

# **О моноазимутальных решениях уравнения Ландау–Лифшица для ферромагнетика с одноосной анизотропией**

**Н. В. Островская**

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)  
124498, Москва, Зеленоград, Солнечная аллея, 5  
E-mail: ost-miet@yandex.ru

*Получено 9 мая 2007 г.*

Построены точные решения системы уравнения Ландау–Лифшица для ферромагнетика с одноосной анизотропией без учета диссипации, относящиеся к классу моноазимутальных сепарабельных решений. Найдено новое решение, описывающее колебания 360-градусной доменной стенки. Полученные результаты верны и для двухосного ферромагнетика.

Ключевые слова: уравнение Ландау–Лифшица, ферромагнетик, одноосная анизотропия.

**N. V. Ostrovskaya**

## **On the Monoazimuthal Solutions of the Landau–Lifshits Equation for a Uniaxially Anisotropic Ferromagnet**

Exact solutions of the Landau–Lifshits equation for a uniaxially anisotropic nondissipative ferromagnet are derived. The solutions belong to the class of monoazimuthal separable ones. The new solution describing oscillations of a 360-degree domain wall is obtained. The results are true for biaxial ferromagnet as well.

Keywords: The Landau–Lifshits equation, ferromagnet, uniaxial anisotropy.

Mathematical Subject Classifications: 35Q99.

Фактически, все используемые сегодня модели магнитодинамики были заложены в основополагающей работе [1] и базируются на выписанном в ней уравнении относительно вектора магнитного момента  $\mathbf{M}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -|\gamma| [\mathbf{M}, \mathbf{H}_{eff}], \quad (1)$$

где  $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $\mathbf{H}_{eff} = \delta W / \delta \mathbf{M}$  — эффективное магнитное поле,  $W$  — плотность магнитной энергии, в которой сосредоточено физическое содержание той или иной изучаемой модели магнетика. Но даже для самых простых моделей итоговые уравнения являются нелинейными и представляют значительные трудности для решения. Это позволяет считать удачей нахождение любого частного решения, независимо от метода его построения ([4],[5]). Однако при этом какие-то ветви решений в построенных семействах могут оказаться утерянными. В настоящей работе построены некоторые новые решения в семействе моноазимутальных сепарабельных решений для ферромагнетика с одноосной анизотропией.

Если в модели учтен вклад обменного взаимодействия  $W_E$ , энергии анизотропии  $W_A$  и энергии магнитодипольного взаимодействия  $W_M$ , то в случае, когда намагниченность  $\mathbf{M}$  является функцией единственной пространственной переменной  $x$ , имеем ([2])

$$W = W_E + W_A + W_M, \quad W_E = \frac{1}{2}\alpha \left( \frac{\partial M}{\partial x} \right)^2, \quad W_A = -\frac{1}{2}\beta_3 M_z^2, \quad W_M = 2\pi M_x^2,$$

где  $\alpha$  — обменная постоянная,  $\beta_3$  — отличная от нуля компонента тензора магнитной анизотропии. В декартовых координатах вектора намагниченности, с осью  $OZ$ , направленной вдоль оси легкого намагничивания, и произвольной ориентацией осей  $OX$  и  $OY$  в объеме магнитного кристалла, уравнение (1) сводится к

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \left[ \mathbf{m}, \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2} \right] - \beta_3 [\mathbf{m}e_z](\mathbf{m}e_z) - \beta_1 [\mathbf{m}e_x](\mathbf{m}e_x), \quad (2)$$

где  $\beta_1 = -4\pi$ , или, иначе, к

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \left[ \mathbf{m}, \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2} - \mathbf{Dm} \right]. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{m} = \{m_x, m_y, m_z\}$  — нормированный к единице вектор намагниченности:  $|\mathbf{m}| = 1$ ; пространственная переменная  $x$  нормирована на величину  $(\alpha/\beta_3)^{1/2}$ , время измеряется в единицах  $[t] = ((\beta_3 M_s))^{-1}$ ,  $M_s$  — намагниченность насыщения,  $\mathbf{D} = \text{diag}(\varepsilon + 1, 1, 0)$ ,  $\varepsilon = -\beta_1/\beta_3$  — параметр материала ( $\varepsilon > 0$ ). Таким образом, формально учет энергии магнитодипольного взаимодействия приводит к возникновению эффективной анизотропии двухосного типа [2].

