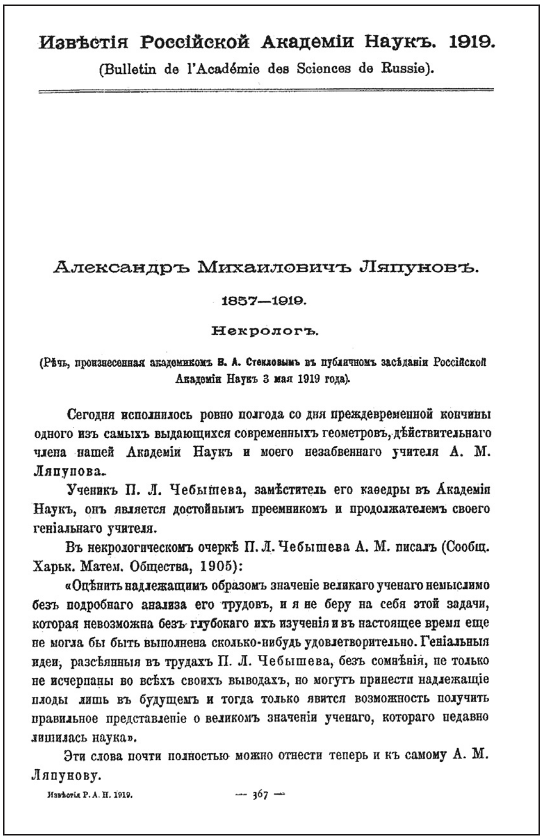
Александр Михайлович Ляпунов

Речь, произнесенная академиком В.А. Стекловым на публичном заседании Российской Академии Наук 3 мая 1919 года

В 2007 году исполнилось 150 лет со дня рождения великого русского математика и механика Александра Михайловича Ляпунова. В этом номере мы приводим прекрасную речь В.А. Стеклова, посвященную памяти А.М. Ляпунова, с которым, как известно, его связывали тесные творческие и дружеские узы. Данный очерк, вероятно, наиболее полно и метко характеризует творческую личность А.М. Ляпунова.

Цитата: В.А. Стеклов, Александр Михайлович Ляпунов, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, № 3, с. 239–253. Впервые опубликовано в *Известиях Российской Академии Наук*, 1919, т. 13, № 8–11, с. 367–388.



Извѣстія Россійской Академіи Наукъ. 1919.

(Bulletin de l'Académie des Sciences de Russie).

Александръ Михаиловичъ Ляпуновъ.

1857—1919.

Некрологъ.

(Рѣчь, произнесенная академикомъ В. А. Стекловымъ въ публичномъ засѣданіи Россійской Академіи Наукъ 3 мая 1919 года).

Сегодня исполнилось ровно полгода со дня преждевременной кончины одного изъ самыхъ выдающихся современныхъ геометровъ, дѣйствительнаго члена нашей Академіи Наукъ и моего незабвеннаго учителя А. М. Ляпунова.

Ученикъ П. Л. Чебышева, замѣститель его каѳедры въ Академіи Наукъ, онъ является достойнымъ преемникомъ и продолжателемъ своего геніальнаго учителя.

Въ некрологическомъ очеркѣ П. Л. Чебышева А. М. писалъ (Сообщ. Харьк. Матем. Общества, 1905):

«Оцѣнить надлежащимъ образомъ значеніе великаго ученаго немыслимо безъ подробнаго анализа его трудовъ, и я не беру на себя этой задачи, которая невозможна безъ глубокаго ихъ изученія и въ настоящее время еще не могла бы быть выполнена сколько-нибудь удовлетворительно. Геніальныя идеи, разсѣянныя въ трудахъ П. Л. Чебышева, безъ сомнѣнія, не только не исчерпаны во всѣхъ своихъ выводахъ, но могутъ принести надлежащіе плоды лишь въ будущемъ и тогда только явится возможность получить правильное представленіе о великомъ значеніи ученаго, котораго недавно лишилась наука».

Эти слова почти полностью можно отнести теперь и къ самому А. М. Ляпунову.

Извѣстія Р. А. Н. 1919. — 367 —

Первая страница очерка В.А. Стеклова памяти Александра Михайловича Ляпунова, опубликованного в Известиях Российской Академии Наук в 1919 году

Сегодня исполнилось ровно полгода со дня преждевременной кончины одного из самых выдающихся современных геометров, действительного члена нашей Академии Наук и моего незабвенного учителя А.М. Ляпунова.

Ученик П.Л. Чебышева, заместитель его кафедры в Академии Наук, он является достойным преемником и продолжателем своего гениального учителя.

