Phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right) = \int^{(\wp)}\Phi\frac{\partial\psi}{\partial s}ds = \int^{(\wp)}\Phi q_n ds,$$

где ds, как и прежде, означает элемент кривой $\wp$, а q_n нормальную составляющую скорости. Итак:

$$\frac{dT_C}{dt} = \frac{d}{dt}\int^{(C)}\frac{1}{2}q^2 d\sigma = \int^{(\wp)}\Phi q_n ds. \tag{2}$$

Эта формула выражает закон сохранения энергии применительно к нашей несжимаемой двухмерной жидкости.

Теперь предположим, что кривая $\wp$, ограничивающая наш участок C, образована несколькими линиями тока $\psi = \mathrm{const}$ или что она может быть стянута в одну (не сингулярную) точку, а C полностью заполняет замкнутую поверхность. Тогда правая часть уравнения обращается в нуль, и получается:

$$T_c = \frac{1}{2}\int^{(\wp)}(\overline{u}^2 + \overline{v}^2)d\sigma = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Итак доказана

Теорема I. *Общая живая сила несжимаемой невязкой жидкости на полностью замкнутой поверхности или на участке поверхности, ограниченной твердым контуром, образованным из линий тока, постоянна во времени при условии, что в жидкости нет источников и стоков, а внешние силы обладают потенциалом.*

В случае замкнутой поверхности мы можем, однако, записать живую силу T в другом виде, используя функцию тока ψ и завихренность ϱ. А именно, согласно (4) с. 86, имеем

$$\frac{\overline{u}^2 + \overline{v}^2}{UV} = -\frac{\overline{u}}{U}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\overline{v}}{V}\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\psi\overline{v}}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi\overline{u}}{U}\right) - \frac{2\psi\varrho}{UV}.$$

Интегрируя по поверхности C и используя в правой части уравнения соответствующий криволинейный интеграл вдоль $\wp$, получаем

$$2T_c = \int^{(C)}\!\!\int(\overline{u}^2 + \overline{v}^2)\frac{dudv}{UV} = \int^{(\wp)}\psi\left(\overline{u}\frac{du}{U} + \overline{v}\frac{dv}{V}\right) - \int^{(C)}\!\!\int 2\psi\varrho\frac{dudv}{UV} \tag{4}$$

или

$$T_c = \int\limits^{(C)} \frac{1}{2} q^2 d\sigma = \frac{1}{2} \int\limits^{(\wp)} \psi q_s ds - \int\limits^{(C)} \psi \varrho d\sigma.$$

Итак, в том случае, когда C представляет собой замкнутую поверхность F, мы можем записать

$$T = \int\limits^{(F)} \frac{1}{2} q^2 d\sigma = -\int\limits^{(F)} \psi \varrho d\sigma = \text{const}. \tag{4a}$$

Таким образом, доказана

Теорема II. *При течении несжимаемой жидкости по замкнутой поверхности сумма всех вихревых элементов $\varrho d\sigma$, умноженных на соответствующее значение функции тока ψ, равна живой силе всей жидкости, взятой с обратным знаком; следовательно, при соблюдении условий теоремы I постоянна во времени величина*

$$\mathrm{P} = \int \psi \varrho d\sigma = -T = \text{const}.$$

2. Применение общей теории к сфере

2.1. Основные формулы в стереографических и полярных координатах

Если рассматриваемая поверхность является сферой, то для решения гидродинамических задач особенно рекомендуются следующие две системы прямоугольных координат u, v:

1) полярные координаты ϑ, ω, где ϑ означает угловое расстояние точки от точки P до некоторой фиксированной точки O, а ω угол наклона меридиана OPO' к некоторому фиксированному меридиану $\omega = 0$. Мы считаем ω возрастающим в направлении, соответствующем положительному вращению вокруг диаметра $O'CO$ (т. е. по часовой стрелке для наблюдателя, смотрящего вдоль направления CO);

2) стереографические координаты x, y, то есть прямоугольные координаты точки p, которую мы получим из P путем стереографической проекции с центром в точке O' (противоположной O) на экваториальную плоскость диаметра OO'. И здесь переход от оси x к оси y должен соответствовать положительному вращению вокруг оси $O'O$. Эта система координат важна для решения многих задач особенно потому, что стереографическая проекция сферы на плоскость, как известно, является конформным преобразованием.

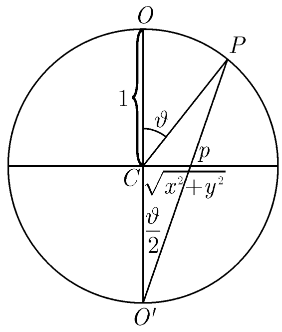

Рис. 2

Итак, пусть центр проекции O' противоположен точке O полярной системы координат, а ось x находится в плоскости исходного меридиана $\omega = 0$; пусть радиус сферы равен 1, тогда для ϑ, ω, x, y будут выполнены соотношения:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \qquad x = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \cos\omega, \qquad y = tg\frac{\vartheta}{2} \sin\omega \tag{1}$$

Следовательно,

$$dx^2 + dy^2 = \frac{d\vartheta^2}{4\cos^4 \frac{\vartheta}{2}} + \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} d\omega^2 = \frac{d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\omega^2}{4\cos^4 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Отсюда, обозначив, как и раньше, длину элемента кривой на сфере ds, найдем:

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\omega^2 = \frac{4}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}(dx^2+dy^2). \tag{2}$$

Так что если мы вместо величин U, V из главы I или вместо Θ, Ω подставим X, Y, а составляющие скорости обозначим через $\overline{\vartheta}$, $\overline{\omega}$; x, y:

$$\left\{\begin{array}{l|c} \Theta = 1, \quad \Omega = \dfrac{1}{\sin\vartheta}, & X = Y = \dfrac{1}{2}(1+x^2+y^2), \\ \dfrac{d\vartheta}{dt} = \overline{\vartheta}, \quad \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\overline{\omega}}{\sin\vartheta}, & \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}(1+x^2+y^2)\overline{x}, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}(1+x^2+y^2)\overline{y}, \end{array}\right. \tag{3}$$