В сферических координатах, когда

$$m_x = \cos \varphi \sin \theta, \quad m_y = \sin \varphi \sin \theta, \quad m_z = \cos \theta,$$

(отсчет полярного угла  $\theta$  от оси  $OZ$  декартовых координат вектора, азимутального угла  $\varphi$  — от оси  $OX$ ), уравнения (3) принимают вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \sin \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \left[ 1 + \varepsilon \cos^2 \varphi + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \sin \theta - \frac{\partial}{\partial x} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \varepsilon \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0. \quad (5)$$

При этом область изменения переменной  $\theta$  лежит на отрезке  $[0, \pi]$ , а переменной  $\varphi$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Рассмотрим моноазимутальные решения системы (4)–(5) вида  $\theta = \theta(x, t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ . Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = F(x, t), \quad \operatorname{tg} \varphi = f(t).$$

Система (4)–(5) при этом преобразуется к виду

$$MNF \frac{\partial f}{\partial t} + MN^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2N^2 F \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 - F(1 - F^2) [N^2 + \varepsilon N] = 0, \quad (6)$$

$$MN^2 \frac{\partial F}{\partial t} - \varepsilon MNF f = 0, \quad (7)$$

где  $M = 1 + F^2$ ,  $N = 1 + f^2$ . Уравнение (7) может быть проинтегрировано:

$$F = \exp \left[ \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{1 + f^2(\tau)} d\tau + \tilde{H}(x) \right] = G(t)H(x), \quad (8)$$

где  $G(t)$ ,  $\tilde{H}(x)$ ,  $H(x)$  — некоторые функции, вид которых должен быть получен из (6). Таким образом, предположение о моноазимутальности динамики вектора намагниченности приводит к выводу о мультипликативной сепарабельности функции  $F$ . Отсюда сразу следует уравнение связи между функциями  $f$  и  $G$

$$\dot{G} = G \frac{\varepsilon f}{1 + f^2}. \quad (9)$$

Подстановка  $F(x, t) = H(x)G(t)$  в первое уравнение системы приводит к уравнению

$$\Phi_1(t) + G^2 \left[ HH'' - 2(H')^2 + H^2 \Phi_0(t) \right] + \Phi_2(x) = 0, \quad (10)$$

где  $\Phi_0(t) = \frac{1}{1 + f^2} \dot{f} + \frac{\varepsilon}{1 + f^2} + 1$ ,  $\Phi_1(t) = \frac{1}{1 + f^2} \dot{f} - \frac{\varepsilon}{1 + f^2} - 1$ ,  $\Phi_2(x) = \frac{H''}{H}$ .

Уравнение (10) очевидно разрешимо в следующих простейших случаях:

1)  $G = \text{const}$ ,  $H = \text{const}$  ( $F = \text{const}$ ).

Тогда из (9) следует  $G = 0$  либо  $f = 0$  (либо одновременно). При  $G = 0$  имеем  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 0$ , т. е., с учетом того, что  $\theta$  — полярный угол сферической системы,  $\theta = 0, \pi$ , угол  $\varphi$  при этом произволен. При  $f = 0$  имеем  $\Phi_0 = \varepsilon + 1$ ,  $\Phi_1 = -\varepsilon - 1$ ,  $\Phi_2 = 0$ , и далее из (10)  $\left\{ \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 1, \operatorname{tg} \varphi = 0 \right\}$ , т. е.  $\{\theta = \pi/2, \varphi = \pi n, n \in Z\}$ . Оба этих случая соответствуют однородной стационарной намагниченности среды.

2)  $G = G(t)$ ,  $H = \text{const}$  ( $F = F(t)$ ). Этот случай означает отсутствие пространственной производной в уравнении (3), т. е. пренебрежение обменным взаимодействием в модели магнетика ( $\alpha = 0$ ). При этом уравнение (3) переходит в уравнение механического волчка с нулевой третьей компонентой тензора инерции [6], [7].