В некрологическом очерке П.Л. Чебышева А.М. писал (Сообщ. Харьк. Матем. Общества, 1905):

«Оценить надлежащим образом значение великого ученого немыслимо без подробного анализа его трудов, и я не беру на себя этой задачи, которая невозможна без глубокого их изучения и в настоящее время еще не могла бы быть выполнена сколько-нибудь удовлетворительно. Гениальные идеи, разъясненные в трудах П.Л. Чебышева, без сомнения, не только не исчерпаны во всех своих выводах, но могут принести надлежащие плоды лишь в будущем, и тогда только явится возможность получить правильное представление о великом значении ученого, которого недавно лишилась наука».

Эти слова почти полностью можно отнести теперь и к самому А.М. Ляпунову.

В настоящей речи также нет возможности обрисовать во всей полноте заслуги такого выдающегося деятеля и мыслителя, как А.М. Ляпунов, и я почту себя счастливым, если мне удастся описанием его главнейших исследований дать хоть некоторое представление о той грандиозной творческой работе, которая совершена А.М. за 35 лет его непрерывного ученого труда.

А.М. Ляпунов родился 25 мая 1857 года в Ярославле, где его отец, известный астроном Мих. Вас. Ляпунов, незадолго до того оставивший ученную деятельность в Обсерватории Казанского Университета, состоял директором Демидовского лицея. В 1864 году отец его оставил службу и поселился с семьей в имении жены в Симбирской губ., где и занялся, главным образом, воспитанием своего старшего сына А.М. Ляпунова.

По смерти отца, в 1870 году, А.М. Ляпунов был принят в третий класс Нижегородской гимназии, которую и окончил в 1876 году с золотой медалью. В том же году он поступил на естественное отделение Физико–Математического Факультета Петербургского Университета, но уже через месяц перешел на Математическое отделение. В 1880 году, будучи студентом 4 курса, он получил золотую медаль за сочинение на тему, предложенную Факультетом, и в том же году, по окончании курса со степенью кандидата, был оставлен профессором Д.К. Бобылевым при Университете для подготовки к профессорскому званию по кафедре Механики.

В Университете, как говорит сам А.М. в своей краткой автобиографии, помещенной в юбилейном издании нашей Академии Наук, он с особым увлечением слушал П.Л. Чебышева, который своими лекциями, а затем и советами оказал существенное влияние на характер всей последующей ученой деятельности А.М.

Через год по окончании курса (в 1881 г.) появились две первые работы А.М. в Журн. Русск. Физ. Хим. Общ.: «О равновесии твердых тел в жидкостях, содержащихся в сосуде» и «О потенциале гидростатических давлений», где он дает впервые доказательство существования этого потенциала при весьма общих предположениях.

Это были первые плоды его размышлений над различными вопросами гидростатики и гидродинамики, которыми он особенно заинтересовался, главным образом, благодаря указаниям П.Л. Чебышева. Последний, между прочим, предложил начинающему 24 летнему ученому испытать свои силы на решении следующего вопроса:

Известно, что жидкая однородная масса, частицы которой притягиваются по закону Ньютона и которая вращается равномерно около некоторой оси, может сохранять форму эллипсоида, пока угловая скорость ω не превосходит некоторого предела.

Для значений ω, больших этого предела, эллипсоидальные фигуры равновесия становятся невозможными.

Пусть ω — какое-либо значение угловой скорости, которой соответствует эллипсоид равновесия E. Даем угловой скорости достаточно малое приращение ε.

Спрашивается, существуют ли для угловой скорости $\omega + \varepsilon$ иные фигуры равновесия, отличные от эллипсоидальных, непрерывно изменяющихся при таком же изменении ε и при $\varepsilon = 0$ совпадающие с эллипсоидом E.

Чебышев, по-видимому, уже давно интересовался этим вопросом и предлагал его другим ученым, как напр. Е.И. Золотареву и С.В. Ковалевской, но не давал при этом никаких указаний относительно приемов решений, ограничиваясь замечанием, что успеха можно ожидать от соответствующего применения метода последовательных приближений.

Характерно, что Чебышев, подчеркивая чрезвычайную сложность и трудность задачи, тем не менее не затруднился направить именно в эту сторону силы начинающего ученого, убеждая, что только такими сложными и серьезными вопросами и стоит заниматься молодому ученому, если он действительно способен к творческой работе.

Пафнутий Львович Чебышев

Очевидно, Чебышев уже тогда усматривал из ряда вон выходящие силы в молодом человеке, если рискнул возложить на его плечи такой, как увидим ниже, непосильный труд.

И А.М. не побоялся принять это предложение, на которое не откликнулись ни Золотарев, ни Ковалевская.