тогда мы получим из основных формул (1), (2) и (3) главы I уравнения:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\overline{\vartheta}}{dt} - \operatorname{ctg}\vartheta\overline{\omega}^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}, \\ &\frac{d\overline{\omega}}{dt} + \operatorname{ctg}\vartheta\overline{\vartheta}\overline{\omega} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}; \end{aligned}\right. \tag{4a}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{x}}{1+x^2+y^2}\right) + \frac{x}{1+x^2+y^2}(\overline{x}^2+\overline{y}^2) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{y}}{1+x^2+y^2}\right) + \frac{y}{1+x^2+y^2}(\overline{x}^2+\overline{y}^2) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}; \end{aligned}\right. \tag{4b}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\overline{x}}{dt} - \overline{y}(y\overline{x} - x\overline{y}) = -\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ &\frac{d\overline{y}}{dt} + \overline{x}(y\overline{x} - x\overline{y}) = -\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)\frac{\partial\Phi}{\partial y}; \end{aligned}\right. \tag{4b'}$$

$$\begin{array}{r|l} \dfrac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t} = 2\varrho\overline{\omega} - \dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\Phi + \dfrac{1}{2}q^2\right), & \dfrac{\partial\overline{x}}{\partial t} = 2\varrho\overline{y} - \dfrac{1}{2}(1+x^2+y^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\Phi + \dfrac{1}{2}q^2\right), \\ \dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial t} = -2\varrho\overline{\vartheta} - \dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial\omega}\left(\Phi + \dfrac{1}{2}q^2\right), & \dfrac{\partial\overline{y}}{\partial t} = -2\varrho\overline{x} - \dfrac{1}{2}(1+x^2+y^2)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\Phi + \dfrac{1}{2}q^2\right); \end{array} \tag{5}$$

$$2\varrho = \frac{1}{\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\overline{\omega}\sin\vartheta) - \frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial\omega}\right\}; \tag{6a}$$

$$\begin{aligned} 2\varrho &= \frac{1}{2}(1+x^2+y^2)^2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overline{y}}{1+x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overline{x}}{1+x^2+y^2}\right)\right\} = \\ &= y\overline{x} - x\overline{y} + \frac{1}{2}(1+x^2+y^2)\left(\frac{\partial\overline{y}}{\partial x} - \frac{\partial\overline{x}}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{6b}$$

Составляющие скорости $q = \sqrt{\overline{\vartheta}^2 + \overline{\omega}^2}$ в направлении касательной и нормали станут:

$$\begin{aligned} q_n &= \overline{\omega}\frac{d\vartheta}{ds} - \overline{\vartheta}\sin\vartheta\frac{d\omega}{ds}, \qquad q_n = \frac{2}{1+x^2+y^2}\left(\overline{y}\frac{dx}{ds} - \overline{x}\frac{dy}{ds}\right), \\ q_s &= \overline{\vartheta}\frac{d\vartheta}{ds} + \overline{\omega}\sin\vartheta\frac{d\omega}{ds}, \qquad q_s = \frac{2}{1+x^2+y^2}\left(\overline{x}\frac{dx}{ds} + \overline{y}\frac{dy}{ds}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Кроме этого, для несжимаемой жидкости можно ввести функцию тока $\psi = \int\limits_0^P q_n ds$ и по (4) § 2 главы I получить:

$$\begin{cases} \overline{\vartheta} = \dfrac{d\vartheta}{dt} = -\dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\omega}, & \overline{x} = \dfrac{2}{1+x^2+y^2}\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{2}(1+x^2+y^2)\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \\ \overline{\omega} = \sin\vartheta\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta}, & \overline{y} = \dfrac{2}{1+x^2+y^2}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}(1+x^2+y^2)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \end{cases} \tag{8}$$

$$2\varrho = D\psi = \frac{1}{\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Big) + \frac{\partial}{\partial\omega}\Big(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\Big)\right\} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2} \quad \text{по (4) с. 88,} \tag{9a}$$

$$2\varrho = D\psi = \frac{1}{4}(1+x^2+y^2)^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{4}(1+x^2+y^2)^2\Delta\psi; \tag{9b}$$

$$\Delta\psi = \frac{8\varrho}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

2.2. Простой вихрь и сферический потенциал

Сначала попытаемся удовлетворить уравнению (9a) в § 1, поставив условие, что ψ и ϱ являются *функциями только* ϑ, то есть, согласно (8):

$$\overline{\vartheta} = 0, \quad \overline{\omega} = \frac{d\psi}{d\vartheta} = \psi'(\vartheta).$$

Будем предполагать, что течение осуществляется вдоль параллелей на сфере (вокруг оси CO). В дальнейшем мы будем называть подобное распределение скорости «зональным» или «осесимметричным». Вышеназванное уравнение примет тогда следующий вид:

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\psi}{d\vartheta}\right) = 2\varrho\sin\vartheta. \tag{1}$$

В случае $\varrho = \text{const}$ это уравнение имеет решение:

$$\psi = -4\varrho\ln\sin\frac{\vartheta}{2}, \quad \overline{\omega} = \frac{d\psi}{d\vartheta} = -2\varrho\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}, \quad \overline{\vartheta} = 0. \tag{2}$$

Для этого решения точка O ($\vartheta = 0$) является сингулярностью, так как в ней ψ и $\overline{\omega}$ становятся бесконечными. Величина циркуляции (I, § 3) вдоль параллели, определяемой углом ϑ, равна

$$2R_\vartheta = \int\limits_0^{2\pi} \overline{\omega}\sin\vartheta\, d\omega = 2\pi\overline{\omega}_\vartheta\sin\vartheta = -4\pi\varrho(1+\cos\vartheta).$$

При $\vartheta = 0$ она примет значение

$$2R_0 = -8\pi\varrho,$$

следовательно,

$$R_0 = -4\pi\varrho = m$$

является интенсивностью точечного вихря O (ср. гл. I, с. 90), то есть в соответствии с теоремой II с. 87 суммарная завихренность на сфере действительно $= 4\pi\varrho - R_0 = 0$.

Теорема I. *Каждое зональное течение на сфере, при котором вихревая плотность на всей поверхности сферы, за исключением единственного точечного вихря m в O, постоянна и равна $-\frac{m}{4\pi}$, будем называть «простым вихрем» интенсивности m. Соответствующая функция тока имеет вид*

$$\psi = \frac{m}{\pi} \log \sin \frac{\vartheta}{2},$$

где ϑ означает угловое расстояние до точечного вихря O.