3)  $G = \text{const}$ ,  $H = H(x)$  ( $F = F(x)$ ). Этот случай сводится к уравнению колебаний маятника, когда роль времени играет пространственная переменная. Его смысл в теории магнетизма частично обсужден в работе [3].

В более общем случае для выполнения соотношения (10) было бы достаточно, если бы функция  $\Psi(x, t) = G^2 [HH'' - 2(H')^2 + H^2\Phi_0(t)]$  была аддитивно сепарабельна. Но это может быть только когда хотя бы одна из функций  $G$  и  $H$  является константой (см. выше). Вместе с тем существует еще одна возможность: пусть одновременно

$$\Phi_1(t) = -2B_1 = \text{const}, \quad (11)$$

$$HH'' - 2(H')^2 = -2B_2H^2. \quad (12)$$

Тогда (10) принимает вид

$$-2B_1 + G^2H^2[-2B_2 + \Phi_0(t)] + \Phi_2(x) = 0.$$

Если при этом выполняется

$$G^2[-2B_2 + \Phi_0(t)] = -2B_0 = \text{const}, \quad (13)$$

то  $H$  должно удовлетворять уравнению

$$-2B_1 - 2B_0H^2 + \Phi_0(x) = 0.$$

Таким образом, задача разрешима, если одновременно

$$\begin{aligned} HH'' - 2(H')^2 + 2B_2H^2 &= 0, \\ HH'' - 2B_1H^2 - 2B_0H^4 &= 0, \end{aligned}$$

т. е. если

$$(H')^2 = (B_1 + B_2)H^2 + B_0H^4. \quad (14)$$

Решение последнего уравнения дает множитель  $H(x)$  искомого решения  $F(x, t)$ .

Из (11) получаем уравнение для определения функции  $f$

$$\dot{f} = \varepsilon + (1 - 2B_1)(1 + f^2). \quad (15)$$

Подставив (15) в (13), находим, что

$$G^2 = B_0 \frac{1 + f^2}{(B_1 + B_2 - 1)f^2 + (B_1 + B_2 - 1 - \varepsilon)}.$$

При  $B_1 = B_2$  найденная функция  $G$  удовлетворяет уравнению связи (9), которое является следствием уравнения (7) исходной системы.

Таким образом, общее моноазимутальное решение уравнений (4)–(5) определяется интегралами

$$\int_{f_0}^f \frac{d\xi}{(1 - 2B_1)\xi^2 + \varepsilon + 1 - 2B_1} = t - t_0, \quad \int_{H_0}^H \frac{d\xi}{\xi \sqrt{2B_1 + B_0\xi^2}} = x - x_0$$

и функций

$$G^2 = B_0 \frac{1 + f^2}{(2B_1 - 1)f^2 + (2B_1 - 1 - \varepsilon)}.$$

Конкретный вид решения зависит от входящих в него свободных постоянных  $B_0, B_1$ . Действительные решения, упорядоченные по параметру  $B_1$ , сведены в таблицу 1. В таблице  $\psi = \omega t + \gamma$ ,

$\gamma$  — свободный параметр интегрирования,  $\eta = \sqrt{2B_1}(x - x_0) + \delta$ . Интересно отметить, что параметр  $B_0$  не входит в окончательное решение (является скрытым), тем не менее, для построения решения он необходим. О решениях для  $0 < B_1 < 1/2$ ,  $B_1 = 1/2$ ,  $1/2 < B_1 < (\varepsilon + 1)/2$  сообщалось ранее в работе [4], хотя построенные в ней графики несколько отличаются от приведенных здесь. В диапазоне значений параметра  $0 < B_1 < 1/2$  решения описывают пульсирующую динамику неподвижного солитона (его структурную устойчивость), в диапазоне  $1/2 < B_1 < (\varepsilon + 1)/2$ , напротив, его структурную неустойчивость (распад на две связанные разбегающиеся 180-градусные стенки). Решения типа кинков для  $B_1 \geq (\varepsilon + 1)/2$  являются новыми. При  $B_1 > (\varepsilon + 1)/2$  они описывают пульсирующую динамику 360-градусной стенки, при  $B = (\varepsilon + 1)/2$  — ее структурную неустойчивость. Характер динамики намагниченности, описываемой каждым типом решений, отражен на рис. 1а–е. О новых решениях типа 360-градусных стенок нужно сказать следующее. С физической точки зрения такие решения описывают дефекты магнитной структуры магнетика и представляют собой зародыши перемагничивания в магнитном материале. Их устойчивость определяет устойчивость всей однородной магнитной структуры вещества. Подобные стационарные решения, но в присутствии внешнего магнитного поля, были получены в работе М. Широбокова [3]. В настоящей работе получены колеблющиеся решения типа 360-градусных стенок.

