УДК 517.9:514.7

Представление Лакса систем кирального типа

А. В. Баландин
Механико-математический факультет
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: balandin@mm.unn.ru

О. Н. Кащеева
Кафедра математики
Волжская государственная академия водного транспорта
603600, Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5
E-mail: pakhareva@rambler.ru

Получено 27 февраля 2007 г.

Для систем кирального типа получены необходимые условия существования представления Лакса со значениями в компактных алгебрах Ли. Кроме того, представлены новые интегрируемые системы, близкие к системам WZNW (Wess–Zumino–Novikov–Witten) и неабелевым аффинным системам Тоды. Одна из этих систем является новым интегрируемым обобщением уравнения sin-Gordon.

Ключевые слова: представление Лакса, системы кирального типа, симметрическое пространство, алгебра Ли, нелинейные сигма-модели.

A. V. Balandin, O. N. Kashcheeva
Lax Representation of Chiral-Type Systems

The conditions which are necessary for chiral-type systems to admit the Lax representation with compact Lie algebras are obtained in this paper. We also establish new integrable systems which are similar to WZNW (Wess–Zumino–Novikov–Witten) systems and non-abelian affine Toda models. One of such a system is a new integrable extension of the well known sin-Gordon equation.

Keywords: Lax representation, WZNW systems, symmetric spaces, Lie algebras, nonlinear sigma-models.
Mathematical Subject Classifications: 35Q58, 37K10, 37K25.

1. Введение

Системами кирального типа называются (см., например, [1]) системы дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными следующего вида:

$$U^\alpha_{xy} + G^\alpha_{\beta\gamma} U^\beta_x U^\gamma_y + Q^\alpha = 0. \qquad (1.1)$$

Здесь греческие индексы α, β, γ изменяются от 1 до n; индексы x и y обозначают частные производные по соответствующим переменным; коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}, Q^\alpha$ являются гладкими функциями переменных $U^1, U^2, \ldots, U^n$ необходимого порядка. Также предполагается выполненным правило суммирования по одинаковым индексам.

Непосредственная проверка показывает, что невырожденная замена вида $\widetilde{U}^\alpha = \widetilde{U}^\alpha(U^\beta)$ переводит систему (1.1) в систему того же вида, причем функции $G^\alpha_{\beta\gamma}$ изменяются по закону преобразования коэффициентов аффинной связности, а Q^α — как координаты векторного поля. Таким образом, можно считать, что система (1.1) определяет на некотором n-мерном многообразии V^n аффинную связность и векторное поле, которые в локальной системе координат (U^α) заданы соответственно коэффициентами $G^\alpha_{\beta\gamma}$ и Q^α. Такую связность будем называть связностью, ассоциированной с системой (1.1).

Поскольку система определяется связностью и векторным полем, то представляется желательным сформулировать условия существования представления Лакса системы именно в этих терминах. В разделе 2 предложен способ, позволяющий при некоторых дополнительных ограничениях на представление Лакса указать такие условия. Для этого оказалось полезным каждому представлению Лакса сопоставить бесконечное семейство тензорных полей Киллинга относительно ассоциированной связности.

Если система (1.1) является системой уравнений Эйлера–Лагранжа, то лагранжиан для нее может быть записан в следующем виде:

$$L = g_{\alpha\beta}(U^\delta) U^\alpha_x U^\beta_y + a_{\alpha\beta}(U^\delta) U^\alpha_x U^\beta_y + Q(U^\delta), \qquad (1.2)$$

где $g_{\alpha\beta}$ — невырожденная симметрическая матрица, $a_{\alpha\beta}$ — кососимметрическая матрица и Q — гладкая функция переменных $U^1, U^2, \ldots, U^n$. Заметим, что системы Эйлера–Лагранжа для лагаранжиана (1.2) называются общими нелинейными сигма-моделями (см., например, [2], [3]). Эти системы содержат важный класс, называемый системы WZNW (Wess–Zumino–Novikov–Witten) ([4], [5], [6], [7]).

Напомним, что системы WZNW могут быть определены следующим образом. Пусть H — полупростая группа Ли, (U^α) — локальная система координат на H и $\Phi^\alpha = T^\alpha_\beta dU^\beta$ — базис левоинвариантных форм на H. Пусть также $\tilde{T}^\alpha_\beta$ — обратная к T^α_β матрица. Далее запятая в индексах будет обозначать частные производные, т.е.

$$T^\delta_{\beta,\gamma} = \frac{\partial T^\delta_\beta}{\partial U^\gamma}.$$

Теперь определим коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$ при помощи равенства

$$G^\alpha_{\beta\gamma} = \tilde{T}^\alpha_\delta T^\delta_{\beta,\gamma}. \qquad (1.3)$$

Заметим, что коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$ являются коэффициентами первой плоской канонической связности на группе Ли H (см., например, [8]).

Система WZNW, ассоциированная с полупростой группой Ли H — это система (1.1), для которой $Q^\alpha = 0$ и $G^\alpha_{\beta\gamma}$ определяются равенством (1.3).

Чтобы записать лагранжиан для систем WZNW, введем следующие обозначения. Пусть $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы группы H относительно базиса Φ^α и $h^0_{\alpha\beta}$ — метрика Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{h}$ группы Ли H относительно двойственного базиса. Определим 3-форму Ψ при помощи равенства $\Psi = \frac{2}{3}h^0_{\sigma\delta}C^\sigma_{\varphi\psi}T^\delta_\alpha T^\varphi_\beta T^\psi_\gamma dU^\alpha \wedge dU^\gamma \wedge dU^\beta$. Форма Ψ замкнута в силу тождества Якоби для структурных констант, поэтому существует (по крайней мере локально) 2-форма $\sigma = a_{\alpha\beta}dU^\alpha \wedge dU^\beta$ такая, что

$$d\sigma = \frac{2}{3}h^0_{\alpha\delta}C^\delta_{\beta\gamma}\Phi^\alpha \wedge \Phi^\gamma \wedge \Phi^\beta.$$

Теперь непосредственная проверка показывает, что уравнения Эйлера для лагранжиана

$$L = h^0_{\gamma\delta}T^\gamma_\alpha T^\delta_\beta U^\alpha_x U^\beta_y + a_{\alpha\beta}U^\alpha_x U^\beta_y.$$

совпадают с системой WZNW, ассоциированной с группой H.

Заметим, что уравнения Эйлера для лагранжиана

$$L = h^0_{\gamma\delta}T^\gamma_\alpha T^\delta_\beta U^\alpha_x U^\beta_y$$

называются уравнениями главных киральных полей на группе Ли H.

В случае более общего лагранжиана

$$L = h^0_{\gamma\delta}T^\gamma_\alpha T^\delta_\beta U^\gamma_x U^\delta_y + ka_{\alpha\beta}U^\alpha_x U^\beta_y, \quad k = \mathrm{const},$$

уравнения Эйлера называются модифицированными уравнениями главных киральных полей (см., например, [9]). Представление Лакса для этих систем также указано в [9].

Другое представление Лакса для модифицированных уравнений главных киральных полей приведено в разделе 3.

В разделе 4 предложена модификация конструкции Лезнова–Савельева. Как известно [10], с помощью конструкции Лезнова–Савельева, в частности, можно с каждым симметрическим пространством G/H ассоциировать интегрируемые системы кирального типа. Системы, полученные таким образом, называются неабелевыми аффинными системами Тоды (см., например, [3], [11]). В разделе 4 показано, что, в случае когда H — прямое произведение простых групп Ли, предложенная модификация конструкции Лезнова–Савельева позволяет получить новые интегрируемые лагранжевы системы. Здесь же рассмотрен пример системы, ассоциированной с симметрическим пространством $SO(6)/(SO(3) \times SO(3))$. Для данного примера выполнена редукция к системе, которую можно рассматривать как новое интегрируемое обобщение уравнения sin-Gordon.

Далее в этом разделе указан способ, при помощи которого в ряде случаев из двух интегрируемых лагранжевых систем кирального типа можно получить новую интегрируемую лагранжеву систему. Приведены примеры систем, ассоциированных с симметрическими пространствами $SO(p+3)/(SO(p) \times SO(3)), SO(p+2)/(SO(p) \times SO(2))$.

2. Необходимые условия существования представления Лакса

Пусть G – группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и базисом левоинвариантных форм Θ^a, $a = \overline{1,r}$. Тогда, как известно, справедливы структурные уравнения

$$d\Theta^a = C^a_{bc}\Theta^c \wedge \Theta^b, \tag{2.1}$$

где $C^a_{bc} = -\frac{1}{2}\overline{C}^a_{bc}$, $\overline{C}^a_{bc}$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно базиса, двойственного к базису форм Θ^a.

Представление Лакса со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ для системы (1.1) будем понимать как наличие функций $A^a = A^a(U^\alpha, U^\beta_x, \lambda), B^a = B^a(U^\alpha, U^\beta_y, \lambda)$ (здесь λ — произвольный параметр) таких, что подстановка выражений для форм

$$\Theta^a = A^a dx + B^a dy \tag{2.2}$$

в уравнения (2.1) приводит к системе, эквивалентной системе (1.1).

Далее в статье ограничимся изучением представлений Лакса, для которых алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является вещественной полупростой, а функции A^a и B^a зависят от производных не выше первого порядка. Более того, будем предполагать, что

$$A^a = A^a_\delta U^\delta_x + M^a, \;\; B^a = B^a_\delta U^\delta_y + N^a,$$

где $A^a_\delta, B^a_\delta, M^a, N^a$ — гладкие функции от $U^1, ..., U^n$ и некоторого параметра λ. Эти ограничения объясняются тем, что известные авторам представления Лакса систем кирального типа могут быть приведены к такому виду.

Лемма 1. *Пусть система* (1.1) *допускает представление Лакса со значениями в алгебре Ли* $\widehat{\mathfrak{g}}$ $(\dim \widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{r})$*, т.е. существуют гладкие функции* $A^{\widehat{a}}_\delta, B^{\widehat{a}}_\delta, M^{\widehat{a}}, N^{\widehat{a}}$ *такие, что подстановка форм*

$$\Theta^{\widehat{a}} = (A^{\widehat{a}}_\delta U^\delta_x + M^{\widehat{a}})dx + (B^{\widehat{a}}_\delta U^\delta_y + N^{\widehat{a}})dy \tag{2.3}$$

в уравнения

$$d\Theta^{\widehat{a}} = C^{\widehat{a}}_{\widehat{b}\widehat{c}} \Theta^{\widehat{c}} \wedge \Theta^{\widehat{b}} \tag{2.4}$$

приводит к системе, эквивалентной системе (1.1). *Здесь* $C^{\widehat{a}}_{\widehat{b}\widehat{c}} = -\frac{1}{2}\overline{C}^{\widehat{a}}_{\widehat{b}\widehat{c}}, \overline{C}^{\widehat{a}}_{\widehat{b}\widehat{c}}$ *— структурные константы алгебры* $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Тогда система (1.1) *также допускает представление Лакса со значениями в* r*-мерной алгебре Ли* $\mathfrak{g}$*, удовлетворяющее следующему дополнительному условию:* $\operatorname{rang}||A^a_\delta - B^a_\delta|| \geqslant n$*, где* $A^a_\delta = A^a_\delta(U^\gamma, \lambda)$*,* $B^a_\delta = B^a_\delta(U^\gamma, \lambda)$*,* $M^a = M^a(U^\gamma, \lambda), N^a = N^a(U^\gamma, \lambda)$*,* $(a = \overline{1, r})$ *— функции, определяющие представление Лакса со значениями в* $\mathfrak{g}$*, т. е. подстановка выражений*

$$\Theta^a = (A^a_\delta U^\delta_x + M^a)dx + (B^a_\delta U^\delta_y + N^a)dy, \tag{2.5}$$

в уравнения

$$d\Theta^a = C^a_{bc}\Theta^c \wedge \Theta^b \tag{2.6}$$

приводит к системе, эквивалентной системе (1.1).

Доказательство.

Пусть формы (2.3) определяют представление Лакса с параметром λ. Не ограничивая общности, можно предполагать, что параметр λ изменяется в некоторой окрестности нуля, так как этого всегда можно добиться при помощи соответствующей замены. При фиксированном произвольном значении параметра λ подстановка (2.3) в (2.4) приводит к линейной комбинации уравнений системы (1.1). При этом, вообще говоря, разные уравнения системы могут получаться при разных значениях параметра λ. Но существует, по крайней мере, конечное число k значений параметра $\lambda_1, \lambda_2, \dots\lambda_k$, при которых получаются все уравнения системы (1.1). Тогда, выбирая в качестве $\mathfrak{g}$ произведение k экземпляров алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ и записывая для i-го экземпляра $\widehat{\mathfrak{g}}$ представление Лакса с учетом замены $\lambda \to \lambda + \lambda_i$, получим представление Лакса со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Теперь подстановка (2.5) в (2.6) при $\lambda = 0$ дает все уравнения системы (1.1), причем коэффициентами при уравнениях системы (1.1) будут как раз элементы матрицы $||A^a_\delta - B^a_\delta||$. Отсюда следует, что $\mathrm{rang}\,||A^a_\delta - B^a_\delta|| \geqslant n$ при $\lambda = 0$. Более того, $\mathrm{rang}\,||A^a_\delta - B^a_\delta|| \geqslant n$ при λ из некоторой окрестности нуля, т.к. функции A^a_δ, B^a_δ непрерывно зависят от параметра.