В течение двух лет (1882 – 1883 годы) А.М. Ляпунов усердно работал над предложенной задачей, удачно применил метод последовательных приближений, получил уравнения для первого приближения и все необходимые данные, чтобы судить о характере изучаемого явления по этому первому приближению.

Но первое приближение не решает вопроса: необходимо составить уравнения, определяющие все последовательные приближения какого угодно порядка и, что особенно важно, доказать сходимость полученных таким образом приближений.

Здесь встретились трудности, оказавшиеся непреодолимыми для начинающего 25-летнего ученого. Однако работа не пропала даром.

Хотя задачу Чебышева и не удалось преодолеть, но зато оказалось возможным решить другой, также весьма важный вопрос, стоящий в непосредственной связи с задачей Чебышева, а именно вопрос об устойчивости эллипсоидов Маклорена и Якоби. Решение этого вопроса и составило предмет магистерской диссертации А.М. Ляпунова «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающей жидкости» (Петербург, 1884).

Вопрос этот занимал внимание многих первоклассных ученых, как напр. Лиувилля, Римана, еще с половины прошлого столетия, но все их исследования либо относились к различным частным случаям, либо не отличались надлежащей строгостью, а часть обещанных исследований Лиувилля не была опубликована.

А.М. Ляпунов поставил вопрос в общей форме и, основываясь на начале Лагранжа о minimum'е потенциала, дал строгое решение задачи.

Когда сочинение уже было написано, он узнал о выходе в свет нового издания первого тома трактата Thomson'a и Tait'a «Natural Phylosophy» и о том, что в числе дополнений к старому изданию в нем излагается решение того же самого вопроса. Можно было опасаться, что все труды пропали даром.

Оказалось, однако, что во вновь вышедшем сочинении Thomson и Tait, замечая, что они не переставали заниматься этим вопросом в течение 15 лет, сообщают лишь без доказательства результаты, к которым пришли, и принцип, легший в основу их изысканий, обещая подробно рассмотреть вопросы во втором томе.

При этом выяснилось, что результаты, полученные знаменитыми авторами, далеко не исчерпывают выводы А.М. Ляпунова.

Однако принцип ими высказанный без доказательства, как представляющий собою обобщение начала Лагранжа, которым пользовался А.М. Ляпунов, остановил на себе его внимание.

А.М. сейчас же принялся за переделку первой главы сочинения. При помощи особого приема, отличного от обычных методов вариационного исчисления, он распространил уже имевшееся у него доказательство начала Лагранжа на более общий принцип Thomson'a и Tait'a, которому и дал теперь название «Основной теоремы».

При помощи этой теоремы он затем исследовал устойчивость сферы, эллипсоидов вращения и, наконец, трехосных эллипсоидов равновесия.

При этом в особой (четвертой) главе он дал ряд новых теорем в теории функции Ламе, играющих первостепенную роль в Анализе, из которых упомяну, для примера, теорему о числе корней уравнения

$$E_h^m(x) = 0$$

между известными пределами a и b, от которых зависят рассматриваемые функции, служающую дополнением к теореме F. Klein'a, и многие другие.

В виде тезисов к этому рассуждению А.М. Ляпунов указал и на те результаты, которые можно было вывести из исследования полученного им первого приближения в упомянутой выше задаче Чебышева. На это последнее обстоятельство, имеющее важное значение для выяснения того, что будет сказано дальше, я теперь же обращаю особое внимание.

Эта первая большая работа сразу обратила на себя серьезное внимание по оригинальности и строгости исследования и по ценности полученных результатов. Через 20 лет (в 1904 г.) она была переведена на французский язык Ed. Davaux и, по предложению профессора E. Cosserat, напечатана в Annales de Toulouse.

В 1885 году он защитил эту работу в качестве диссертации на степень магистра Прикладной Математики и осенью того же года перешел приват-доцентом в Харьков на освободившуюся после избрания В.Г. Имшенецкого в члены Академии Наук кафедру Механики. «Здесь», говорит сам А.М. Ляпунов в своей автобиографии, «в первое время ученая деятельность Ляпунова должна была прекратиться... Приходилось вырабатывать курсы и составлять записки для студентов, что отнимало много времени».

Я нарочно отмечаю это характерное для А.М. место. То, что другие ученые, часто без основания, считают важной частью своего ученого труда и составлением курсов и руководств приобретают себе ученое имя и известность, то А.М. Ляпунов считал перерывом в своей ученой деятельности.

А между тем курсы, составленные им по всем отделам Механики, содержат такие ценные и иногда новые материалы, каких нельзя было найти ни в одном из имевшихся тогда руководств, как это будет показано собранию в речи А.Н. Крылова.