Жидкость равномерно движется вдоль параллелей, причем скорость стремится к бесконечности при приближении к точечному вихрю O, а на противоположном полюсе O' жидкость покоится.

Подобный вихрь можно получить, «срастив» решение (1), имеющее две сингулярности, с решением (1) вида:

$$\psi = \psi_1 = -\alpha \cos\vartheta, \quad \overline{\omega} = \alpha \sin\vartheta, \quad \varrho = \alpha\cos\vartheta = -\psi_1,$$

которое соответствует вращению всей жидкости как твердого тела вокруг оси $O'O$ с угловой скоростью α. «Сращивание» этих двух течений ψ_0 и ψ_1 проведем вдоль параллели $\vartheta = \vartheta_0$, на которой должны быть равны соответствующие скорости:

$$\overline{\omega} = \alpha \sin\vartheta_0 = \frac{m}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2},$$

где

$$\alpha = \frac{m}{4\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}}.$$

Полученное таким образом течение будет задано следующим образом:

$$\psi = \psi_1 \quad (\vartheta < \vartheta^0), \quad \psi = \psi_0 = \frac{m}{\pi} \ln \sin \frac{\vartheta}{2} \quad (\vartheta > \vartheta_0),$$

и чем меньше значение ϑ_0, тем больше это течение будет походить на течение простого вихря, однако скорость вращения останется неизменной.

Но исходная точка O первоначально была произвольной точкой сферы, не обладающей особыми свойствами. Следовательно, мы можем поместить вихрь в произвольную точку P_0; функция тока в этом случае примет вид:

$$\psi = \frac{m}{\pi} \ln \sin \frac{\delta_0}{2} = \frac{m}{\pi} \ln \frac{r_0}{2},$$

где δ_0 — сферическое расстояние, а r_0 — расстояние вдоль хорды от произвольной точки сферы P до P_0. При этом в основу можно положить любую полярную или стереографическую систему координат, правильно выразив δ_0 или r_0 через координаты ϑ, ω или x, y от P. Если теперь мы учтем, что наше основное уравнение $D\psi = 2\varrho$ в переменных ϱ, ψ и их производных является линейным и однородным, так что из двух решений ψ_1, ϱ_1 и ψ_2, ψ_2 всегда можно составить новые решения $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, $c_1\varrho_1 + c_2\varrho_2$, то придем к теореме:

Теорема II. *Если через $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ обозначить сферические расстояния, а через $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — расстояния вдоль хорды от точки P до n точек сферы $P_1, P_2, \ldots, P_n$, то функция*

$$\psi = \frac{m_1}{\pi}\ln\sin\frac{\delta_1}{2} + \frac{m_2}{\pi}\ln\sin\frac{\delta_2}{2} + \ldots + \frac{m_n}{\pi}\ln\sin\frac{\delta_n}{2} = \\ = \frac{m_1}{\pi}\ln\frac{r_1}{2} + \frac{m_2}{\pi}\ln\frac{r_2}{2} + \ldots \frac{m_n}{\pi}\ln\frac{r_n}{2}, \quad (4)$$

называемая также «сферическим потенциалом» n масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$, представляет собой функцию тока такого течения на сфере, в котором точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ являются точечными вихрями с вихревыми интенсивностями $m_1, m2, \ldots, m_n$ и которое в любой другой точке сферы P обладает постоянной *завихренностью:*

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_n = -\frac{m_1}{4\pi} - \frac{m_2}{4\pi} - \ldots - \frac{m_n}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\sum m = -\frac{M}{4\pi}. \quad (5)$$

Такое течение мы назовем течением от «системы вихрей».

Постоянная вихревая плотность ϱ принимает значение 0, если сумма $M = \sum m$ всех интенсивностей обращается в нуль.

Если, например, система состоит лишь из двух вихрей $\pm m$, у которых интенсивности отличаются лишь знаком, то ее функция тока запишется как

$$\psi = \frac{m}{\pi}\ln\frac{\sin\dfrac{\delta_1}{2}}{\sin\dfrac{\delta_2}{2}} = \frac{m}{\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}. \quad (5a)$$

Линии тока задаются уравнением

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{const}$$

и представляют собой окружности, полученные сечением сферы всевозможными плоскостями, проходящими через линию пересечения плоскостей, касающихся сферы в точках P_1 и P_2 [3].

Если же вихри лежат в противоположных точках O, O' ($\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$), тогда функция тока примет вид:

$$\psi = \frac{m}{\pi}\ln\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}, \quad (5b)$$

а скорость будет равной

$$\overline{\vartheta} = 0, \quad \overline{\omega} = \frac{m}{\pi}\frac{1}{\sin\vartheta}.$$

Жидкость течет вдоль параллелей сферы со скоростью, обратно пропорциональной их радиусам.

Теперь применим сферический потенциал, который мы ранее определили для конечного числа точек, для случая постоянного распределения масс по поверхности сферы. А именно пусть $k = k(\vartheta, \omega)$ — функция на сфере, постоянная по крайней мере на некоторых участках. Рассмотрим также следующую величину:

$$M = \int k\, d\sigma, \quad (6)$$

[3] Cp. Lamb, Hydrodynamics, с. 115 и с. 253.