Заметим, что алгебра $\mathfrak{g}$ также полупроста, т.к. $\mathfrak{g}$ — прямое произведение k экземпляров полупростой алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$. Лемма доказана.

Определение 1. Представление Лакса (2.5), (2.6) со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ будем называть *расширенным представлением Лакса,* если $rang||A^a_\delta - B^a_\delta|| \geqslant n$.

Для дальнейшего будут полезны обозначения $S^a_\beta = \frac{1}{2}(A^a_\beta - B^a_\beta)$, $P^a_\beta = \frac{1}{2}(A^a_\beta + B^a_\beta)$.

Лемма 2. *Пусть функции $A^a_\delta, B^a_\delta, M^a, N^a$ определяют представление Лакса* (2.5),(2.6) *со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ для системы* (1.1). *Тогда функции $S^a_\delta, P^a_\delta, M^a, N^a$ удовлетворяют условиям*

$$S^a_\delta G^\delta_{\beta\gamma} = S^a_{(\beta,\gamma)} + P^a_{[\beta,\gamma]} + C^a_{bc}(-S^c_\beta S^b_\gamma + P^c_\beta P^b_\gamma + 2S^c_{(\beta}P^b_{\gamma)}), \tag{2.7}$$

$$S^a_\delta Q^\delta = C^a_{bc} M^c N^b, \tag{2.8}$$

$$M^a_{,\delta} = 2C^a_{bc}(P^c_\delta - S^c_\delta)M^b, \tag{2.9}$$

$$N^a_{,\delta} = 2C^a_{bc}(P^c_\delta + S^c_\delta)N^b, \tag{2.10}$$

$$M^b[C^a_{bg}(P^g_{[\delta,\gamma]} - S^g_{[\delta,\gamma]}) + C^a_{gb}C^g_{cd}(P^d_\delta P^c_\gamma + S^d_\delta S^c_\gamma - 2S^d_{[\delta}P^c_{\gamma]})] = 0,$$

$$N^b[C^a_{bg}(P^g_{[\delta,\gamma]} + S^g_{[\delta,\gamma]}) + C^a_{gb}C^g_{cd}(P^d_\delta P^c_\gamma + S^d_\delta S^c_\gamma + 2S^d_{[\delta}P^c_{\gamma]})] = 0.$$

Доказательство получается непосредственной проверкой.

Нетрудно видеть, что при помощи представления Лакса системы (1.1) можно определить на многообразии V^n бесконечное семейство тензорных полей.

Действительно, пусть система (1.1) допускает представление Лакса (2.5), (2.6) со значениями в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда для любого полилинейного отображения

$$f : \underbrace{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g}}_{q} \to \mathbb{R}$$

определим на пространстве V^n тензорное поле $F_{\delta_1\ldots\delta_q}$, полагая

$$F_{\delta_1\ldots\delta_q} = f(S_{\delta_1}, \ldots, S_{\delta_q}), \tag{2.11}$$

где S_{δ_i} — вектор с координатами $S^a_{\delta_i}$ $(i = \overline{1,q})$, индексы δ_i принимают значения от 1 до n.

Теорема 1. *Пусть система* (1.1) *допускает представление Лакса* (2.5), (2.6) *со значениями в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *и* f — *симметрическое* Ad-*инвариантное отображение.*

Тогда симметрический тензор, определенный равенством (2.11), *удовлетворяет условию*

$$\nabla_{(\beta}F_{\delta_1\ldots\delta_q)}=0. \tag{2.12}$$

Здесь $\nabla_\beta F_{\delta_1\ldots\delta_q}$ — *ковариантная производная тензора* $F_{\delta_1\ldots\delta_q}$ *относительно связности на* V^n, *ассоциированной с системой* (1.1), *т.е. определенной коэффициентами* $G^\delta_{\beta\gamma}$.

Доказательство.

Симметрируя и альтернируя (2.7) по индексам β и γ, получим

$$\nabla_{(\gamma}S^a_{\beta)}=2C^a_{bc}S^c_{(\beta}P^b_{\gamma)}, \tag{2.13}$$

$$\nabla_{[\gamma}P^a_{\beta]}=(S^a_\delta-P^a_\delta)G^\delta_{[\beta\gamma]}+C^a_{bc}(P^b_\beta P^c_\gamma-S^b_\beta S^c_\gamma).$$

Из (2.13) следует

$$\nabla_\gamma S^a_\beta=2C^a_{bc}S^c_\beta P^b_\gamma+D^a_{\beta\gamma}, \tag{2.14}$$

где

$$D^a_{(\beta\gamma)}=0. \tag{2.15}$$

Найдем ковариантную производную тензора $F_{\delta_1\ldots\delta_q}$, учитывая (2.14):

$$\begin{aligned}\nabla_\beta F_{\delta_1\ldots\delta_q}&=\nabla_\beta f(S_{\delta_1},...,S_{\delta_q})=f(\nabla_\beta S_{\delta_1},S_{\delta_2},...,S_{\delta_q})+\\&+f(S_{\delta_1},\nabla_\beta S_{\delta_2},...,S_{\delta_q})+...+f(S_{\delta_1},S_{\delta_2},...,\nabla_\beta S_{\delta_q})=\\&=f([S_{\delta_1},P_\beta],S_{\delta_2},...,S_{\delta_q})+f(D_{\delta_1\beta},S_{\delta_2},...,S_{\delta_q})+\\&+f(S_{\delta_1},[S_{\delta_2},P_\beta],...,S_{\delta_q})+f(S_{\delta_1},D_{\delta_2\beta},...,S_{\delta_q})+...\\&+f(S_{\delta_1},S_{\delta_2},...,[S_{\delta_q},P_\beta])+f(S_{\delta_1},S_{\delta_2},...,D_{\delta_q\beta}).\end{aligned}$$

Известно (см., например, [8]), что для любого Ad-инвариантного отображения f и любых $Y,X_1,...,X_q\in\mathfrak{g}$, справедливо равенство

$$\begin{aligned}&f([Y,X_1],X_2,...,X_q)+f(X_1,[Y,X_2],X_q)+...\\&+f(X_1,X_2,...[Y,X_q])=0.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Из (2.16) следует

$$\begin{aligned}\nabla_\beta F_{\delta_1\ldots\delta_q}&=f(D_{\delta_1\beta},S_{\delta_2},...,S_{\delta_q})+\\+f(S_{\delta_1},D_{\delta_2\beta},...,S_{\delta_q})&+...+f(S_{\delta_1},S_{\delta_2},...,D_{\delta_q\beta}).\end{aligned}$$

Симметрируя последнее равенство по всем индексам, получим (2.12), так как

$$f(D_{(\delta_1\beta},S_{\delta_2},...,S_{\delta_q)})=f(D_{((\delta_1\beta)},S_{\delta_2},...,S_{\delta_q)})=0$$

в силу (2.15). Теорема доказана.

Замечание 1. Напомним, что симметрический тензор $F_{\delta_1\ldots\delta_q}$, удовлетворяющий условию (2.12), называется тензором Киллинга ранга q (см., например, [12]). Поэтому из теоремы 1 следует, что представление Лакса системы (1.1) определяет на пространстве V^n бесконечное семейство тензорных полей Киллинга относительно связности, ассоциированной с системой (1.1).

Замечание 2. Условие (2.12) совпадает с условием существования полиномиального интеграла геодезических на пространстве V^n аффинной связности, ассоциированной с системой.

Несмотря на то что существование ненулевых тензорных полей Киллинга является некоторым ограничением на аффинную связность пространства V^n, в общем случае нельзя утверждать, что тензоры Киллинга, построенные с помощью теоремы 1, будут ненулевыми.

Оказывается, что существование ненулевого тензорного поля Киллинга можно гарантировать в случае представления Лакса со значениями в компактной алгебре Ли.

Теорема 2. *Пусть система* (1.1) *допускает представление Лакса со значениями в компактной алгебре Ли.*

Тогда на пространстве V^n аффинной связности, ассоциированной с системой, существует поле положительно определенного тензора Киллинга $F_{\alpha\beta}$ ранга 2.

Доказательство.

В силу леммы 1 существует расширенное представление (2.5), (2.6) со значениями компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, поскольку алгебра $\mathfrak{g}$ — прямое произведение компактных алгебр.

Положим

$$F_{\alpha\beta} = -g^0_{ab} S^a_\alpha S^b_\beta = -(S_\alpha, S_\beta), \tag{2.17}$$

где g^0_{ab} — метрика Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. Теперь из теоремы 1 следует, что тензор $F_{\alpha\beta}$, определенный равенством (2.17), является тензором Киллинга, т. к. метрика Киллинга Ad-инвариантна. Из определения расширенного представления следует, что $\operatorname{rang}||S^a_\alpha|| \geqslant n$, т.е. векторы S_α — линейно независимы. Отсюда получим, что $F_{\alpha\beta}$ — положительно определенный тензор, так как $\mathfrak{g}$ — компактна и

$$F_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = -g^0_{ab} S^a_\alpha S^b_\beta X^\alpha X^\beta = -g^0_{ab}(S^a_\alpha X^\alpha)(S^b_\beta X^\beta) > 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Очевидно, что условие, указанное в теореме 2, не является содержательным, если ассоциированная связность (собственно) риманова. Действительно, в этом случае в качестве положительно определенного тензора Киллинга ранга 2 можно выбрать метрику.

Теорема 3. *Пусть система* (1.1) *допускает представление Лакса со значениями в компактной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и $F_{\alpha\beta}$ — тензор, построенный в теореме 2.*

Тогда справедливо равенство

$$H_{,\alpha} = F_{\alpha\beta} Q^\beta, \tag{2.18}$$

где $H = \frac{1}{4}(M, N)$ и (M, N) — скалярное произведение векторов M и N относительно метрики Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Доказательство.

Пусть g^0_{ab} — матрица, определяющая метрику Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ относительно базиса, двойственного к базису левоинвариантных форм Θ^a.

Найдем производную $H_{,\alpha}$, учитывая (2.9),(2.10):

$$H_{,\alpha} = \frac{1}{4} g^0_{ab}(M^a_{,\alpha} N^b + M^a N^b_{,\alpha}) = \frac{1}{2} g^0_{ab}(C^a_{dc} B^c_\alpha M^d N^b + C^b_{dc} A^c_\alpha N^d M^a) =$$

$$= \frac{1}{2}(C_{bdc} B^c_\alpha M^d N^b + C_{adc} A^c_\alpha N^d M^a).$$

Отсюда следует

$$H_{,\alpha} = \frac{1}{2}(C_{bac}B^c_\alpha + C_{abc}A^c_\alpha)M^aN^b =$$

$$= C_{abc}S^c_\alpha M^aN^b = C_{cab}S^c_\alpha M^aN^b = g^0_{cd}S^c_\alpha C^d_{ab}M^aN^b,$$

так как тензор C_{abc} кососимметричен по всем индексам.

Теперь, учитывая (2.8), получим

$$H_{,\alpha} = -g^0_{cd}S^c_\alpha S^d_\beta Q^\beta = F_{\alpha\beta}Q^\beta.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть система* (1.1) *допускает представление Лакса со значениями в компактной алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *и* $F_{\alpha\beta}$ *— тензор, построенный в теореме 2. Тогда*

$$F_{\alpha[\beta,\gamma]}Q^\alpha + F_{\alpha[\beta}Q^\alpha_{,\gamma]} = 0. \tag{2.19}$$

Доказательство получается дифференцированием (2.18).

Пример 1. Рассмотрим двухкомпонентную систему вида

$$U^\alpha_{xy} = Q^\alpha \ (\alpha = 1, 2), \tag{2.20}$$

где Q^α — гладкие функции от U^1, U^2.

В данном случае связность, ассоциированная с системой (2.20), является плоской, и непосредственные вычисления показывают, что любой тензор Киллинга ранга 2 имеет вид

$$\begin{aligned} F_{11} &= -a(U^2)^2 - 2bU^2 + k, \\ F_{12} &= aU^1U^2 + bU^1 + cU^2 + d, \\ F_{22} &= -a(U^1)^2 - 2cU^1 + m, \end{aligned}$$

где a, b, c, d, k, m — произвольные константы.

Теперь нетрудно проверить, что, например, система

$$U^1_{xy} = U^1e^{U^2}, \ U^2_{xy} = U^2e^{U^1}$$

не допускает представление Лакса со значениями в компактной алгебре Ли. Действительно, подставляя найденные компоненты в (2.19), получим равенство $F_{\alpha\beta} = 0$, которое приводит к противоречию с положительной определенностью тензора $F_{\alpha\beta}$.