Таблица 1. Действительные моноазимутальные решения системы (4)–(5).

$B_1$	$B_0$	$\text{tg}^2 \frac{\theta}{2}$	$\text{tg}^2 \varphi$	$\omega^2$	Примечание
$(0, \frac{1}{2})$	$(-\infty, 0)$	$\frac{2B_1}{\omega^2} \frac{1 - 2B_1 + \varepsilon \sin^2 \psi}{\text{ch}^2 \eta}$	$\frac{\varepsilon + 1 - 2B_1}{1 - 2B_1} \text{tg}^2 \psi$	$(\varepsilon + 1 - 2B_1)(1 - 2B_1)$	Рис. 1а
$\frac{1}{2}$	$(-\infty, 0)$	$\frac{1 + \psi^2}{\varepsilon \text{ch}^2 \eta}$	$\psi^2$	$\varepsilon^2$	Рис. 1б
$(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon + 1}{2})$	$(-\infty, 0)$	$\frac{2B_1}{\omega^2} \frac{2B_1 - 1 + \varepsilon \text{ch}^2 \psi}{\text{ch}^2 \eta}$	$\frac{\varepsilon + 1 - 2B_1}{2B_1 - 1} \text{th}^2 \psi$	$(\varepsilon + 1 - 2B_1)(2B_1 - 1)$	Рис. 1с
$\frac{\varepsilon + 1}{2}$	$(0, +\infty)$	$\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon} \frac{1 + \psi^2}{\text{ch}^2 \eta}$	$\frac{1}{\psi^2}$	$\varepsilon^2$	Рис. 1д
$(\frac{\varepsilon + 1}{2}, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$\frac{2B_1}{\omega^2} \frac{2B_1 - 1 - \varepsilon \cos^2 \psi}{\text{sh}^2 \eta}$	$\frac{2B_1 - 1 - \varepsilon}{2B_1 - 1} \text{ctg}^2 \psi$	$(2B_1 - 1 - \varepsilon)(2B_1 - 1)$	Рис. 1е

**Замечание 1.** Найденные решения полностью исчерпывают класс моноазимутальных решений. Это можно показать и другим способом. Если продифференцировать уравнение (10) по пространственной переменной и по времени, то новое уравнение допускает разделение переменных. Однако полученные в результате дифференциальные уравнения имеют более высокий порядок относительно исходной задачи. Следовательно, общее решение каждого из них содержит на одну произвольную постоянную больше, а искомые решения могут быть получены лишь при некоторых конкретных значениях избыточных констант. Проведенные выкладки привели к тому же результату, что и представленные в данной статье.

**Замечание 2.** Полученные результаты верны и для двухосного ферромагнетика с произвольной величиной  $\beta_1$  в уравнении (2).