где интегрирование производится по всей поверхности сферы. Разобьем поверхность сферы на подобласти $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots,$, и обозначим через $k_1, k_2, k_3, \ldots$ соответствующие средние значения функции k, а именно:

$$k_1\sigma_1 = \int\limits^{(\sigma_1)} k\,d\sigma, \quad k_2\sigma_2 = \int\limits^{(\sigma_2)} k\,d\sigma, \quad \ldots \tag{7}$$

В каждой подобласти $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ выберем точку $P_1, P_2, \ldots$ и обозначим через $r_1, r_2, \ldots$ расстояния вдоль хорды от переменной точки P до этих точек. Теперь рассмотрим систему вихрей (теорема II, с. 99) с функцией тока

$$\psi' = \frac{k_1\sigma_1}{\pi}\ln\frac{r_1}{2} + \frac{k_2\sigma_2}{\pi}\ln\frac{r_2}{2} + \ldots \tag{8}$$

Постоянная всюду (за исключением точечных вихрей $P_1, P_2, \ldots,$) завихренность имеет вид

$$\varrho' = -\frac{k_1\sigma_1}{4\pi} - \frac{k_2\sigma_2}{4\pi} - \ldots = -\frac{M}{4\pi}. \tag{9}$$

Рассмотрим также одну вторую циркуляции

$$R_\sigma = \frac{1}{2}\int\limits^{(\mathfrak{C})} q_s\,ds = \frac{1}{2}\int\limits^{(\mathfrak{C})} \frac{\partial\psi'}{\partial n}ds$$

вдоль границы $\mathfrak{C}$ подобластей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots,$ образующих область σ. Она будет равна сумме завихренностей в σ, то есть

$$\begin{aligned} R_\sigma = k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + \ldots + \varrho'\sigma = \\ = \int\limits^{(\sigma_1)} k\,d\sigma + \int\limits^{(\sigma_2)} k\,d\sigma + \ldots + \varrho'\sigma = \\ = \int\limits^{(\sigma)} k\,d\sigma + \varrho'\sigma = \int\limits^{(\sigma)} (k+\varrho')d\sigma = \int\limits^{(\sigma)} \Big(k - \frac{M}{4\pi}\Big)d\sigma. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что размеры подобластей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ бесконечно уменьшаются, а их число бесконечно растет, тогда, в конце концов, в пределе участка поверхности C получим:

$$R_C = \int\limits^{(C)} \Big(k - \frac{M}{4\pi}\Big)d\sigma, \tag{10}$$

то есть завихренность рассматриваемого нами течения на границе принимает значение:

$$\varrho = k(\vartheta, \omega) - \frac{M}{4\pi}. \tag{11}$$

Одновременно с этим конечная сумма в (8) переходит в определенный интеграл:

$$\psi = \lim \psi' = \frac{1}{\pi}\int\limits^{(K)} k\ln\frac{r}{2}d\sigma = \frac{1}{\pi}\int\limits^{(K)} k\ln\sin\frac{\delta}{2}d\sigma, \tag{12}$$

где интегрирование распространяется на всю поверхность сферы K, а r и δ обозначают расстояния вдоль хорды и по дуге от точки P до соответствующего элемента $d\sigma$.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема III. *Сферический потенциал*

$$\psi = \frac{1}{\pi}\int\limits^{(K)} k \ln \sin\frac{\delta}{2} d\sigma$$

постоянного массового распределения по поверхности сферы с переменной плотностью $k = k(\vartheta, \omega)$ и общей массой M представляет собой, если рассматривать его как функцию тока, течение жидкости, завихренность ϱ которой в каждой точке имеет значение

$$\varrho = k(\vartheta, \omega) - \frac{M}{4\pi}. \tag{13}$$

Отсюда если $M = \int\limits^{(K)} k\, d\sigma = 0$, то $\varrho = k$ и, следовательно,

$$\psi = \frac{1}{\pi}\int\limits^{(K)} \varrho \ln\frac{r}{2} d\sigma = \frac{1}{\pi}\int\limits^{(K)} \varrho \ln\sin\frac{\delta}{2} d\sigma; \tag{14}$$

одновременно с этим, согласно (4) с. 88, должно быть

$$D\psi = 2\varrho. \tag{15}$$

Таким образом, ψ, заданная формулой (13), является при полученном $\varrho = \varrho(\vartheta, \omega)$ решением дифференциального уравнения (14), и притом единственно возможным решением (по теореме III, с. 89), с точностью до аддитивной постоянной, при условии, что ϱ везде остается конечным. Если же кроме постоянного распределения завихренности ϱ существуют точечные вихри $m_1, m_2, \ldots$ или вихревые линии с плотностью $\gamma_1, \gamma_2, \ldots,$ тогда добавляют соответствующие сферические потенциалы

$$\frac{m_1}{\pi}\ln\sin\frac{\delta_1}{2} + \frac{m_2}{\pi}\ln\sin\frac{\delta_2}{2} + \ldots + \int \gamma_1 \ln\sin\frac{\delta}{2} ds_1 + \ldots$$

и для каждого случая получают функцию тока (с точностью до аддитивной постоянной), но только если, в соответствии с теоремой II § 3, сумма всех вихревых моментов обращается в нуль. Таким образом, получаем следующую теорему:

Теорема III. *Если для течения несжимаемой жидкости на поверхности сферы задано некоторое распределение вихрей, тогда его функция тока (с точностью до аддитивной постоянной) совпадает со сферическим потенциалом соответствующего массового распределения.*

Рассматриваемый здесь сферический потенциал ведет себя на сфере аналогично обычному ньютоновскому потенциалу в пространстве или логарифмическому на плоскости. Следовательно, и здесь действительна теорема:

Теорема IV. *Рассмотрим сферический потенциал зонального распределения масс сегмента сферы (масса равномерно распределена вдоль окружностей). Тогда этот потенциал во всех внешних к C точках изменится лишь, быть может, на одну и ту же константу, если мы переместим массу из сегмента C в центр O.*

То есть пусть $\varrho = \varrho(\vartheta)$ $(\vartheta < \alpha)$ будет плотностью первоначального массового распределения, а $\psi = \psi(\vartheta)$ — его сферическим потенциалом, и далее пусть $\psi_1 = \frac{M}{\pi} \ln \sin \frac{\vartheta}{2} = \psi_1(\vartheta)$ будет потенциалом, порожденным точечной массой M в O. Тогда $\psi_0 = \psi - \psi_1$ станет сферическим потенциалом массового распределения с заданной плотностью ϱ в C и с добавленной точечной массой $-M$ в O. Здесь сумма всех масс, естественно, обращается в ноль, что соответствует течению, образованному точечным вихрем в O, с переменной вихревой плотностью ϱ в C, и нулевой завихренностью в C'. Это течение также зональное с функцией тока $\psi_0 = \psi - \psi_1$, и так как в односвязном участке C', ограниченном линией тока, оно является безвихревым, тогда по теореме III (с. 89) функция тока на этом участке должна быть постоянной, то есть

$$\psi_0 = \psi - \psi_1 = \text{const}, \quad \psi = \psi_1 + \text{const} \quad (\vartheta > \alpha),$$

что и требовалось доказать.