3. Представление Лакса уравнений киральных полей со значениями в пространствах аффинной связности

В этом разделе рассматриваются системы вида

$$U^\alpha_{xy} + G^\alpha_{\beta\gamma}U^\beta_x U^\gamma_y = 0, \tag{3.1}$$

которые называются уравнениями киральных полей со значениями в пространстве аффинной связности.

Будем записывать представление Лакса системы (3.1) с помощью структурных уравнений вида:

$$d\theta^\alpha = D^\alpha_{\beta i}\varphi^i \wedge \theta^\beta, \tag{3.2}$$

$$d\varphi^i = C^i_{jk}\varphi^k \wedge \varphi^j + R^i_{\beta\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta^\beta, \tag{3.3}$$

где $D^\alpha_{\beta i}, C^i_{jk}, R^i_{\beta\gamma} = \text{const}$; греческие индексы α, β, γ пробегают значения от 1 до n $(n = \dim G/H)$; индексы $i, j, k = \overline{1, r}$.

Хорошо известно [13], что уравнения (3.2), (3.3) можно рассматривать как структурные уравнения локально симметрического пространства G/H, где C^i_{jk} — структурные константы группы изотропии H.

Далее будем искать представление Лакса системы (3.1) в виде

$$\theta^\alpha = U^\alpha_\beta(\lambda U^\beta_x dx + \frac{1}{\lambda}U^\beta_y dy), \tag{3.4}$$

$$\varphi^i = (-\Gamma^i_\alpha + H^i_\alpha)U^\alpha_\beta U^\beta_x dx + (-\Gamma^i_\alpha - H^i_\alpha)U^\alpha_\beta U^\beta_y dy, \tag{3.5}$$

где λ — произвольный параметр, $U^\alpha_\beta, \Gamma^i_\alpha, H^i_\alpha$ — гладкие функции переменных $U^1, U^2, \ldots, U^n$. Подставляя выражения (3.4), (3.5) в (3.2), принимая во внимание (3.1) и приводя подобные, при λ и $\frac{1}{\lambda}$, приходим к системе

$$U^\alpha_{\beta,\gamma} - U^\alpha_\delta G^\delta_{\beta\gamma} + D^\alpha_{\mu i}(\Gamma^i_\nu + H^i_\nu)U^\mu_\beta U^\nu_\gamma = 0, \tag{3.6}$$

$$U^\alpha_{\gamma,\beta} - U^\alpha_\delta G^\delta_{\beta\gamma} + D^\alpha_{\mu i}(\Gamma^i_\nu - H^i_\nu)U^\mu_\gamma U^\nu_\beta = 0. \tag{3.7}$$

Теперь, вычитая (3.7) из (3.6) и отделяя симметрическую и кососимметрические части, получаем

$$U^\alpha_{[\beta,\gamma]} + D^\alpha_{\mu i}\Gamma^i_\nu U^\mu_{[\beta}U^\nu_{\gamma]} = 0, \tag{3.8}$$

$$D^\alpha_{\mu i}H^i_\nu U^\mu_{(\beta}U^\nu_{\gamma)} = 0. \tag{3.9}$$

Далее из уравнений (3.6), (3.7), в силу соотношений (3.8), (3.9) следует

$$U^\alpha_\delta G^\delta_{[\beta\gamma]} = D^\alpha_{\mu i}H^i_\nu U^\mu_{[\beta}U^\nu_{\gamma]}, \tag{3.10}$$

$$U^\alpha_\delta G^\delta_{(\beta\gamma)} = U^\alpha_{(\beta,\gamma)} + D^\alpha_{\mu i}\Gamma^i_\nu U^\mu_{(\beta}U^\nu_{\gamma)}. \tag{3.11}$$

Аналогично, подставляя (3.4) и (3.5) в (3.3) с учетом (3.1), (3.8)–(3.11), приходим к соотношениям

$$\Gamma^i_{[\mu;\nu]} + H^i_\sigma D^\sigma_{[\mu|j|}H^j_{\nu]} - \Gamma^i_\sigma D^\sigma_{[\mu|j|}\Gamma^j_{\nu]} = C^i_{jk}\Gamma^k_{[\mu}\Gamma^j_{\nu]} - C^i_{jk}H^k_{[\mu}H^j_{\nu]} - R^i_{\mu\nu}, \tag{3.12}$$

$$H^i_{(\mu;\nu)} = H^i_\sigma D^\sigma_{(\mu|j|}\Gamma^j_{\nu)} + 2C^i_{jk}H^k_{(\mu}\Gamma^j_{\nu)}, \tag{3.13}$$

где использованы следующие обозначения: $d\Gamma^i_\nu = \Gamma^i_{\nu;\sigma}U^\sigma_\beta dU^\beta$, $dH^i_\nu = H^i_{\nu;\sigma}U^\sigma_\beta dU^\beta$. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 4. *Пусть G — группа Ли, структурные уравнения которой имеют вид* (3.2), (3.3) *и* $G^\alpha_{\beta\gamma}, U^\alpha_\beta, \Gamma^i_\alpha, H^i_\alpha$ *— гладкие функции, удовлетворяющие условиям* (3.8)–(3.13). *Тогда равенства* (3.2)–(3.5) *определяют представление Лакса системы* (3.1).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие теорему 4.

Пример 2. Киральные поля со значениями в симметрических пространствах (см., например, [14]).

Пусть G/H — симметрическое пространство с канонической связностью. Предположим, что $\theta^\alpha = U^\alpha_\beta dU^\beta$ — базисные формы и $\varphi^i = -\Gamma^i_\alpha U^\alpha_\beta dU^\beta$ — формы связности симметрического пространства G/H. Тогда выполняются структурные уравнения Картана (3.2), (3.3). Отсюда получим

$$U^\alpha_{[\mu,\nu]} = -D^\alpha_{\varphi i}\Gamma^i_\psi U^\varphi_{[\mu} U^\psi_{\nu]},$$
$$\Gamma^i_{[\mu,\nu]} - \Gamma^i_\sigma D^\sigma_{[\mu|i|}\Gamma^i_{\nu]} = C^i_{jk}\Gamma^k_\mu \Gamma^j_\nu - R^i_{\mu\nu}.$$

Положим $H^i_\alpha = 0$ в (3.5). Теперь непосредственная проверка показывает, что условия (3.8), (3.9), (3.12), (3.13) выполнены. Таким образом, уравнения (3.2)–(3.5) определяют представление Лакса системы (3.1), где

$$G^\alpha_{[\beta\gamma]} = 0,$$

$$G^\alpha_{(\beta\gamma)} = \tilde{U}^\alpha_\sigma [U^\sigma_{(\beta,\gamma)} + D^\alpha_{\varphi i}\Gamma^i_\psi U^\varphi_{(\beta} U^\psi_{\gamma)}].$$

Последние соотношения показывают (см., например, [8]), что $G^\alpha_{\beta\gamma}$ — коэффициенты канонической аффинной связности симметрического пространства G/H относительно голономного базиса.

Пример 3.

Пусть H — группа Ли. Рассмотрим симметрическое пространство $(H \times H)/H$ с канонической аффинной связностью. Тогда справедливы структурные уравнения Картана (3.2), (3.3), где C^i_{jk} — структурные константы группы H; все индексы принимают значения от 1 до $n = \dim H$ и $D^\alpha_{\beta i} = 2C^\alpha_{\beta i}$, $R^i_{\alpha\beta} = -C^i_{\alpha\beta}$. Пусть $\Gamma^i_\alpha = 0, H^i_\alpha = \delta^i_\alpha$ и U^α_β — гладкие функции, удовлетворяющие условиям: $\det ||U^\alpha_\beta|| \neq 0$, $U^\alpha_{[\beta,\gamma]} = 0$. Тогда непосредственная проверка показывает, что уравнения (3.2)–(3.5) определяют представление Лакса системы (3.1), где коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$ определяются равенствами

$$G^\alpha_{[\beta\gamma]} = 2\tilde{U}^\alpha_\delta C^\delta_{\varphi\psi} U^\varphi_\beta U^\psi_\gamma,$$

$$G^\alpha_{(\beta\gamma)} = 2\tilde{U}^\alpha_\delta U^\delta_{\beta,\gamma}.$$

Следующий пример, представление Лакса для модифицированных уравнений главных киральных полей, сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5. *Пусть* (U^α) *— локальные координаты на полупростой группе Ли H. Предположим, что:*

(i) $C^\alpha_{\beta\gamma}$ *— структурные константы группы Ли H относительно базиса левоинвариантных форм* $\Phi^\alpha = T^\alpha_\beta dU^\beta$;

(ii) $h^0_{\alpha\beta}$ *— метрика Киллинга на алгебре Ли* $\mathfrak{h}$ *группы Ли H, заданная относительно двойственного базиса;*

(iii) $h_{\alpha\beta}$ *— метрика Киллинга на группе Ли H, т. е.*

$$h_{\alpha\beta} = h^0_{\varphi\psi} T^\varphi_\alpha T^\psi_\beta; \qquad (3.14)$$

(iv) $\sigma = a_{\alpha\beta} dU^\alpha \wedge dU^\beta$ *— 2-форма, удовлетворяющая (локально) условию*

$$d\sigma = \frac{2}{3} h^0_{\delta\sigma} C^\sigma_{\beta\gamma} \Phi^\delta \wedge \Phi^\gamma \wedge \Phi^\beta;$$

(v) k *— произвольная константа такая, что* $k \neq \pm 1$.

Тогда система уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = h_{\alpha\beta} U^\alpha_x U^\beta_y + k a_{\alpha\beta} U^\alpha_x U^\beta_y \tag{3.15}$$

допускает представление Лакса.

Доказательство.

Рассмотрим симметрическое пространство $(H \times H)/H$. В этом случае структурные уравнения Картана имеют вид (3.2), (3.3), где C^i_{jk} — структурные константы группы H; все индексы принимают значения от 1 до $n = \dim H$ и $D^\alpha_{\beta i} = 2C^\alpha_{\beta i}$, $R^i_{\alpha\beta} = -C^i_{\alpha\beta}$.

Подставим

$$U^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 1} T^\alpha_\beta,$$

$$\Gamma^i_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \delta^i_\alpha, H^i_\alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2-1}} \delta^i_\alpha$$

в выражения (3.4), (3.5). Тогда непосредственная проверка показывает, что условия теоремы 4 выполнены и уравнения (3.2)–(3.5) определяют представление Лакса системы

$$U^\alpha_{xy} + \tilde{T}^\alpha_\sigma [T^\sigma_{(\beta,\gamma)} + k C^\sigma_{\varphi\psi} T^\varphi_\beta T^\psi_\gamma] U^\beta_x U^\gamma_y = 0. \tag{3.16}$$

Докажем, что система (3.16) является системой уравнений Эйлера для лагранжиана (3.15).

Прежде всего заметим, что 3-форма $\Psi = \frac{2}{3} h^0_{\delta\sigma} C^\sigma_{\beta\gamma} \Phi^\delta \wedge \Phi^\gamma \wedge \Phi^\beta = \frac{2}{3} h^0_{\sigma\delta} C^\sigma_{\varphi\psi} T^\delta_\alpha T^\varphi_\beta T^\psi_\gamma dU^\alpha \wedge dU^\gamma \wedge dU^\beta$ замкнута в силу тождества Якоби для структурных констант $C^\alpha_{\beta\gamma}$. Следовательно, существует, по крайней мере локально, 2-форма σ, удовлетворяющая условию (iv) теоремы.

Уравнения Эйлера для лагранжиана (3.15) приводят к системе, для которой

$$G^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \tilde{h}^{\alpha\delta} (h_{\delta\gamma,\beta} + h_{\delta\beta,\gamma} - h_{\beta\gamma,\delta}) + \frac{3}{2} k \tilde{h}^{\alpha\delta} a_{[\delta\gamma,\beta]}. \tag{3.17}$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$G^\alpha_{(\beta\gamma)} = \frac{1}{2} \tilde{h}^{\alpha\delta} (h_{\delta\gamma,\beta} + h_{\delta\beta,\gamma} - h_{\beta\gamma,\delta}) = \tilde{T}^\alpha_\delta T^\delta_{(\beta,\gamma)}.$$

Таким образом, симметрическая часть связности, определенной системой (3.16), совпадает с симметрической частью связности (3.17).

Обозначим $A^\alpha_{\beta\gamma}$ кручение связности, определенной системой (3.16), т.е.

$$A^\alpha_{\beta\gamma} = k \tilde{T}^\alpha_\sigma C^\sigma_{\varphi\psi} T^\varphi_\beta T^\psi_\gamma, \tag{3.18}$$

и покажем, что $G^\alpha_{[\beta\gamma]} = A^\alpha_{\beta\gamma}$. Учитывая (3.18) и (3.14), находим $h_{\delta\alpha} A^\delta_{\beta\gamma} = k h^0_{\sigma\delta} C^\sigma_{\varphi\psi} T^\delta_\alpha T^\varphi_\beta T^\psi_\gamma$. Из последнего равенства и определения формы σ следует, что $h_{\delta\alpha} A^\delta_{\beta\gamma} = \frac{3}{2} k a_{[\alpha\gamma,\beta]}$, т.е. $A^\alpha_{\beta\gamma} = G^\alpha_{[\beta\gamma]}$.

