# Рецензия Д. Гильберта на докторскую диссертацию Э. Цермело «Гидродинамические исследования вихревых движений на поверхности сферы» (1899 г.)[1]

**(Фрагмент)**

Рецензия хранится в Архиве Гёттингенского университета, Философский факультет 184 а[2]

В реферативном ежегоднике *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, запись JFM 33.0781.01, приводится лишь несколько выдержек из вводной части диссертации[3]. Содержание докторской диссертации довольно подробно описал Давид Гильберт в своей рецензии на эту работу. В частности, там говорится:

Представленная доктором Э. Цермело работа «Гидродинамические исследования вихревых движений на поверхности сферы» является чисто математическим исследованием, хотя и связана с физико-метереологической задачей движения циклонов на поверхности Земли.

В *первой* главе рассматривается течение жидкости на произвольной поверхности в пространстве. Взяв за основу дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода и введя две независимые гауссовы координаты, автор указывает общие законы движения жидкости для данного случая. С помощью теоремы Гельмгольца о постоянстве вихревых моментов (*прим.:* имеется в виду циркуляций) автор составляет в случае несжимаемой жидкости дифференциальное уравнение в частных производных 3-го порядка для функции тока $\psi$, которое полностью определяет движение жидкости во времени.

Во *второй* главе эта общая теория применяется к исследованию течения на сфере. Для дифференциального уравнения в частных производных $D\psi = 2\rho$, где $D$ — некоторый дифференциальный оператор, а $\rho$ — вихревая плотность, вводится в качестве основного некое специальное решение, представляющее так называемый сингулярный «точечный вихрь» и постоянную вихревую плотность на остальной поверхности сферы. Используя это решение как и обычную

[1]Ernst Zermelo, *Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen auf einer Kugelfläche*, Habilitationsschrift, Göttinhen, 1899.

[2]Universitätsarchiv Göttingen, Philosophische Fakultät 184a, Seiten 149ff.

[3]В JFM 33.0781.01 реферируется только первая часть диссертации:
E. Zermelo, Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **47** (1902), 201–237.

Вторая часть не была опубликована и хранится в виде рукописи в Архиве Фрайбургского университета:

E. Zermelo, Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche (Zweite Mitteilung), manuscript with pages 61-117, starting with “Chapter III: Gleichgewicht und Bewegung der Strudel”, Universitätsarchiv Freiburg, Zermelo Nachlass, C 129/225.

функцию Грина в случае плоскости, можно записать общий интеграл вышеупомянутого дифференциального уравнения в частных производных: так называемый сферический потенциал, соответствующий обычному логарифмическому потенциалу на плоскости, причем вихревая плотность $\rho$ играет роль массовой плотности. Далее следует изучение свойств сферического потенциала. Если представить себе распределенную по поверхности сферы массу, плотность которой отличается от вихревой плотности на определенную, отличную от нуля постоянную величину, то положение центра тяжести этой массы будет оставаться неизменным. В заключение этой главы указаны особые классы непрерывных стационарных и вращательно-стационарных движений на сфере, выражающиеся через сферические функции.

В *третьей* главе вычисляется скорость точечного вихря и выводятся уравнение движения для случая, когда помимо непрерывного вихревого движения существует конечное количество точечных вихрей. Если при этом вихревая плотность постоянна на всей сфере, то про такое течение будем говорить, что оно вызвано системой вихрей. Система вихрей полностью определяется количеством, положением и интенсивностями точечных вихрей; задача состоит в том, чтобы определить эволюцию конфигурации во времени. Особый интерес представляет случай равновесия, которому соответствует максимальный или минимальный так называемый *собственный потенциал* вихрей. Условие интерпретируется различными геометрическими способами, в которых обычные многогранники предстают особыми фигурами равновесия.

В *последней* главе обстоятельно рассматривается задача трех вихрей, которая сводится к исследованию формы образованного этими вихрями треугольника. Здесь выводятся и обсуждаются дифференциальные уравнения движения, в особенности случай равных интенсивностей, где интегрирование возможно в эллиптических функциях. При этом нужно отметить, что в качестве новых переменных используются квадраты сторон того плоского треугольника, который получают соединением точечных вихрей прямыми линиями.