Значение постоянных определяют, вычисляя значение потенциала ψ в точке O' (центре C'), где ψ_1 обращается в нуль:

$$\psi_{O'} = \frac{1}{\pi} \int \varrho \, d\sigma \, \ln \cos \frac{\vartheta}{2} = 2 \int\limits_0^\alpha \varrho \sin \vartheta \, d\vartheta \, \ln \cos \frac{\vartheta}{2}.$$

Если, например, $\varrho = \text{const}$, то есть наш сегмент сферы C *однороден* и обладает массой, тогда

$$M = 2\pi\varrho(1 - \cos\alpha) = 4\pi\varrho \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

то есть вне C' будет

$$\psi_a = 4\varrho \sin^2 \frac{\alpha}{2} \ln \sin \frac{\vartheta}{2} - 2\varrho\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \ln \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right). \tag{15}$$

Чтобы рассчитать потенциал внутри C $(\vartheta < \alpha)$, вообразим сначала, что *вся* сфера однородна и обладает плотностью ϱ, а затем в C' прибавим к плотности величину $-\varrho$. В первом случае потенциал везде постоянен и равен $\overline{\psi} = \psi_0$, то есть, согласно (15), $\overline{\psi} = -2\varrho$ для $\alpha = \vartheta = \pi$, а во втором случае C вновь оказывается *внешним* сегментом, следовательно, потенциал:

$$\psi' = -4\varrho \cos^2 \frac{\alpha}{2} \ln \cos \frac{\vartheta}{2} + 2\varrho\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \ln \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad (\vartheta < \alpha),$$

и для внутреннего потенциала получаем в общем виде:

$$\psi_i = \overline{\psi} + \psi' = -4\varrho \cos^2 \frac{\alpha}{2} \ln \cos \frac{\vartheta}{2} - 2\varrho \sin^2 \frac{\alpha}{2}\left(1 - \ln \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right). \tag{16}$$

На границе $\vartheta = \alpha$ обе формулы дают одно и то же значение:

$$\psi_a = \psi_i = 2\varrho\left(\sin^2 \ln \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \ln \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

2.3. Сохранение центра тяжести

Согласно (9a) с. 97 для сферы выполняется

$$2\varrho = D\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2}.$$

Следовательно

$$2\varrho\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\omega}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\sin\vartheta\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Big)^2-\frac{1}{\sin\vartheta}\Big(\frac{\partial\psi}{\omega}\Big)^2\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\vartheta}(-sin^2\vartheta\overline{\vartheta}\overline{\omega})-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}(\sin\vartheta\overline{\omega}^2-\sin\vartheta\overline{\vartheta}^2). \quad (1)$$

Итак, интегрируя по [4] C и представляя правую часть уравнения в виде криволинейного интеграла по $\mathfrak{C}$, получим:

$$\int\limits^{(C)}2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial\omega}d\sigma=\int\limits^{(\mathfrak{C})}\Big(\frac{1}{2}(\overline{\omega}^2-\overline{\vartheta}^2)\sin\vartheta\,d\vartheta-\overline{\vartheta}\overline{\omega}\sin^2\vartheta\,d\omega\Big). \quad (2)$$

Если C представляет собой поверхность сферы K и поле скорости непрерывно, то правая часть обращается в нуль:

$$\int\limits^{(K)}2\varrho\frac{\partial\psi}{\partial\omega}d\sigma=0, \quad (2a)$$

или, так как в силу (8) с. 97 $\frac{\partial\psi}{\partial\omega}=-\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{d\cos\vartheta}{dt}$ и одновременно $\frac{d}{dt}(\varrho\,d\sigma)=0$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits^{(K)}\varrho\,d\sigma\,\cos\vartheta=0,$$

или

$$L_0=\int\limits^{(K)}\varrho\,d\sigma\,\cos\vartheta=\mathrm{const}.$$

Теперь $\cos\vartheta$ равен проекции радиуса CP точки $P(\vartheta,\omega)$ на ось CO, а выражение $\varrho\,d\sigma$ мы еще на с. 95 назвали «вихревым элементом». Доказана, таким образом, следующая теорема:

Теорема I. *На поверхности сферы сумма произведений вихревых элементов на проекции проведенных к ним радиусов на некоторую фиксированную ось постоянна во времени.*

Итак, если CX, CY, CZ – три попарно ортогональные оси, а ξ, η, ζ — проекции OP на эти оси, то

$$\begin{cases} L_x=\int\limits^{(K)}\xi\varrho\,d\sigma=\mathrm{const},\\ L_y=\int\limits^{(K)}\eta\varrho\,d\sigma=\mathrm{const},\\ L_z=\int\limits^{(K)}\zeta\varrho\,d\sigma=\mathrm{const}.\end{cases} \quad (4)$$

Эти три соотношения независимы друг от друга, и любое другое аналогичное уравнение есть их линейная комбинация. Величины L_x, L_y, L_z являются компонентами вектора, который, будучи отклоненным от центра сферы C, определяет точку S', которую мы назовем «представляющим»

[4] Cp. Poincaré a. a. O. Nr. 65.

центром тяжести вихревых элементов. Координаты ξ_0, η_0, ζ_0 истинного центра тяжести всех элементов $\varrho\, d\sigma$ определяются по формулам

$$\xi_0 = \frac{L_x}{M}, \quad \eta_0 = \frac{L_y}{M}, \quad \zeta_0 = \frac{L_z}{M},$$