Теорема доказана.

Замечание 4. Можно проверить, что коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$, определенные равенством (3.17), являются коэффициентами аффинной связности однородного редуктивного пространства, для которого выполнены условия:

$$\nabla R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0,\ \nabla A^\alpha_{\beta\gamma} = 0, R^\alpha_{[\beta\gamma\delta]} = 0.$$

Представление Лакса без параметра для таких систем было указано в [15].

Замечание 5. Далее будет удобно использовать представление Лакса системы (3.16), полученное непосредственно при помощи структурных уравнений $d\Phi^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\Phi^\gamma \wedge \Phi^\beta$ группы Ли H. Для этого достаточно положить

$$\Phi^\alpha = \frac{1}{2}(k+1)T^\alpha_\beta U^\beta_x dx + \frac{1}{2}(1-k)T^\alpha_\beta U^\beta_y dy +$$

$$+\frac{i}{2}\sqrt{k^2-1}T^\alpha_\beta(\lambda U^\beta_x dx + \frac{1}{\lambda}U^\beta_y dy),$$

где i — мнимая единица.

Пример 4. Модифицированные уравнения главных киральных полей со значениями в группе $SO(3)$.

Выберем в качестве локальных координат U^1, U^2, U^3 на группе $H = SO(3)$ углы Эйлера. Тогда

$$\Phi^1 = -\cos U^2 dU^3 - \sin U^2 \sin U^3 dU^1,$$
$$\Phi^2 = \sin U^3 \cos U^2 dU^1 - \sin U^2 dU^3,$$
$$\Phi^3 = -\cos U^3 dU^1 - dU^2$$

— базис левоинвариантных дифференциальных форм на H и структурные уравнения имеют вид

$$d\Phi^1 = \Phi^3 \wedge \Phi^2, \quad d\Phi^2 = \Phi^1 \wedge \Phi^3, \quad d\Phi^3 = \Phi^2 \wedge \Phi^1. \tag{3.19}$$

Положим

$$\begin{gathered}\Phi^1 = \frac{1}{2}(k+1)(-\cos U^2 U^3_x - \sin U^2 \sin U^3 U^1_x)dx +\\ +\frac{1}{2}(1-k)(-\cos U^2 U^3_y - \sin U^2 \sin U^3 U^1_y)dy +\\ +\frac{i}{2}\sqrt{k^2-1}[-\cos U^2(\lambda U^3_x dx + \frac{1}{\lambda}U^3_y dy) - \sin U^2 \sin U^3(\lambda U^1_x dx + \frac{1}{\lambda}U^1_y dy)],\\ \Phi^2 = \frac{1}{2}(k+1)(\sin U^3 \cos U^2 U^1_x - \sin U^2 U^3_x)dx +\\ +\frac{1}{2}(1-k)(\sin U^3 \cos U^2 U^1_y - \sin U^2 U^3_y)dy +\\ +\frac{i}{2}\sqrt{k^2-1}[\sin U^3 \cos U^2(\lambda U^1_x dx + \frac{1}{\lambda}U^1_y dy) - \sin U^2(\lambda U^3_x dx + \frac{1}{\lambda}U^3_y dy)],\\ \Phi^3 = \frac{1}{2}(k+1)(-\cos U^3 U^1_x - U^2_x)dx +\\ +\frac{1}{2}(1-k)(-\cos U^3 U^1_y - U^2_y)dy +\\ +\frac{i}{2}\sqrt{k^2-1}[-\cos U^3(\lambda U^1_x dx + \frac{1}{\lambda}U^1_y dy) - (\lambda U^2_x dx + \frac{1}{\lambda}U^2_y dy)].\end{gathered} \tag{3.20}$$

Тогда в силу замечания 5 получим, что уравнения (3.19), (3.20) определяют представление Лакса системы

$$\begin{gathered}U^1_{xy}+\frac{1+k}{2}U^1_xU^3_y ctgU^3+\frac{1-k}{2}U^3_xU^1_y ctgU^3-\\-\frac{1-k}{2\sin U^3}U^2_xU^3_y-\frac{k+1}{2\sin U^3}U^3_xU^2_y=0,\\U^2_{xy}-\frac{1+k}{2\sin U^3}U^1_xU^3_y-\frac{1-k}{2\sin U^3}U^3_xU^1_y+\\+\frac{1-k}{2}U^2_xU^3_y ctgU^3+\frac{1+k}{2}U^3_xU^2_y ctgU^3=0,\\U^3_{xy}+\frac{1+k}{2}\sin U^3U^1_xU^2_y+\frac{1-k}{2}\sin U^3U^2_xU^3_y=0.\end{gathered}\tag{3.21}$$

По теореме 5 данная система является вариационной. Чтобы найти симметрическую часть лагранжиана, запишем метрику Киллинга $h_{\alpha\beta}$ группы $SO(3)$ в виде

$$h_{\alpha\beta}dU^\alpha dU^\beta=(dU^1)^2+(dU^2)^2+(dU^3)^2+2\cos U^3dU^1dU^2,$$

т. к. $h^0_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$.

Кососимметрическая часть лагранжиана $a_{\alpha\beta}$ определяется равенством $d\sigma=-3\sin U^3dU^1\wedge dU^2\wedge dU^3$, т. е. $a_{12}=-a_{21}=\cos U^3$.

Таким образом, система (3.21) является системой уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L=U^1_xU^1_y+U^2_xU^2_y+U^3_xU^3_y+(1+k)\cos U^3U^1_xU^2_y+(1-k)\cos U^3U^1_yU^2_x.$$

Следуя [16], воспользуемся полученным представлением Лакса для построения бесконечной серии законов сохранения системы (3.21). Перейдем к левоинвариантным формам группы $SL(2)$ при помощи замены

$$\omega^1=\frac{1}{2}i\theta^3,\;\;\omega^2=\frac{1}{2}(-\theta^1+i\theta^2),\;\;\omega^3=\frac{1}{2}(\theta^1+i\theta^2),$$

где формы ω^i $(i=1,2)$ удовлетворяют уравнениям

$$d\omega^1=\omega^2\wedge\omega^3,\;\;d\omega^2=2\omega^1\wedge\omega^2,\;\;d\omega^3=-2\omega^1\wedge\omega^3.\tag{3.22}$$

Тогда формы, определяющие представление Лакса системы (3.21), принимают вид

$$\begin{gathered}\omega^1=\frac{1}{4}(\cos U^3U^1_x+U^2_x)[-i(1+k)+\lambda\sqrt{k^2-1}]dx+\\+\frac{1}{4}(\cos U^3U^1_y+U^2_y)[i(1+k)+\frac{1}{\lambda}\sqrt{k^2-1}]dy,\\\omega^2=\frac{1}{4}e^{-iU^2}(U^3_x+i\sin U^3U^1_x)[1+k+i\lambda\sqrt{k^2-1}]dx+\\+\frac{1}{4}e^{-iU^2}(U^3_y+i\sin U^3U^1_y)[1-k+i\frac{1}{\lambda}\sqrt{k^2-1}]dy,\\\omega^3=\frac{1}{4}e^{iU^2}(-U^3_x+i\sin U^3U^1_x)[1+k+i\lambda\sqrt{k^2-1}]dx+\\+\frac{1}{4}e^{iU^2}(-U^3_y+i\sin U^3U^1_y)[1-k+i\frac{1}{\lambda}\sqrt{k^2-1}]dy.\end{gathered}$$

Рассмотрим уравнение Пфаффа

$$\gamma \equiv d\Gamma - \omega^3 + 2\Gamma\omega^1 + \Gamma^2\omega^3 = 0, \tag{3.23}$$

где Γ — некоторая неизвестная функция на группе $SL(2)$. Дифференцируя (3.23), получим

$$d\gamma = 2\gamma \wedge (\omega^1 + \Gamma\omega^2),$$

т. е. уравнение $\gamma = 0$ является вполне интегрируемым в смысле Фробениуса. Нетрудно проверить, что 1-форма

$$\delta = \omega^3 + \Gamma\omega^2 \tag{3.24}$$

является замкнутой, если Γ удовлетворяет условию (3.23). Раскладывая форму δ по степеням параметра λ, получим бесконечную серию 1-форм, замкнутых на решениях системы (3.21). Они являются искомыми законами сохранения.

Подстановка выражений для форм w^i в (3.23) приводит к уравнениям

$$\begin{gathered}
\Gamma_{,x} + \frac{1}{4}e^{iU^2}(U^3_x - i\sin U^3 U^1_x)[1 + k + i\lambda\sqrt{k^2-1}]+\\
+\frac{1}{2}\Gamma(\cos U^3 U^1_x + U^2_x)[-i(1+k) + \lambda\sqrt{k^2-1}]+\\
+\frac{1}{4}\Gamma^2 e^{-iU^2}(U^3_x + i\sin U^3 U^1_x)[1 + k + i\lambda\sqrt{k^2-1}] = 0,\\
\Gamma_{,y} + \frac{1}{4}e^{iU^2}(U^3_y - i\sin U^3 U^1_y)[1 - k + i\frac{1}{\lambda}\sqrt{k^2-1}]+\\
+\frac{1}{2}\Gamma(\cos U^3 U^1_y + U^2_y)[-i(1-k) + \frac{1}{\lambda}\sqrt{k^2-1}]+\\
+\frac{1}{4}\Gamma^2 e^{-iU^2}(U^3_y + i\sin U^3 U^1_y)[1 - k + i\frac{1}{\lambda}\sqrt{k^2-1}] = 0.
\end{gathered} \tag{3.25}$$

Решим уравнение (3.25), раскладывая Γ в ряд

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} e^{iU^2}\xi_n \tag{3.26}$$

по степеням спектрального параметра λ. Подставляя (3.26) в (3.25) и приравнивая коэффициенты при λ и $1/\lambda$, придем к уравнениям

$$\begin{gathered}
iU^3_x + \sin U^3 U^1_x + 2\xi_0(\cos U^3 U^1_x + U^2_x) + \xi_0^2(iU^3_x - \sin U^3 U^1_x) = 0,\\
\xi_{0,x} + iU^2_x\xi_0 + \frac{1}{4}(1+k)(U^3_x - i\sin U^3 U^1_x)+\\
+\frac{1}{2}(\cos U^3 U^1_x + U^2_x)[-i(1+k)\xi_0 + \sqrt{k^2-1}\xi_1]+\\
\frac{1}{4}(U^3_x + i\sin U^3 U^1_x)[(1+k)\xi_0^2 + 2\sqrt{k^2-1}\xi_0\xi_1] = 0,\\
\xi_{n,x} + iU^2_x\xi_n + \frac{1}{2}(\cos U^3 U^1_x + U^2_x)[-i(1+k)\xi_n + i\sqrt{k^2-1}\xi_{n+1}]+\\
+\frac{1}{4}(U^3_x + i\sin U^3 U^1_x)[(1+k)\sum_{j=0}^{n}\xi_j\xi_{n-j} + i\sqrt{k^2-1}\sum_{j=0}^{n+1}\xi_j\xi_{n+1-j}] = 0, n \geqslant 1.
\end{gathered}$$

Отсюда находим

$$\xi_0 = -\frac{\cos U^3 U_x^1 + U_x^2 + \sqrt{(U_x^1)^2 + (U_x^2)^2 + (U_x^3)^2 + 2\cos U^3 U_x^1 U_x^2}}{iU_x^3 + \sin U^3 U_x^1},$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}\sqrt{(U_x^1)^2 + (U_x^2)^2 + (U_x^3)^2 + 2\cos U^3 U_x^1 U_x^2}}[2\xi_{0,x} + 2iU_x^2\xi_0 +$$

$$+\frac{1}{2}(1+k)(U_x^3 - i\sin U^3 U_x^1) - i(1+k)(\cos U^3 U_x^1 + U_x^2)\xi_0 +$$

$$+\frac{1}{2}(1+k)(U_x^3 + i\sin U^3 U_x^1)\xi_0^2]$$

и рекуррентную формулу

$$\xi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}\sqrt{(U_x^1)^2 + (U_x^2)^2 + (U_x^3)^2 + 2\cos U^3 U_x^1 U_x^2}}[2\xi_{n,x} + 2iU_x^2\xi_n +$$

$$-i(1+k)(\cos U^3 U_x^1 + U_x^2)\xi_n + \frac{1}{2}(1+k)(U_x^3 + i\sin U^3 U_x^1)\sum_{j=0}^{n}\xi_j\xi_{n-j} +$$

$$+\frac{i}{2}(1+k)\sqrt{k^2-1}(U_x^3 + i\sin U^3 U_x^1)\sum_{j=1}^{n}\xi_j\xi_{n+1-j}], \quad n \geqslant 1.$$