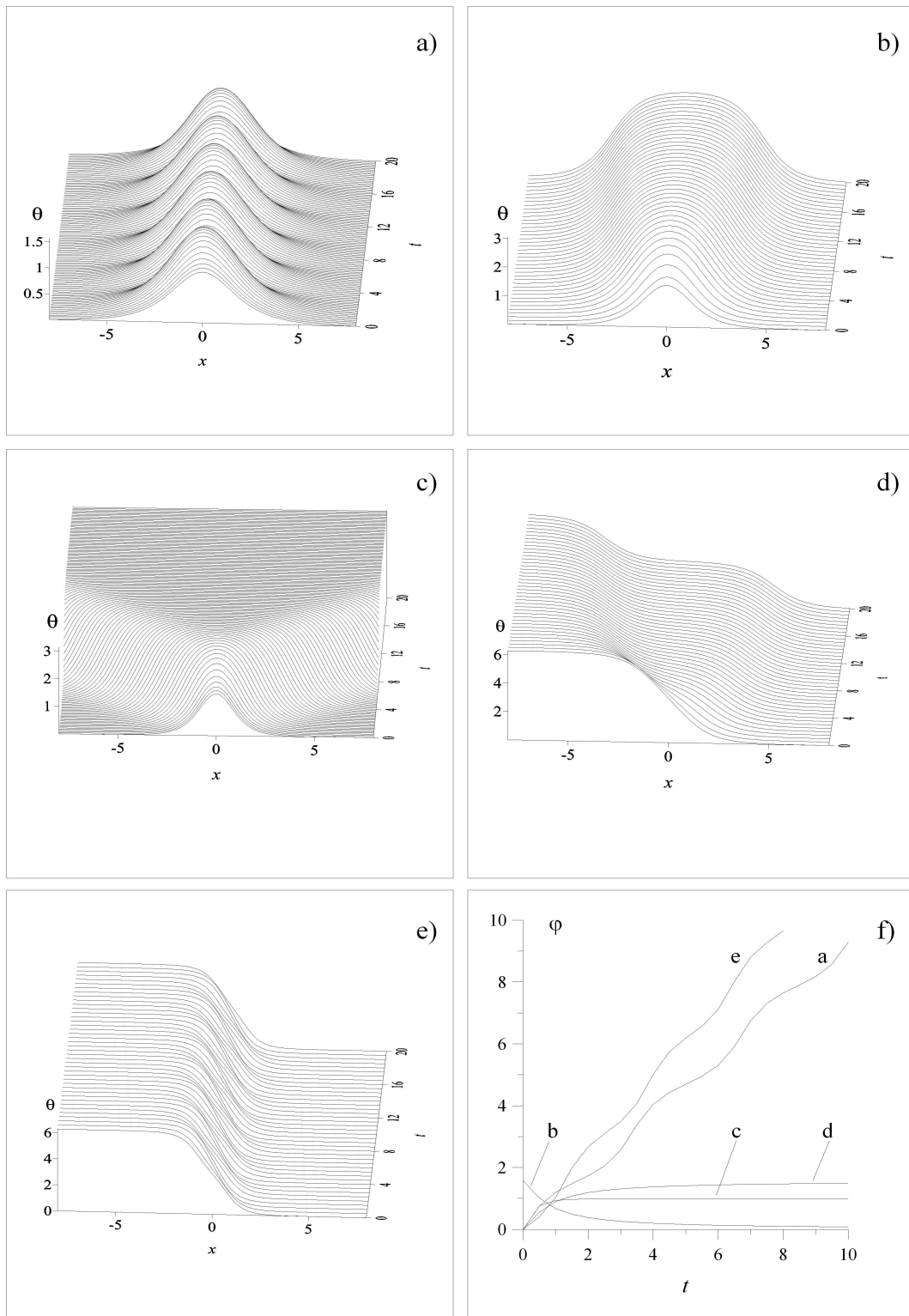


Рис. 1. Моноазимутальные сепарабельные решения системы (4)–(5)

## Список литературы

- [1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел, в *Сборнике трудов Л. Д. Ландау*, т. 1, Москва: Наука, 1969, сс. 128–143.
- [2] Косевич, А.М., Иванов, Б.А., Ковалев, А.С., *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Киев: Наукова думка, 1988, 192 с.
- [3] Ширококов, М., К теории механизма намагничения ферромагнетиков, *ЖЭТФ*, 1945, т. 15, вып. 1–2, сс. 57–75.
- [4] Иванов, Б.А., Косевич, А.А., Бабич И.М., О локализованных нелинейных колебаниях в ферромагнетиках, *Письма в ЖЭТФ*, т. 59, вып. 12, сс. 777–780.
- [5] Бабич, И.М., Косевич, А.М., Нелинейные двухпараметрические возбуждения в анизотропном ферромагнетике, *ЖЭТФ*, т. 82, вып. 4, сс. 1277–1286.
- [6] Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Теоретическая физика*, т. 1, *Механика*, Москва: Физматлит, 2002, 208 с.
- [7] Борисов, А.В., Мамаев, И.С., *Динамика твердого тела*, Москва–Ижевск: РХД, 2001, 384 с.