где $M = \int\limits^{(K)} \varrho\, d\sigma$, сумма всех вихревых элементов, по теореме II с. 87, равна нулю. Таким образом, истинный центр тяжести окажется в *бесконечности*, однако направление на него будет неизменным со временем:

$$\xi_0 : \eta_0 : \zeta_0 = L_x : L_y : L_z,$$

и при этом из трех независимых соотношений (4) останутся верными лишь два, а величина $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ более не будет постоянной. Во избежание подобного «беспорядка» заменим массовое распределение с плотностью ϱ другим, сумма которого равна не нулю, а единице, предположив плотность равной $\varrho' = \varrho + \frac{1}{4\pi}$, то есть добавим однородное распределение масс с плотностью $\frac{1}{4\pi}$ и общей массой 1. Тогда у центра тяжести этого распределения будут координаты:

$$\begin{aligned}
\xi_0' &= \int\limits^{(K)} \xi' \varrho\, d\sigma = \int\limits^{(K)} \xi\varrho\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int\limits^{(K)} \xi\, d\sigma = \int\limits^{(K)} \xi\varrho\, d\sigma = L_x = \mathrm{const},\\
\eta_0' &= \int\limits^{(K)} \eta' \varrho\, d\sigma = \int\limits^{(K)} \eta\varrho\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int\limits^{(K)} \eta\, d\sigma = \int\limits^{(K)} \eta\varrho\, d\sigma = L_y = \mathrm{const},\\
\zeta_0' &= \int\limits^{(K)} \zeta' \varrho\, d\sigma = \int\limits^{(K)} \zeta\varrho\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int\limits^{(K)} \zeta\, d\sigma = \int\limits^{(K)} \zeta\varrho\, d\sigma = L_z = \mathrm{const},
\end{aligned} \tag{5}$$

то есть он совпадет с определенным выше «представляющим центром тяжести». Итак:

Теорема II. *Если ϱ является вихревой плотностью течения несжимаемой жидкости на полной сфере и если в каждый момент времени рассмотреть центр тяжести S' распределения масс с плотностью $\varrho + \frac{1}{4\pi}$, тогда «представляющий центр тяжести» (всегда лежащий в бесконечности) будет фиксированной точкой в пространстве при всех изменениях распределения скорости. А истинный центр тяжести S всех вихревых элементов, напротив, оказывается в бесконечно удаленной точке того же диаметра CS'.*

3. Стационарные течения

По теореме IV с. 93 течение на поверхности (свободное от сингулярностей) является *стационарным*, если завихренность постоянна вдоль каждой линии тока, то есть если завихренность

$$\varrho = \frac{1}{2} D\psi = f(\psi)$$

есть только функция тока. Запишем это условие для сферы a) в полярных координатах ϑ, ω, b) в стереографических координатах x, y (ср. II § 1):

$$\begin{cases}
a) \quad D\psi \equiv \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta \dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2} = 2f(\psi),\\[2ex]
b) \quad \Delta\psi \equiv \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \dfrac{8f(\psi)}{(1+x^2+y^2)^2}.
\end{cases} \tag{1}$$

Условие (1a) будет выполнено, если $\dfrac{\partial\psi}{\partial\omega} = 0$, то есть если $\psi = \psi(\vartheta)$ является функцией только расстояния между полюсами и, следовательно, постоянна на всех параллелях. Отсюда следует:

Теорема I. *Все «зональные» осесимметричные течения* (*вдоль параллелей сферы*) *стационарны.*

Здесь, как и во всех последующих теоремах, подразумевается отсутствие точечных вихрей, а также то, что жидкость несжимаема и т. д.

За исключением зонального случая, стационарные течения классифицируют преимущественно по свойствам функции f.

Прежде всего, с учетом соотношения (с. 87)

$$\int^{(K)} \varrho\, d\sigma = \int^{(K)} f(\psi) d\sigma = 0,$$

заметим, что у функции f не может быть определенного знака. То есть на всей сфере *не* может быть

$$\varrho = \mathrm{const}, \quad \varrho = c\psi^2 \quad \text{или} \quad \varrho = ce^{g(\psi)}.$$

Самый простой случай, который здесь можно рассмотреть, это тот, когда $f(\psi)$ является *линейной* функцией от ψ. Поскольку ψ определена с точностью до аддитивной постоянной, считаем, что вихревая плотность ϱ равно $k\psi$. Тогда мы получим для ψ дифференциальное уравнение в частных производных:

$$D\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2} = 2k\psi \tag{2a}$$

или

$$\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{8k}{(1+x^2+y^2)^2}\psi. \tag{2b}$$

Это дифференциальное уравнение «*линейно-стационарного течения*», как мы будем называть его сокращенно, идентично тому уравнению, которое определяет, например, эластичные колебания поверхности сферы и играет важную роль в теории потенциала. Его интегрирование осуществляется с помощью сферических функций («лапласовы функции», «функции поверхности сферы», «сферические гармоники»), а его теория неоднократно рассматривалась в различных сочинениях, например, в упомянутой ранее книге Ламба или в работе Максвелла «Трактат по электричеству и магнетизму». Мы же ограничимся лишь тем, что кратко изложим важнейшие положения этой теории, необходимые нам, и укажем их гидродинамическое значение для решения поставленной здесь задачи.

В первую очередь следует учесть, что наше дифференциальное уравнение линейно и однородно и, следовательно, линейная комбинация решений также является решением. Итак:

Теорема II. *Сложив соответствующие функции тока или вектора скоростей двух линейно-стационарных течений, относящихся к одному и тому же значению k, или, проще говоря, к одному «классу», можно вновь получить линейно-стационарные течения этого же класса.*

Среди решений $\psi = \psi(\vartheta, \omega)$ из (2a) в первую очередь интересны функции $\psi = \psi(\vartheta)$ одного переменного ϑ, соответствующие зональным течениям. Они должны удовлетворять обычному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta \frac{d\psi}{d\vartheta} - 2k\psi = 0. \tag{3}$$

Однако это дифференциальное уравнение имеет непрерывное решение при $\theta \in [0; \pi]$ лишь в том случае, если

$$-2k = n(n+1), \tag{4}$$

а n — положительное *целое число*, указывающее «класс» линейно-стационарного течения. То есть уравнение должно иметь вид

$$\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta \frac{d\psi}{d\vartheta} + n(n+1)\psi = 0, \tag{3$'$}$$

а искомое решение является тогда «n-й функцией сферы» (или «полиномом Лежандра») $\cos\psi$:

$$\psi = P_n(\cos\vartheta), \quad \overline{\omega} = \frac{d\psi}{d\vartheta} = -\sin\vartheta\, P_n'(\cos\vartheta), \tag{5}$$

где P_n — целая функция n-й степени.