Теперь из разложения $\delta = \sum_{n=-1}^{\infty}\lambda^{-n}\delta_n$ получим

$$\delta_{-1} = \frac{1}{4}\sqrt{k^2-1}[\cos U^3 U_x^1 + U_x^2 + (iU_x^3 - \sin U^3 U_x^1)\xi_0]dx,$$

$$\delta_0 = \frac{1}{4}\{-i(1+k)(\cos U^3 U_x^1 + U_x^2) +$$

$$+(U_x^3 + i\sin U^3 U_x^1)[(1+k)\xi_0 + i\sqrt{k^2-1}\xi_1]\}dx +$$

$$+\frac{1}{4}\{-i(1-k)(\cos U^3 U_y^1 + U_y^2) +$$

$$+(U_y^3 + i\sin U^3 U_y^1)[(1-k)\xi_0 + i\sqrt{k^2-1}\xi_1]\}dy,$$

$$\delta_1 = \frac{1}{4}(U_x^3 + i\sin U^3 U_x^1)[(1+k)\xi_1 + i\sqrt{k^2-1}\xi_2]dx +$$

$$+\frac{1}{4}\{\sqrt{k^2-1}(\cos U^3 U_y^1 + U_y^2) +$$

$$+(U_y^3 + i\sin U^3 U_y^1)[(1-k)\xi_1 + i\sqrt{k^2-1}\xi_2]\}dy,$$

$$\delta_n = \frac{1}{4}(U_x^3 + i\sin U^3 U_x^1)[(1+k)\xi_n + i\sqrt{k^2-1}\xi_{n+1}]dx +$$

$$+(U_y^3 + i\sin U^3 U_y^1)[(1-k)\xi_n + i\sqrt{k^2-1}\xi_{n+1}]\}dy, \quad n \geqslant 2.$$

Выделяя вещественные и мнимые части форм δ_n, получим бесконечные серии законов сохранения. Первый нетривиальный закон сохранения имеет вид

$$-\frac{4}{\sqrt{k^2-1}}Re(\delta_{-1}) = \sqrt{(U_x^1)^2+(U_x^2)^2+(U_x^3)^2+2\cos U^3 U_x^1 U_x^2}dx,$$

т. е. форма $\tau = \{(U_x^1)^2+(U_x^2)^2+(U_x^3)^2+2\cos U^3 U_x^1 U_x^2\}dx$ замкнута на решениях системы (3.21).

Замечание 6. Этот же закон сохранения можно получить другим образом. Действительно, для любой системы уравнений Эйлера–Лагранжа с лагранжианом вида $L = g_{\alpha\beta}(U^\delta)U_x^\alpha U_y^\beta$, $\det\|g_{(\alpha\beta)}\| \neq 0$ формы

$$\tau_1 = g_{\alpha\beta}U_x^\alpha U_x^\beta dx, \;\; \tau_2 = g_{\alpha\beta}U_y^\alpha U_y^\beta dy$$

замкнуты на решениях.

Преобразования Бэклунда для систем (3.16) можно получить из следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть $\overline{C}^\alpha_{\beta\gamma}, \widehat{C}^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы n-мерных алгебр Ли, и функции $U^\alpha_\beta = U^\alpha_\beta(U^\gamma), V^\alpha_\beta = V^\alpha_\beta(V^\gamma)$ удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$U^\alpha_{[\beta,\gamma]} = \overline{C}^\alpha_{\varphi\psi}U^\varphi_\beta U^\psi_\gamma, \;\; det||U^\alpha_\beta|| \neq 0, \tag{3.27}$$

$$V^\alpha_{[\beta,\gamma]} = \widehat{C}^\alpha_{\varphi\psi}V^\varphi_\beta V^\psi_\gamma, \;\; det||V^\alpha_\beta|| \neq 0. \tag{3.28}$$

Тогда равенства

$$U^\alpha_\beta U^\beta_x = V^\alpha_\beta V^\beta_x, \tag{3.29}$$

$$U^\alpha_\beta U^\beta_y = -V^\alpha_\beta V^\beta_y \tag{3.30}$$

определяют преобразование Бэклунда между следующими системами

$$U^\alpha_{xy} + \tilde{U}^\alpha_\delta[U^\delta_{(\beta,\gamma)} + \widehat{C}^\delta_{\varphi\psi}U^\varphi_\beta U^\psi_\gamma]U^\beta_x U^\gamma_y = 0, \tag{3.31}$$

$$V^\alpha_{xy} + \tilde{V}^\alpha_\delta[V^\delta_{(\beta,\gamma)} + \overline{C}^\delta_{\varphi\psi}V^\varphi_\beta V^\psi_\gamma]V^\beta_x V^\gamma_y = 0. \tag{3.32}$$

Доказательство. Продифференцируем (3.30) по x и (3.29) — по y. Затем, складывая и вычитая полученные выражения, а также принимая во внимание (3.27), (3.28), (3.29), (3.30), приходим к системам (3.31), (3.32).

Следствие 1. *Пусть коэффициенты $C^\alpha_{\beta\gamma}$ являются структурными константами некоторой алгебры Ли. Тогда равенства (3.29), (3.30) определяют преобразование Бэклунда между системами*

$$U^\alpha_{xy} + \tilde{U}^\alpha_\delta[U^\delta_{(\beta,\gamma)} + kC^\delta_{\varphi\psi}U^\varphi_\beta U^\psi_\gamma]U^\beta_x U^\gamma_y = 0, \tag{3.33}$$

$$V^\alpha_{xy} + \tilde{W}^\alpha_\delta[W^\delta_{(\beta,\gamma)} + \frac{1}{k}C^\delta_{\varphi\psi}W^\varphi_\beta W^\psi_\gamma]V^\beta_x V^\gamma_y = 0, \tag{3.34}$$

где $k = const$ и функции $U^\alpha_\beta = U^\alpha_\beta(U^\gamma), W^\alpha_\beta = W^\alpha_\beta(V^\gamma)$ удовлетворяют условиям

$$U^\alpha_{[\beta,\gamma]} = C^\alpha_{\varphi\psi}U^\varphi_\beta U^\psi_\gamma, \;\; \det||U^\alpha_\beta|| \neq 0, \tag{3.35}$$

$$W^\alpha_{[\beta,\gamma]} = C^\alpha_{\varphi\psi}W^\varphi_\beta W^\psi_\gamma, \;\; \det||W^\alpha_\beta|| \neq 0. \tag{3.36}$$

Доказательство. Положим $\overline{C}^\alpha_{\beta\gamma} = C^\alpha_{\beta\gamma}, \widehat{C}^\alpha_{\beta\gamma} = kC^\alpha_{\beta\gamma}, W^\alpha_\beta = kV^\alpha_\beta$ в равенствах (3.27), (3.28). Тогда функции U^α_β, W^α_β удовлетворяют уравнениям (3.36), (3.35). В этом случае системы (3.31), (3.32) совпадают с системами (3.33), (3.34).

4. Системы, ассоциированные с симметрическими пространствами вида $G/(H_1 \times H_2 \times ... \times H_p)$

Рассмотрим симметрическое пространство G/H со структурными уравнениями

$$d\omega^{\alpha'} = D^{\alpha'}_{\beta'\gamma}\theta^{\gamma} \wedge \omega^{\gamma'}, \tag{4.1}$$

$$d\theta^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\beta} + R^{\alpha}_{\beta'\gamma'}\omega^{\gamma'} \wedge \omega^{\beta'}. \tag{4.2}$$

Здесь греческие индексы α, β, γ принимают значения от 1 до n, индексы α', β', γ' изменяются от $n+1$ до r.

Положим

$$\omega^{\alpha'} = \lambda M^{\alpha'}dx + \frac{1}{\lambda}N^{\alpha'}dy, \tag{4.3}$$

$$\theta^{\alpha} = T_{1\beta}^{\alpha}U_x^{\beta}dx + T_{2\beta}^{\alpha}U_y^{\beta}dy, \tag{4.4}$$

где $M^{\alpha'}, N^{\alpha'}, T_{1\beta}^{\alpha}, T_{2\beta}^{\alpha}$ — гладкие функции переменных $U^1, ..., U^n$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — структурные константы группы изотропии H локально симметрического пространства G/H, структурные уравнения которого имеют вид* (4.1), (4.2). *Пусть также существуют функции $T_{1\beta}^{\alpha}$, $T_{2\beta}^{\alpha}$, $M^{\alpha'}, N^{\alpha'}$, удовлетворяющие условиям*

$$T_{i[\beta,\gamma]}^{\alpha} = C^{\alpha}_{\mu\nu}T_{i\beta}^{\mu}T_{i\gamma}^{\nu} \ (i = 1, 2), \tag{4.5}$$

$$\det \|T_{1\beta}^{\alpha} - T_{2\beta}^{\alpha}\| \neq 0, \tag{4.6}$$

$$M^{\alpha'}_{,\delta} = D^{\alpha'}_{\beta'\gamma}T_{2\delta}^{\gamma}M^{\beta'}, \tag{4.7}$$

$$N^{\alpha'}_{,\delta} = D^{\alpha'}_{\beta'\gamma}T_{1\delta}^{\gamma}N^{\beta'}. \tag{4.8}$$

Тогда равенства (4.1)–(4.4) *определяют представление Лакса системы* (1.1)*, коэффициенты которой имеют вид*

$$G^{\alpha}_{\beta\gamma} = \tilde{P}^{\alpha}_{\delta}[P^{\delta}_{(\beta,\gamma)} + 2C^{\delta}_{\varphi\psi}S^{\varphi}_{\beta}S^{\psi}_{\gamma} - 2C^{\delta}_{\varphi\psi}P^{\varphi}_{(\gamma}S^{\psi}_{\beta)}],$$
$$Q^{\alpha} = -\tilde{P}^{\alpha}_{\delta}R^{\delta}_{\beta'\gamma'}N^{\gamma'}M^{\beta'}, \tag{4.9}$$

где $S^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2}(T_{1\beta}^{\alpha} + T_{2\beta}^{\alpha})$, $P^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2}(T_{1\beta}^{\alpha} - T_{2\beta}^{\alpha})$ и $\tilde{P}$ — матрица, обратная к P.

Доказательство получается непосредственной проверкой.

При таком подходе для построения интегрируемых систем кирального типа необходимо указать набор функций $T_{i\beta}^{\alpha}, M^{\alpha'}, N^{\alpha'}$, удовлетворяющих условиям (4.5)–(4.8). Желательно также, чтобы полученная интегрируемая система являлась лагранжевой. Одно из возможных решений этой задачи можно получить, полагая $T_{1\beta}^{\alpha} = T^{\alpha}_{\beta}$, $T_{2\beta}^{\alpha} = 0$ (или $T_{1\beta}^{\alpha} = 0$, $T_{2\beta}^{\alpha} = T^{\alpha}_{\beta}$), где коэффициенты T^{α}_{β} определяются базисом левоинвариантных форм $\Phi^{\alpha} = T^{\alpha}_{\beta}dU^{\beta}$ на группе H, причем $d\Phi^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Phi^{\gamma} \wedge \Phi^{\beta}$. В этом случае равенства (4.1)–(4.4) определяют представление Лакса системы (1.1), коэффициенты $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ которой являются коэффициентами левой (или правой) плоской канонической связности на группе Ли H, а Q^{α} имеют вид (4.9).

Представление Лакса для таких систем было получено А. Н. Лезновым и М. В. Савельевым [10] в инвариантном виде, из которого переходом к локальным координатам можно получить представление Лакса, приведенное выше. А. Н. Лезновым и М. В. Савельевым также показано, что такие системы являются лагранжевыми в случае полупростой группы H.

Оказывается, что в случае, когда H является прямым произведением простых групп Ли $H_1, ..., H_p$, можно указать другие решения уравнений (4.5)–(4.8), которые приводят к новым интегрируемым системам.

Рассмотрим случай $H = H_1 \times H_2$, где H_1, H_2 — простые группы Ли. Пусть (U^α) — локальная система координат на H. Разделим координаты (U^α) на две группы $(U^{\alpha_1}, U^{\alpha_2})$ в соответствии с разложением группы H и перепишем структурные уравнения симметрического пространства G/H в виде

$$d\omega^{\beta'} = D^{\beta'}_{\gamma'\alpha_1}\theta^{\alpha_1} \wedge \omega^{\gamma'} + D^{\beta'}_{\gamma'\alpha_2}\theta^{\alpha_2} \wedge \omega^{\gamma'}, \tag{4.10}$$

$$d\theta^{\alpha_1} = C^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1}\theta^{\gamma_1} \wedge \theta^{\beta_1} + R^{\alpha_1}_{\beta'\gamma'}\omega^{\gamma'} \wedge \omega^{\beta'}, \tag{4.11}$$

$$d\theta^{\alpha_2} = C^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_2}\theta^{\gamma_2} \wedge \theta^{\beta_2} + R^{\alpha_2}_{\beta'\gamma'}\omega^{\gamma'} \wedge \omega^{\beta'}. \tag{4.12}$$

Далее будем использовать следующие обозначения:

(i) $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \bigoplus \mathfrak{h}_2,\ \mathfrak{h}_i$ — алгебры Ли групп Ли G, H, H_i соответственно $(i = 1, 2)$;

(ii) $C^{\alpha_i}_{\beta_i\gamma_i}$ — структурные константы группы H_i относительно базиса левоинвариантных дифференциальных форм $\Phi^{\alpha_i} = T^{\alpha_i}_{\beta_i} dU^{\beta_i}$;

(iii) $h^0_{\alpha_i\beta_i}$ коэффициенты формы Киллинга $h^0_i(\cdot,\cdot)$ алгебры Ли $\mathfrak{h}_i$, заданные относительно базиса, двойственного к базису $\{\Phi^{\alpha_i}\}$;

(iv) $g^0(\cdot,\cdot)$ — форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$;

(v) S_i — константы, удовлетворяющие условию

$$h^0_i(\cdot,\cdot) = S_i g^0(\cdot,\cdot)_{|\mathfrak{h}_i}. \tag{4.13}$$

Такие константы существуют, т. к. $\mathfrak{h}_i$ — простые подалгебры полупростой алгебры $\mathfrak{g}$;

(vi) $h_{\alpha_i\beta_i}$ — метрика Киллинга группы H_i относительно локальных координат (U^{α_i}), т. е.

$$h_{\alpha_i\beta_i} = h^0_{\gamma_i\delta_i} T^{\gamma_i}_{\alpha_i} T^{\delta_i}_{\beta_i}; \tag{4.14}$$

(vii) $\sigma_i = a_{\alpha_i\beta_i} dU^{\alpha_i} \wedge dU^{\beta_i}$ — 2–форма, удовлетворяющая условию

$$d\sigma_i = \frac{2}{3} h^0_{\alpha_i\delta_i} C^{\delta_i}_{\beta_i\gamma_i} \Phi^{\alpha_i} \wedge \Phi^{\gamma_i} \wedge \Phi^{\beta_i}. \tag{4.15}$$

Теорема 8. *Пусть G/H — локально симметрическое пространство, G — полупростая группа Ли и $H = H_1 \times H_2$, где H_1, H_2 — простые группы Ли. Определим лагранжиан L равенством*

$$L = S_2[h_{\alpha_1\beta_1}(U^{\gamma_1}) + \varepsilon_1 a_{\alpha_1\beta_1}(U^{\gamma_1})]U^{\alpha_1}_x U^{\beta_1}_y +$$
$$+ S_1[h_{\alpha_2\beta_2}(U^{\gamma_2}) + \varepsilon_2 a_{\alpha_2\beta_2}(U^{\gamma_2})]U^{\alpha_2}_x U^{\beta_2}_y + Q, \tag{4.16}$$

где

$$Q = 4S_1S_2 g^0_{\gamma'\delta'} M^{\gamma'} N^{\delta'}, \tag{4.17}$$

$$\varepsilon_i = \pm 1 \ (i = 1, 2),$$

а функции $M^{\gamma'}, N^{\delta'}$ удовлетворяют условиям

$$M^{\gamma'}_{,\beta_i} = \frac{1-\varepsilon_i}{2} D^{\gamma'}_{\delta'\alpha_i} T^{\alpha_i}_{\beta_i} M^{\delta'} \quad (i=1,2), \tag{4.18}$$

$$N^{\gamma'}_{,\beta_i} = \frac{1+\varepsilon_i}{2} D^{\gamma'}_{\delta'\alpha_i} T^{\alpha_i}_{\beta_i} N^{\delta'} \quad (i=1,2). \tag{4.19}$$

Тогда система уравнений Эйлера для лагранжиана (4.16) *допускает представление Лакса.*

Доказательство. Положим

$$\theta^{\alpha_1} = \frac{1+\varepsilon_1}{2} T^{\alpha_1}_{\beta_1} U^{\beta_1}_x dx + \frac{1-\varepsilon_1}{2} T^{\alpha_1}_{\beta_1} U^{\beta_1}_y dy, \tag{4.20}$$

$$\theta^{\alpha_2} = \frac{1+\varepsilon_2}{2} T^{\alpha_2}_{\beta_2} U^{\beta_2}_x dx + \frac{1-\varepsilon_2}{2} T^{\alpha_2}_{\beta_2} U^{\beta_2}_y dy, \tag{4.21}$$

$$\omega^{\gamma'} = \lambda M^{\gamma'} dx + \frac{1}{\lambda} N^{\gamma'} dy. \tag{4.22}$$

Тогда, подставляя выражения (4.20)–(4.22) для форм $\theta^{\alpha_1}, \theta^{\alpha_2}, \omega^{\gamma'}$ в уравнения (4.10)–(4.12), придем к системе (1.1), ненулевые коэффициенты которой имеют вид

$$G^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1} = \tilde{T}^{\alpha_1}_{\delta_1}(T^{\delta_1}_{(\beta_1,\gamma_1)} + \varepsilon_1 T^{\delta_1}_{[\beta_1,\gamma_1]}), \tag{4.23}$$

$$G^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_2} = \tilde{T}^{\alpha_2}_{\delta_2}(T^{\delta_2}_{(\beta_2,\gamma_2)} + \varepsilon_2 T^{\delta_2}_{[\beta_2,\gamma_2]}), \tag{4.24}$$

$$Q^{\alpha_1} = 2\varepsilon_1 \tilde{T}^{\alpha_1}_{\delta_1} R^{\delta_1}_{\beta'\gamma'} M^{\gamma'} N^{\beta'}, \tag{4.25}$$

$$Q^{\alpha_2} = 2\varepsilon_2 \tilde{T}^{\alpha_2}_{\delta_2} R^{\delta_2}_{\beta'\gamma'} M^{\gamma'} N^{\beta'}. \tag{4.26}$$

Докажем, что эта система является системой уравнений Эйлера–Лагранжа для лагранжиана (4.16). Действительно, уравнения Эйлера для лагранжиана (4.16) приводят к системе

$$U^{\alpha_1}_{xy} + G^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1} U^{\beta_1}_x U^{\gamma_1}_y - \frac{1}{2S_2}\tilde{h}^{\alpha_1\beta_1} Q_{,\beta_1} = 0,$$

$$U^{\alpha_2}_{xy} + G^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_2} U^{\beta_2}_x U^{\gamma_2}_y - \frac{1}{2S_1}\tilde{h}^{\alpha_2\beta_2} Q_{,\beta_2} = 0,$$

где коэффициенты $G^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1}, G^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_2}$ имеют вид (4.23), (4.24). Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 5.

Докажем, что функции $-\frac{1}{2S_2}\tilde{h}^{\alpha_1\beta_1}Q_{,\beta_1}$ совпадают с функциями (4.25). Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — каноническое разложение, т. е.

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, [\mathfrak{h},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, [\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}.$$

Тогда из (4.13) и свойств метрики Киллинга следует, что

$$h^0_1(h,[m_1,m_2]) = S_1 g^0(m_1,[m_2,h]) \tag{4.27}$$

для любых элементов $h \in \mathfrak{h}_1, \quad m_1, m_2 \in \mathfrak{m}$. Заметим, что равенство (4.27) эквивалентно следующему условию для структурных констант:

$$h^0_{\alpha_1\varphi_1} R^{\varphi_1}_{\beta'\gamma'} = S_1 g^0_{\beta'\delta'} D^{\delta'}_{\gamma'\alpha_1}. \tag{4.28}$$

Теперь, дифференцируя равенство (4.17) по переменной U^{β_1} и учитывая (4.18), (4.19), (4.28), получим

$$Q_{,\beta_1} = 4S_1S_2 g^0_{\gamma'\delta'}(M^{\gamma'}_{,\beta_1}N^{\delta'} + M^{\gamma'}N^{\delta'}_{,\beta_1}) =$$
$$= 4S_1S_2 g^0_{\gamma'\delta'}(\frac{1-\varepsilon_1}{2} D^{\gamma'}_{\psi'\alpha_1} T^{\alpha_1}_{\beta_1} M^{\psi'} N^{\delta'} + \frac{1+\varepsilon_1}{2} D^{\delta'}_{\psi'\alpha_1} T^{\alpha_1}_{\beta_1} M^{\gamma'} N^{\psi'}) =$$
$$= -4\varepsilon_1 S_2 h^0_{\alpha_1\varphi_1} R^{\varphi_1}_{\delta'\gamma'} T^{\alpha_1}_{\beta_1} M^{\gamma'} N^{\delta'}.$$

Поэтому функции $-\frac{1}{2S_2}\tilde{h}^{\alpha_1\beta_1}Q_{,\beta_1}$ совпадают с функциями (4.25).

Аналогично доказывается, что функции $-\frac{1}{2S_1}\tilde{h}^{\alpha_2\beta_2}Q_{,\beta_2}$ совпадают с функциями (4.26). Теорема доказана.

Замечание 7. Случай, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, приводит к системам, которые получаются при помощи конструкции Лезнова–Савельева.

Аналогично доказывается теорема.

Теорема 9. *Пусть G/H — локально симметрическое пространство, G — полупростая группа Ли и $H = H_1 \times ... \times H_p$, где $H_1, ..., H_p$ — простые группы Ли. Пусть (U^{α_i}) — локальная система координат на группе H_i, и лагранжиан L имеет вид*

$$L = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{S_i}[h_{\alpha_i\beta_i}(U^{\gamma_i}) + \varepsilon_i a_{\alpha_i\beta_i}(U^{\gamma_i})]U^{\alpha_i}_x U^{\beta_i}_y + 4g^0_{\beta'\gamma'} M^{\beta'} N^{\gamma'},$$

где:
(i) $\varepsilon_i = \pm 1, \ (i = \overline{1,p})$;
(ii) $h_{\alpha_i\beta_i}$ — метрика Киллинга группы H_i;
(iii) $a_{\alpha_i\beta_i}, \ g^0_{\beta\gamma}, M^{\beta'}, N^{\gamma'}$ и константы S_i определяются так же, как и в предыдущей теореме.

Тогда система уравнений Эйлера для лагранжиана L допускает представление Лакса.

Пример 5. Система, ассоциированная с симметрическим пространством $SO(6)/(SO(3) \times SO(3))$.

Выберем локальные кординаты U^1, U^2, U^3 и левоинвариантные формы Φ^1, Φ^2, Φ^3 на группе $H_1 = SO(3)$ как в примере 4. Локальные координаты U^4, U^5, U^6 и левоинвариантные формы Φ^4, Φ^5, Φ^6 на группе $H_2 = SO(3)$ выберем аналогично.

Используя вложение группы $SO(6)$ в $GL(6)$, запишем структурные уравнения симметрического пространства $SO(6)/(SO(3) \times SO(3))$ в виде

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega, \ \Omega = \left\| \begin{matrix} \theta^a_b & \omega^a_{b'} \\ \omega^{a'}_b & \theta^{a'}_{b'} \end{matrix} \right\|, \tag{4.29}$$

где $\theta^a_b = -\theta^b_a, \theta^{a'}_{b'} = -\theta^{b'}_{a'}, \omega^{a'}_b = -\omega^b_{a'}$, индексы $a, b, c, ...$ принимают значения от 1 до 3, индексы $a', b', ...$ изменяются от 4 до 6.

Рассмотрим случай $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1$. Следуя доказательству теоремы 8, положим

$$\theta_2^1 = (-\cos U^3 U_y^1 - U_y^2)dy,\ \theta_3^1 = (-\sin U^3 \cos U^2 U_y^1 + \sin U^2 U_y^3)dy,$$

$$\theta_3^2 = (-\cos U^2 U_y^3 - \sin U^2 \sin U^3 U_y^1)dy,\ \theta_5^4 = (-\cos U^6 U_x^4 - U_x^5)dx, \tag{4.30}$$

$$\theta_6^4 = (-\sin U^6 \cos U^5 U_x^4 + \sin U^5 U_x^6)dx,\ \theta_6^5 = (-\cos U^5 U_x^6 - \sin U^5 \sin U^6 U_x^4)dx,$$

$$\omega_{a'}^a = \lambda M_{a'}^a dx + \frac{1}{\lambda} N_{a'}^a dy. \tag{4.31}$$

Подставляя (4.30), (4.31) в уравнения (4.29) и приравнивая к нулю коэффициенты при λ и $\dfrac{1}{\lambda}$, получим системы дифференциальных уравнений для определения функций $M_{a'}^a, N_{a'}^a$. Выберем следующие частные решения: $M_6^1 = \sin U^2 \sin U^3$, $M_6^2 = -\cos U^2 \sin U^3$, $M_6^3 = \cos U^3$, $N_4^3 = k \sin U^2 \sin U^3$, $N_5^3 = -k \cos U^5 \sin U^6$, $N_6^3 = k \cos U^6$, где $k = const$, а другие функции $M_{a'}^a, N_{a'}^a$ равны нулю. Теперь, подставляя найденные функции $M_{a'}^a, N_{a'}^a$ в (4.31), получим представление Лакса (4.29)–(4.31) системы уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = \sum_{\beta_1=1}^{3} U_x^{\beta_1} U_y^{\beta_1} + 2\cos U^3 U_y^1 U_x^2 + \sum_{\beta_2=4}^{6} U_x^{\beta_2} U_y^{\beta_2} + 2\cos U^6 U_x^4 U_y^5 + 2k \cos U^3 \cos U^6. \tag{4.32}$$

Пример 6. Интегрируемое обобщение уравнения sin-Gordon.