В случае $n = 0$ получаем решение $\psi = \mathrm{const}$, то есть жидкость покоится; при $n = -k = 1$ соответствующее решение

$$\psi = -\varrho = -\alpha\cos\vartheta, \quad \overline{\omega} = \alpha\sin\vartheta$$

есть вращение всей жидкости как твердого тела вокруг оси OO' с угловой скоростью α, и лишь функции сферы высшего порядка $P_2, P_3, \ldots$ дают течения, сопровождающиеся «деформацией» жидкости.

Как известно, на отрезке $[-1; 1]$ полином $P_n(x)$ имеет n корней, $P_n'(x)$ — $n-1$ корней, и в таком случае всегда существуют (за исключением полюсов O и O') параллели, на которых обращаются в нуль функция тока и завихренность ϱ, и отдельно от них существует $n-1$ параллелей, на которых обращается в нуль скорость. Обе системы параллелей симметричны относительно экватора $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ (на котором в зависимости от того, четное ли n или нечетное, будет $\psi = 0$ и $\varrho = 0$ или $\omega = 0$) и делят всю поверхность сферы на $n+1$ или n зон, на которых ϱ или ω попеременно отрицательны или положительны. На двух симметричных параллелях по обе стороны экватора получается, что или значения вихревой плотности равны, а значения скорости противоположны (при четном n), или значения скоростей равны, а значения вихревой плотности противоположны (при нечетном n).

На рис. 3 для $n = 1, 2, 3, 4$ (в ортографической проекции) параллели $\varrho = 0$, $\psi = 0$ обозначены сплошной линией, параллели $\overline{\omega} = 0$ — пунктирной линией, направление скорости указано стрелками, а участки $\varrho > 0$ заштрихованы.

Но поскольку в качестве полюса O могла быть взята произвольная точка сферы, а в качестве решения ψ уравнения (2) — произвольная линейная комбинация решений для каждого $2k = -n(n+1)$, то, сложив друг с другом несколько течений, соответствующих разным полюсам, можно получить новые, не осесимметричные течения:

$$\psi_n = c_1 P_n(\cos\delta_1) + c_2 P_n(\cos\delta_2) + \ldots, \tag{6}$$

где $\delta_1, \delta_2, \ldots$ означают сферические расстояния до полюсов $P_1, P_2, \ldots$

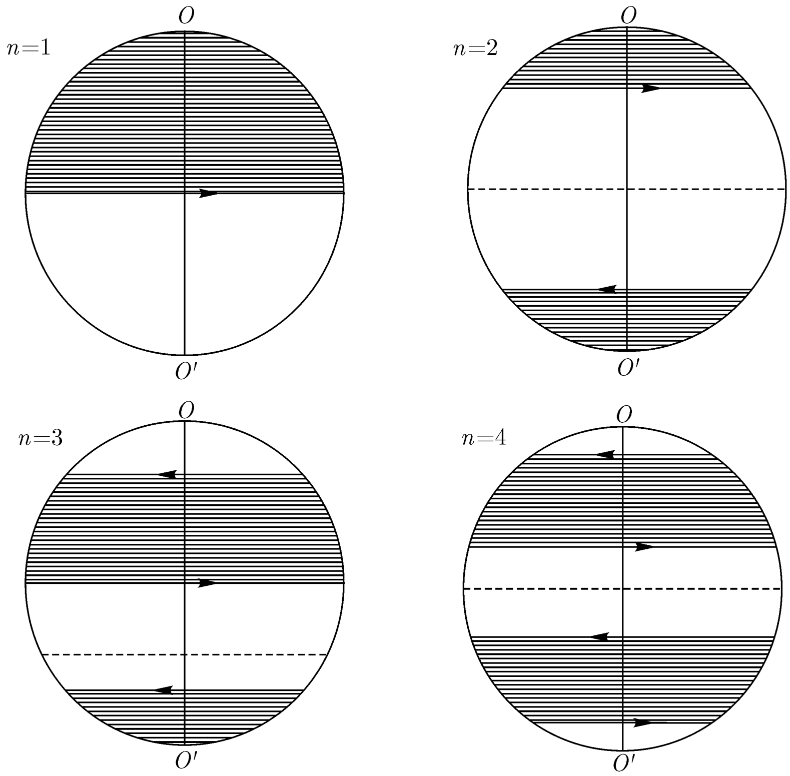

Рис. 3

Как известно, дифференциальное уравнение (2) дает однозначное и непрерывное решение для всей сферы *только* в случае (4) $2k = -n(n+1)$, а общее решение этого свойства является целой рациональной функцией n-го порядка $\cos\vartheta$, $\cos\omega$ и $\sin\omega$, которую можно представить посредством $2n+1$ произвольных постоянных вида:

$$\psi = \psi_n = a_0 P_n(\cos\vartheta) + \sum_{r=1}^{n} \big(a_r \cos(r\omega) + b_r \sin(r\omega)\big) \sin^r\vartheta\, P_n^{(r)}(\cos\vartheta), \tag{7}$$

где $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ — постоянные, а $P_n^{(r)}(x)$ — r-я производная от $P_n(x)$. Эта функция на сфере называется «лапласовой функцией» или «функцией поверхности сферы».

Таким образом, мы получаем теорему:

Теорема III. *На сфере не существует иных постоянных линейно-стационарных течений, кроме течений n-го класса ($2k = -n(n+1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$), и общее течение n-го класса можно представить в виде суммы $2n+1$ независимых основных течений, все функции тока которых представлены «функциями поверхности сферы» n-го порядка.*

Течения 1-го класса

$$\psi = \psi_1 = a_0 \cos\vartheta + a_1 \sin\vartheta\cos\omega + b_1 \sin\vartheta \sin\omega = a_0\zeta + a_1\xi + b_1\eta$$

(где ξ, η, ζ — декартовы координаты с началом отсчета в центре сферы) являются лишь твердотельными *вращениями* вокруг произвольного диаметра и всегда представляют собой суперпозицию трех различных вращений.