Заметим, что система уравнений Эйлера для лагранжиана (4.32) допускает редукцию, аналогичную указанной в [17]. Непосредственная проверка показывает, что формы

$$\delta_1 = (\cos U^3 U_x^2 + U_x^1)dx,\ \ \delta_2 = (\cos U^6 U_x^5 + U_x^4)dx,$$

$$\delta_3 = (\cos U^3 U_y^1 + U_y^2)dy,\ \ \delta_4 = (\cos U^6 U_y^4 + U_y^5)dy$$

являются законами сохранения данной системы. Теперь, подставляя выражения

$$U_x^1 = -\cos U^3 U_x^2,\ U_y^1 = -\frac{1}{\cos U^3} U_y^2,$$

$$U_x^4 = -\frac{1}{\cos U^6} U_x^5,\ U_y^4 = -\cos U^6 U_y^5$$

в систему уравнений Эйлера для лагранжиана (4.32), получим систему

$$U_{xy}^2 + U_y^3 U_x^2 \operatorname{ctg} U^3 + \frac{1}{\sin U^3 \cos U^3} U_x^3 U_y^2 = 0,\ U_{xy}^3 - U_y^2 U_x^2 tgU^3 + k \sin U^3 \cos U^6 = 0,$$

$$U_{xy}^5 + U_y^5 U_x^6 \operatorname{ctg} U^6 + \frac{1}{\sin U^6 \cos U^6} U_x^5 U_y^6 = 0,\ U_{xy}^6 - U_y^5 U_x^5 tgU^6 + k \cos U^3 \sin U^6 = 0.$$

Данная система не принадлежит классу лагранжевых систем, однако она допускает преобразование Бэклунда, определенное равенствами

$$U_y^2 = \frac{\cos U^3}{1+\cos U^3} V_y^1,\ \ U_x^2 = \frac{1}{1+\cos U^3} V_x^1,\ \ U^3 = V^2,$$

$$U_y^5 = \frac{1}{1+\cos U^6} V_y^3,\ \ U_x^5 = \frac{\cos U^6}{1+\cos U^6} V_x^3,\ \ U^6 = V^4,$$

которое приводит к системе

$$V^1_{xy} + \frac{1}{\sin V^2} V^1_y V^2_x + \frac{1}{\sin V^2} V^2_y V^1_x = 0,$$

$$V^2_{xy} - \frac{\sin V^2}{(1+\cos V^2)^2} V^1_y V^1_x + k \sin V^2 \cos V^4 = 0,$$

$$V^3_{xy} + \frac{1}{\sin V^4} V^3_y V^4_x + \frac{1}{\sin V^4} V^4_y V^3_x = 0, \tag{4.33}$$

$$V^4_{xy} - \frac{\sin V^4}{(1+\cos V^4)^2} V^3_y V^3_x + k \cos V^2 \sin V^4 = 0.$$

Последняя система является системой уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = V^1_x V^1_y tg^2 \frac{V^2}{2} + V^2_x V^2_y + V^3_x V^3_y tg^2 \frac{V^4}{2} + V^4_x V^4_y + 2k \cos V^2 \cos V^4. \tag{4.34}$$

Замечание 8. Метрика, ассоциированная с лагранжианом (4.34), является произведением двух «чернодырных» метрик [18].

Теорема 9 подсказывает следующий способ построения новых лагранжевых интегрируемых систем.

Пусть системы уравнений Эйлера для лагранжианов

$$L_i = g_{\alpha_i \beta_i}(U^{\delta_i}) U^{\alpha_i}_x U^{\beta_i}_y + Q_i(U^{\delta_i}) \ \ (i = 1, 2)$$

допускают представление Лакса со значениями в алгебрах Ли $\mathfrak{h}_i$ групп Ли H_i соответственно. Пусть также существует локально симметрическое пространство $G/(H_1 \times H_2)$. Оказывается, что в ряде случаев, используя представления Лакса для этих систем, можно построить представление Лакса для системы с лагранжианом

$$L = \sum_{i=1}^{2} S_i g_{\alpha_i \beta_i}(U^{\delta_i}) U^{\alpha_i}_x U^{\beta_i}_y + Q,$$

где S_i — некоторые константы и $Q = Q(U^{\delta_1}, U^{\delta_2})$ — гладкая функция такая, что система уравнений Эйлера для лагранжиана L не распадается на независимые системы.

Пример 7. Принимая во внимание эти соображения, при помощи структурных уравнений симметрического пространства $SO(6)/(SO(3) \times SO(3))$ построено представление Лакса для системы (4.33), которое может быть записано в виде (4.29), (4.31), где

$$\theta_2^1 = \frac{1}{2\cos\dfrac{V^2}{2}}(V_x^1dx + V_y^1dy),\ \theta_3^1 = -\frac{\sin\dfrac{V^2}{2}}{2\cos^2\dfrac{V^2}{2}}(V_x^1dx - V_y^1dy),$$

$$\theta_3^2 = \frac{1}{2}(V_x^2dx - V_y^2dy),\ \theta_5^4 = \frac{1}{2\cos\dfrac{V^4}{2}}(V_x^3dx + V_y^3dy),$$

$$\theta_6^4 = -\frac{\sin\dfrac{V^4}{2}}{2\cos^2\dfrac{V^4}{2}}(V_x^3dx - V_y^3dy),\ \theta_6^5 = \frac{1}{2}(V_x^4dx - V_y^4dy),$$

$$M_4^a = M_{a'}^1 = 0,\ N_4^a = N_{a'}^1 = 0,$$

$$M_5^2 = \sin\frac{V^2}{2}\sin\frac{V^4}{2},\ M_6^2 = -\sin\frac{V^2}{2}\cos\frac{V^4}{2},$$

$$M_5^3 = -\cos\frac{V^2}{2}\sin\frac{V^4}{2},\ \ M_6^3 = \cos\frac{V^2}{2}\cos\frac{V^4}{2},$$

$$N_5^2 = k\sin\frac{V^2}{2}\sin\frac{V^4}{2},\ \ N_6^2 = k\sin\frac{V^2}{2}\cos\frac{V^4}{2},$$

$$N_5^3 = k\cos\frac{V^2}{2}\sin\frac{V^4}{2},\ \ N_6^3 = k\cos\frac{V^2}{2}\cos\frac{V^4}{2}.$$

Замечание 9. Систему (4.33) можно рассматривать как новое интегрируемое обобщение уравнения sin-Gordon. Действительно, подставляя $V^3 = V^4 = 0$ в (4.33), получим систему Лунда–Редже. Далее, полагая $V^1 = 0,\ V^2 = V$, получим хорошо известное уравнение sin-Gordon.

Далее построены новые интегрируемые системы, ассоциированные с симметрическими пространствами вида $SO(p+3)/(SO(p)\times SO(3))$ и $SO(p+2)/(SO(p)\times SO(2))$.

Теорема 10. *Пусть (U^{α_1}) — локальная система координат на группе $SO(p), p \geqslant 3$. Определим матрицы $h_{\alpha_1\beta_1}, a_{\alpha_1\beta_1}$ так же, как в теореме 8 для группы $H_1 = SO(p)$.*

Тогда система уравнений Эйлера–Лагранжа для лагранжиана

$$L = h_{\alpha_1\beta_1}U_x^{\alpha_1}U_y^{\beta_1} + a_{\alpha_1\beta_1}U_x^{\alpha_1}U_y^{\beta_1} - 2(p-2)[V_x^1V_y^1 tg^2\frac{V^2}{2} + V_x^2V_y^2]-$$

$$-4(p-2)m_b n^b\cos V^2 \tag{4.35}$$

допускает представление Лакса. Здесь индексы a, b принимают значения от 1 до p; индексы a', b' изменяются от $p+1$ до $p+3$; m^b — произвольные константы, а функции $n^b = n^b(U^\delta)$ удовлетворяют условиям

$$n^b_{,\beta_1} = H^b_{c\gamma_1}T^{\gamma_1}_{\beta_1}n^c, \tag{4.36}$$

где коэффициенты $H^b_{c\gamma_1} = -H^c_{b\gamma_1}$ определяются вложением алгебры Ли $\mathfrak{so}(p)$ в $\mathfrak{gl}(p)$.

Доказательство.

Воспользуемся вложением группы $SO(p+3)$ в $GL(p+3)$ и запишем структурные уравнения симметрического пространства $SO(p+3)/(SO(p)\times SO(3))$ в виде (4.29), где индексы

$a, b = \overline{1, p}$, $a', b' = \overline{p+1, p+3}$. Пусть коэффициенты $H^a_{b\delta_1} = -H^b_{a\delta_1}$ определяются вложением алгебры Ли $\mathfrak{so}(p)$ в $\mathfrak{gl}(p)$, т. е. $\theta^a_b = H^a_{b\alpha_1}\Phi^{\beta_1}$, где $\Phi^{\alpha_1} = T^{\alpha_1}_{\beta_1} dU^{\beta_1}$ — базис левоинвариантных дифференциальных форм группы $SO(p)$. Тогда имеют место тождества:

$$H^a_{b\delta_1} C^{\delta_1}_{\beta_1\gamma_1} = H^a_{d[\gamma_1} H^d_{|b|\beta_1]}, \quad (p-2) H^a_{b\beta_1} H^b_{a\gamma_1} = h^0_{\beta_1\gamma_1}, \tag{4.37}$$

где $C^{\delta_1}_{\beta_1\gamma_1}$ — структурные константы группы $SO(p)$ относительно базиса $\Phi^{\alpha_1} = T^{\alpha_1}_{\beta_1} dU^{\beta_1}$, $h^0_{\beta_1\gamma_1}$ — коэффициенты метрики Киллинга алгебры $\mathfrak{so}(p)$, заданные относительно базиса, двойственного к $\{\Phi^{\alpha_1}\}$.

Подставляя в (4.29) выражения

$$\theta^a_b = H^a_{b\beta_1} T^{\beta_1}_{\gamma_1} U^{\gamma_1}_x dx, \qquad \theta^{p+1}_{p+2} = \frac{1}{2\cos\frac{V^2}{2}}(V^1_x dx + V^1_y dy), \tag{4.38}$$

$$\theta^{p+1}_{p+3} = -\frac{\sin\frac{V^2}{2}}{2\cos^2\frac{V^2}{2}}(V^1_x dx - V^1_y dy), \quad \theta^{p+2}_{p+3} = \frac{1}{2}(V^2_x dx - V^2_y dy), \tag{4.39}$$

$$\omega^a_{a'} = \lambda M^a_{a'} dx + \frac{1}{\lambda} N^a_{a'} dy \tag{4.40}$$

и приравнивая к нулю коэффициенты при λ и $1/\lambda$, получим следующие системы дифференциальных уравнений для функций $M^a_{a'}, N^a_{a'}$:

$$M^a_{a',\beta_1} = 0,$$

$$M^a_{p+1,V^1} = \frac{1}{2\cos\frac{V^2}{2}} M^a_{p+2} + \frac{\sin\frac{V^2}{2}}{2\cos^2\frac{V^2}{2}} M^a_{p+3}, \; M^a_{p+1,V^2} = 0,$$

$$M^a_{p+2,V^1} = -\frac{1}{2\cos\frac{V^2}{2}} M^a_{p+1}, \qquad M^a_{p+2,V^2} = -\frac{1}{2} M^a_{p+3},$$

$$M^a_{p+3,V^1} = -\frac{\sin\frac{V^2}{2}}{2\cos^2\frac{V^2}{2}} M^a_{p+1}, \qquad M^a_{p+3,V^2} = \frac{1}{2} M^a_{p+2}$$

и

$$N^a_{a',\beta_1} = H^a_{b\gamma_1} T^{\gamma_1}_{\beta_1} N^b_{a'},$$

$$N^a_{p+1,V^1} = \frac{1}{2\cos\frac{V^2}{2}} N^a_{p+2} - \frac{\sin\frac{V^2}{2}}{2\cos^2\frac{V^2}{2}} N^a_{p+3}, \quad N^a_{p+1,V^2} = 0,$$

$$N^a_{p+2,V^1} = -\frac{1}{2\cos\frac{V^2}{2}} N^a_{p+1}, \; N^a_{p+2,V^2} = \frac{1}{2} N^a_{p+3},$$

$$N^a_{p+3,V^1} = \frac{\sin\frac{V^2}{2}}{2\cos^2\frac{V^2}{2}} N^a_{p+1}, \quad N^a_{p+3,V^2} = -\frac{1}{2} N^a_{p+2}.$$

Общее решение этих систем имеет вид

$$M^b_{p+1} = 0,\;\; M^b_{p+2} = -m_b \sin\frac{V^2}{2},\;\; M^b_{p+3} = m_b \cos\frac{V^2}{2},$$

$$N^b_{p+1} = 0,\;\; N^b_{p+2} = n^b(U^\delta)\sin\frac{V^2}{2},\;\; N^b_{p+3} = n^b(U^\delta)\cos\frac{V^2}{2},$$

где m_a — произвольные константы, а функции n^b являются решениями системы дифференциальных уравнений (4.36).