Для $n > 1$ вся поверхность сферы распадается на некоторое количество подобластей, внутри которых функции тока и вихревая плотность попеременно отрицательны и положительны, а на границах, образованных линиями тока, обращаются в нуль. Самый простой вид эти участки принимают при «основном течении»

$$\psi = \psi_{n,r} = \sin^r \vartheta \, P_n^{(r)}(\cos \vartheta) \cos(r\omega) \quad (r = 0, 1, \ldots, n). \tag{7a}$$

Здесь ψ и ϱ обращаются в нуль (за исключением рассмотренного выше зонального случая $r = 0$, $\psi = P_n(\cos \vartheta)$)

1) на всех r меридианах $\omega = \frac{\pi}{2r}, \frac{3\pi}{2r}, \ldots, (2r-1)\frac{\pi}{2r}$, для которых $\cos(r\omega) = 0$,

2) на всех $n - r$ параллелях $\vartheta = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$, для которых $P_n^{(r)}(\cos \vartheta) = 0$.

Итак, поверхность сферы распадается здесь на систему $r(n - r + 1)$ прямоугольных сферических четырехугольников и треугольников (при O и O'), границы которых образованы линиями тока, движение вдоль которых происходит попеременно в положительном и отрицательном направлении ($\varrho \gtrless 0$), и в углах которых жидкость находится в состоянии покоя ($\overline{\vartheta} = 0$, $\overline{\omega} = 0$). В проекции Меркатора получается тогда изображение, напоминающее шахматную доску (см. рисунок 4).

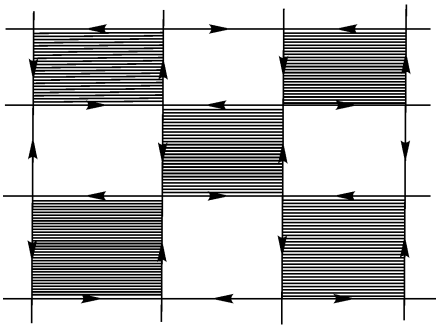

Рис. 4

Для других функций поверхности сферы (6) подобласти становятся менее регулярными, но суть процесса остается той же самой. Например, используя функции Ламе, мы могли бы разделить поверхность сферы софокусными коническими сечениями, но на этом мы не будем останавливаться.

Если бы вместо полной сферы мы рассматривали ограниченный *участок* C со всеми возможными там стационарными течениями, то столкнулись бы с краевой задачей для дифференциального уравнения (1) или (2). Так как граница участка всегда является линией тока, то тогда нам пришлось бы решать наше дифференциальное уравнение в частных производных с учетом условия на границе $\psi = \psi_0 = \text{const}$. Для дифференциального уравнения (2b) эта задача фактически решена Шварцем (юбилейная статья «О проблеме вариационного исчисления и т. д.», 1885). Решение краевой задачи для какого-либо $\psi_0 > 0$ всегда возможно (для произвольного k), если взять участок C не слишком большого размера. И напротив, для каждого участка C всегда существует такое значение k, при котором на всей границе $\psi = \psi_0 = 0$. При аналогичных условиях краевая задача решена Пикаром (Liouville Journ., сер. IV, том 6, с. 145) и для дифференциального уравнения (1b), если функция f не линейна; таким образом, стационарные, но не линейно-стационарные течения возможны, по крайней мере, в малых ограниченных областях поверхности сферы. Но вопрос, существуют ли такие общие стационарные течения на полной сфере, до сих пор считается открытым. Во всяком случае для исследования этой проблемы нужен абсолютно иной метод, нежели метод аппроксимации Шварца—Пикара.

Следующими близкими стационарным течениям являются «*вращательно-стационарные*», то есть такие течения, при которых все линии тока хотя, быть может, и не остаются постоянными, но все же претерпевают равномерное вращение вокруг неподвижной оси, или, иными словами, это течения, которые кажутся стационарными относительно равномерно вращающейся системы координат.

Пусть $\psi(\vartheta,\omega)$ — истинная функция тока, и (с. 106) вращение определяется функцией тока $\psi_1 = -\alpha\cos\vartheta$, тогда

$$\psi - \psi_1 = \psi + \alpha\cos\vartheta$$

будет «мнимой» или «относительной функцией тока» для вращающейся сферы, и теперь на «мнимых» линиях тока $\psi - \psi_1 = \text{const}$. Если «мнимое течение» стационарно, истинная завихренность $\varrho = \frac{1}{2}D\psi$ должна быть постоянной (так как она постоянна для каждой частицы жидкости), для того чтобы завихренность во вращающейся системе координат оставалась неизменной. Таким образом, имеем

$$\varrho = \frac{1}{2}D\psi = f(\psi - \psi_1) = f(\psi + \alpha\cos\vartheta). \tag{8}$$

Прежде всего мы рассмотрим здесь, так же как для дифференциального уравнения (1), частный случай

$$f(u) = ku = -\frac{n(n+1)}{2}u,$$

то есть уравнение

$$D\psi + n(n+1)\psi = -n(n+1)\alpha\cos\vartheta. \tag{9}$$

Частное решение этого уравнения является новым вращением

$$\psi_0 = c\cos\vartheta = -\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}\alpha\cos\vartheta, \tag{10}$$

в чем легко можно убедиться, заметив, что $D\cos\vartheta = -2\cos\vartheta$, а общее решение (9) получают, прибавляя к этому частному ψ_0 общее решение ψ' однородного дифференциального уравнения (2), то есть, с учетом (7):

$$\psi = \psi_0 + \psi' = -\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}\alpha\cos\vartheta + a_0 P_n(\cos\vartheta) + \\ + \sum_{r=1}^{n}(a_r\cos r\omega + b_r\sin r\omega)\sin^r\vartheta\, P_n^{(r)}(\cos\vartheta). \tag{11}$$

И таким образом, мы получаем теорему:

Теорема IV. *Каждому линейно-стационарному течению $2k = -n(n+1)$ можно сопоставить вращательно-стационарное течение с угловой скоростью α, всего лишь добавив к нему вращение со скоростью $c = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}\alpha$ вокруг той же самой оси. Или иными словами: композиция линейно-стационарное течение n-го класса и произвольного вращения со скоростью c есть равномерное вращение вокруг той же самой оси с угловой скоростью $\alpha = c\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$.*

Теория вращательно-стационарных течений интересна и с физической точки зрения, поскольку ее можно применить к стационарным течениям воздуха или воды на вращающейся Земле.