Теперь подстановка в (4.29) соотношений (4.38)–(4.40) приводит к системе

$$\begin{aligned} U^{\delta_1}_{xy} + \tilde{T}^{\delta_1}_{\varphi_1} T^{\varphi_1}_{\beta_1,\gamma_1} U^{\beta_1}_x U^{\gamma_1}_y + 2(p-2)\tilde{T}^{\delta_1}_{\varphi_1}\tilde{h^0}^{\varphi_1\psi_1} H^a_{b\psi_1} m_a n^b \cos V^2 = 0,\\ V^1_{xy} + \frac{1}{\sin V^2} V^1_y V^2_x + \frac{1}{\sin V^2} V^2_y V^1_x = 0,\\ V^2_{xy} - \frac{\sin V^2}{(1+\cos V^2)^2} V^1_y V^1_x + m_a n^a \sin V^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Дальнейшая проверка показывает, что система (4.41) является системой уравнений Эйлера для лагранжиана (4.35). Теорема доказана.

Теорема 11. *Пусть (U^{α_1}) — локальная система координат на группе $SO(p), p \geqslant 3$. Определим матрицы $h_{\alpha_1\beta_1}, a_{\alpha_1\beta_1}$ так же, как в теореме 8 для группы $H_1 = SO(p)$.*

Тогда система уравнений Эйлера–Лагранжа для лагранжиана

$$\begin{aligned} L =& [h_{\alpha_1\beta_1}(U^{\gamma_1}) + a_{\alpha_1\beta_1}(U^{\gamma_1})] U^{\alpha_1}_x U^{\beta_1}_y - 2(p-2)k^2 V_x V_y + \\ &+ 4(p-2) M^b_{b'} N^{b'}_b \end{aligned} \tag{4.42}$$

допускает представление Лакса. Здесь индексы a, b изменяются от 1 до p, индексы a' и b' принимают значения $p+1, p+2$; $M^b_{b'} = -M^{b'}_b$, $N^b_{b'} = -N^{b'}_b$ и

$$M^a_{p+1} = m^a_1 \cos kV + m^a_2 \sin kV, \quad M^a_{p+2} = -m^a_1 \sin kV + m^a_2 \cos kV, \tag{4.43}$$

где m^a_1, m^a_2 — произвольные константы. Функции $N^a_{a'} = N^a_{a'}(U^{\delta_1})$ являются решениями системы уравнений

$$N^a_{a',\beta_1} = H^a_{b\gamma_1} T^{\gamma_1}_{\beta_1} N^b_{a'}, \tag{4.44}$$

где коэффициенты $H^a_{b\gamma_1} = -H^b_{a\gamma_1}$ определяются вложением алгебры Ли $\mathfrak{so}(p)$ в $\mathfrak{gl}(p)$.

Доказательство.

Используя вложение группы $SO(p+2)$ в $GL(p+2)$, запишем структурные уравнения симметрического пространства $SO(p+2)/(SO(p)\times SO(2))$ в виде (4.29), где индексы $a, b, c, \ldots$ изменяются от 1 до p, индексы со штрихами $a', b', \ldots$ принимают значения $p+1, p+2$. Пусть коэффициенты $H^a_{b\delta_1}$ и формы θ^a_b определены так же, как и в доказательстве теоремы 10.

Полагая в (4.29)

$$\begin{aligned} &\theta^a_b = H^a_{b\beta_1} T^{\beta_1}_{\gamma_1} U^{\gamma_1}_x dx,\;\; \theta^{p+1}_{p+2} = kV_y dy,\\ &\omega^a_{a'} = \lambda M^a_{a'} dx + \frac{1}{\lambda} N^a_{a'} dy \end{aligned} \tag{4.45}$$

и приравнивая к нулю коэффициенты при λ и $1/\lambda$, получим системы дифференциальных уравнений для функции $M^a_{a'}, N^a_{a'}$:

$$M^a_{a',\beta_1} = 0,\ M^a_{p+1,V} = kM^a_{p+2},\ M^a_{p+2,V} = -kM^a_{p+1}, \tag{4.46}$$

$$N^a_{a',\beta_1} = H^a_{b\gamma_1} T^{\gamma_1}_{\beta_1} N^b_{a'}, \qquad N^a_{a',V} = 0. \tag{4.47}$$

Нетрудно найти общее решение системы (4.46), которое имеет вид (4.43). Кроме того, заметим, что система (4.47) совместна в силу первого из равенств (4.37).

Теперь, подставляя в (4.29) выражения для форм $\theta^a_b, \omega^a_{a'}, \theta^{a'}_{b'}$, где функции $M^a_{a'}, N^a_{a'}$ удовлетворяют условиям теоремы, придем к системе

$$U^{\delta_1}_{xy} + \tilde{T}^{\delta_1}_{\varphi_1} T^{\varphi_1}_{\beta_1,\gamma_1} U^{\beta_1}_x U^{\gamma_1}_y + 2(p-2)\tilde{T}^{\delta_1}_{\varphi_1} \tilde{h^0}^{\varphi_1\psi_1} H^b_{a\psi_1} M^a_{b'} N^{b'}_b = 0,$$
$$V_{xy} + \frac{1}{k}(M^a_{p+2} N^{p+2}_a - M^{p+1}_a N^a_{p+2}) = 0.$$

Окончательная проверка показывает, что данная система является системой уравнений Эйлера для лагранжиана (4.42). Теорема доказана.

Пример 8. Система, ассоциированная с симметрическим пространством $SO(5)/(SO(3) \times SO(2))$.

Выберем локальные координаты и левоинвариантные формы группы $SO(3)$ так же, как в примере 4. Теперь, следуя доказательству теоремы 11, положим $M^1_5 = \sin U^2 \sin U^3$, $M^2_5 = -\cos U^2 \sin U^3$, $M^3_5 = \cos U^3$, $M^a_4 = 0$, $N^1_{a'} = N^2_a = 0$, $N^3_4 = l \sin V$, $N^3_5 = l\cos V$, $l = \mathrm{const}$. Тогда (4.29), (4.45) определяют представление Лакса системы уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = \sum_{\alpha_1=1}^{3} U^{\alpha_1}_x U^{\alpha_1}_y + V_x V_y + 2\cos U^3 U^1_y U^2_x + 2l \cos U^3 \cos V.$$

Выполняя редукцию и преобразования Бэклунда аналогично примеру 6, получим систему

$$V^1_{xy} + \frac{1}{\sin V^2} V^1_y V^2_x + \frac{1}{\sin V^2} V^2_y V^1_x = 0,$$

$$V^2_{xy} - \frac{\sin V^2}{(1+\cos V^2)^2} V^1_y V^1_x + l \sin V^2 \sin V = 0,$$

$$V_{xy} + l\cos V^2 \sin V = 0,$$

которая является системой уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = V^1_x V^1_y tg^2 \frac{V^2}{2} + V^2_x V^2_y + V_x V_y + 2l\cos V^2 \cos V.$$

Последняя система допускает представление Лакса вида (4.29), где

$$\theta^1_2 = \frac{1}{2\cos\frac{V^2}{2}}(V^1_x dx + V^1_y dy),\ \theta^1_3 = -\frac{\sin\frac{V^2}{2}}{2\cos^2\frac{V^2}{2}}(V^1_x dx - V^1_y dy),$$

$$\theta_3^2 = \frac{1}{2}(V_x^2 dx - V_y^2 dy), \; \theta_5^4 = V_x dx,$$

$$\omega_{a'}^a = \lambda M_{a'}^a dx + \frac{1}{\lambda} N_{a'}^a dy,$$

$M_4^a = M_5^1 = N_4^1 = N_5^1 = 0$, $M_5^2 = -\sin\frac{V^2}{2}$, $M_5^3 = \cos\frac{V^2}{2}$, $N_4^2 = l\sin\frac{V^2}{2}\sin V$, $N_5^2 = l\sin\frac{V^2}{2}\cos V$, $N_4^3 = l\cos\frac{V^2}{2}\sin V$, $N_5^3 = l\cos\frac{V^2}{2}\cos V$.

Отметим, что интегрируемые системы с лагранжианами вида

$$L = V_x^1 V_y^1 tg^2\frac{V^2}{2} + V_x^2 V_y^2 + V_x V_y + Q(V^1, V^2)$$

изучены Мешковым А. Г. и Демским Д. К. (см., например, [1], [19]).

5. Заключение

В работе построены новые интегрируемые лагранжевы системы кирального типа. Метрики, ассоциированные с лагранжианами систем, указанных в теореме 10, примерах 6 и 8, содержат как множитель двумерную метрику $ds^2 = tg^2\frac{V}{2}(dU)^2 + (dV)^2$. Эта метрика используется при описании «чернодырной» модели в терии поля [18]. Представляется интересным найти другие интегрируемые системы, лагранжианы которых содержат эту же «чернодырную» метрику.

Авторы выражают благодарность Е. В. Ферапонтову, Н. А. Степанову и Ю. В. Тузову за полезные обсуждения и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддердке РФФИ (проект № 05-01-00509а)

Список литературы

[1] Demskoi, D.K. and Meshkov, A.G., Zero-Curvature Representation for a Chiral-Type Three-Field System, *Inverse Problems,* 2003, vol. 19, № 3, pp. 563–571.

[2] Dijkgraaf, R., Verlinde, H.L. and Verlinde, E.P., String Propagation in a Black Hole Geometry, *Nuclear Phys. B.,* 1992, vol. 371, pp. 269–314.

[3] Bilal, A., Non-FAbelian Toda Theory: a Completely Integrable Model for Strings on a Black Hole Background, *Nuclear Phys. B.,* 1994, vol. 422, pp. 258–288.

[4] Wess, J. and Zumino, B., Consequences of Anomalos Ward Identities, *Phys. Lett. B.,* 1971, vol. 37, pp. 95–97.

[5] Новиков, С.П., Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса, *Успехи мат. наук,* 1982, № 5, с. 3–49.

[6] Witten, E., Nonabelian Bosonization in Two-Dimenisions, *Commun. Math. Phys.,* 1984, vol. 92, pp. 455–472.

[7] Gawedzki, K. and Kupiainen, A., G/H Conformal Field Theory from Gauged WZW Model, *Phys. Lett. B.,* 1988, vol. 215, pp. 119–123.

[8] Трофимов, В.В., *Введение в геометрию многообразий с симметриями.* М.: Изд-во МГУ, 1989.

[9] Тахтаджян, Л.А., Фаддеев, Л.Д., *Гамильтонов подход в теории солитонов.* М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат. лит., 1986.

[10] Leznov, A.N. and Saveliev, M.V., Two-Dimensional Exactly and Completely Integrable Dynamical Systems. Monopoles, Instantons, Dual Models, Relativistic Strings, Lund-Regge Model, Generalized Toda Lattice, etc, *Comm. Math. Phys.,* 1983, vol. 89, pp. 59–75.

[11] Hollowood, T.J., Miramontes, J.L. and Han Park, Q., Massive Integrable Soliton Theories, *Nucl. Phys. B.,* 1995, vol. 445, pp. 451–468.

[12] Крамер, Д. и др., *Точные решения уравнений Эйнштейна.* М.: Энергоиздат, 1982.

[13] Хелгасон, С., *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.* М.: Мир, 1964.

[14] Zakharov, E.V. and Mikhailov, A.V., Relativistically Invariant Two-Dimensional Models of Field Theory which are Integrable by Means of the Inverse Scattering Problem Method, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.,* 1978, vol. 74, pp. 1953–1973.

[15] Баландин, А.В., Система дифференциальных уравнений, допускающая представление нулевой кривизны, *УМН,* 1990, т. 45, № 6(276), с. 125–126.

[16] Sasaki, R., Soliton Equations and Pseudospherical Surfaces, *Nucl. Phys. B.,* 1979, vol. 154, pp. 343–357.

[17] Гетманов, Б.С., Интегрируемая двумерная лоренц-инвариантная нелинейная модель комплексного скалярного поля, *ТМФ,* 1981, т. 48, № 1, с. 13–23.

[18] Witten, E., On String Theory and Black Holes, *Phys. Rev. D,* 1991, vol. 44, pp. 314–324.

[19] Демской, Д.К., Мешков, А.Г., Представление Лакса для триплета скалярных полей, *ТМФ,* 2003, т. 134, № 3, с. 401.