Требования А.М. от ученого творчества были так широки, стремления к постоянно новому, оригинальному по результатам или по методам исследования столь значительны, что изложение, хотя бы в оригинальной, ему лично принадлежавшей форме, уже установленных истин, он не считал за ученый труд.

Об издании своего во многих отношениях образцового курса он и слышать не хотел.

Замечу еще, что в результате его работы над этими «записками» появились в Сообщении Харьк. Матем. Общества две его заметки «Некоторое обобщение формулы Дирихле для потенциальной функции эллипсоида на внутреннюю точку» (в 1886 г.) и «О теле наибольшего потенциала» (в 1887 г.).

В последней статье, при помощи особого приема, опять-таки отличного от обычных методов вариационного исчисления, он впервые устанавливает теорему, что если существует тело, потенциал которого сам на себя достигает своего высшего предела, то такое тело есть шар.

Из сказанного видно, между прочим, что вопреки утверждению самого А.М., его творческая научная деятельность и во время выработки курсов Механика не вполне прерывалась, а лишь несколько задержалась.

Это тем более понятно, что до 1890 года он один вел все преподавание Механики, включая сюда и практические занятия со студентами.

Не могу воздержаться от передачи моих личных воспоминаний, связанных с первыми шагами профессорской деятельности А.М. В 1884 году, как известно, был разрушен устав 1863 года, началась реакция Делянова. В 1885 году я был слушателем 3 курса, и, как старый студент устава 1863 г., состоял с большинством товарищей в крайней оппозиции новым порядкам. Когда мы, студенты, узнали, что к нам приехал из Петербурга новый профессор Механики, то сейчас же решили, что это должна быть какая-нибудь жалкая посредственность из деляновских креатур. Было решено, что нового профессора, без всякого сомнения, можно увидеть на молебне перед началом учения, куда он почтет своим долгом явиться, дабы показаться в соответствующем месте своему начальству, и непременно в синем фраке.

Тогдашние студенты Харьковского Университета не отличались тихим нравом, и большинством курса мы отправились на это молебствие не с дружелюбными намерениями высматривать нашего предполагаемого нового врага. Действительно, среди немногих профессоров мы увидели неизвестного нам довольно мелкого человека с невыразительной физиономией прилизанного чиновника и как раз в синем фраке. Было решено, что это и есть Ляпунов. На первую лекцию собрался почти весь курс, уже не с целями одного любопытства.

Каково же было удивление наше, когда в аудиторию вместе с уважаемым всеми студентами старым деканом профессором Леваковским вошел красавец мужчина, почти ровесник некоторых из наших товарищей и, по уходу декана, начал дрожащим от волнения голосом читать вместо курса динамики систем курс динамики точки, который мы уже прослушали у профессора Делярю. Шел уже четвертый год моего студенчества; в Москве в течение года я слушал таких лекторов, как Давыдов, Цингер, Столетов, Орлов; два года состоял студентом Харьковского Унивеситета; курс Механики мне был уже знаком.

Но с самого начала лекции я услышал то, чего раньше не слышал и не встречал ни в одном из известных мне руководств.

И все недружелюбие курса сразу разлетелось прахом: силою своего таланта, обаянию которого в большинстве случаев бессознательно поддается молодежь, А.М., сам не зная того, покорил в один час предвзято настроенную аудиторию.

С этого же дня А.М. занял совершенно особое положение в глазах студентов: к нему стали относиться с исключительно почтительным уважением. Большинство, которому не были чужды интересы науки, стали напрягать все силы, чтобы хоть немного приблизиться к той высоте, на которую влек А.М. своих слушателей. Развился особый стыд перед ним за свое незнание, большинство не решалось даже заговаривать с ним единственно из опасения обнаружить перед ним свое невежество. Благодаря этому получилась даже довольно своеобразная организация: курс выдвинул как бы одного уполномоченного, к которому товарищи обращались со всеми своими недоразумениями, а это одно лицо должно было уже от себя лично вести беседы с А.М., приняв на себя обязанность за всех краснеть от стыда перед ним в случае какого-либо явного промаха.

Владимир Андреевич Стеклов. Выдающийся математик и механик, лучший ученик и ближайший друг Александра Михайловича Ляпунова, внесший неоценимый вклад в развитие и популяризацию творческого наследия своего великого учителя

Впоследствии же А.М. с наивным удивлением спрашивал меня, почему так мало студентов обращаются к нему за различными научными разъяснениями?

В течение двух лет А.М. закончил составление упомянутых выше «записок» и возобновил энергичную ученую работу.

С 1888 года появляется ряд Мемуаров, посвященных различным вопросам об устойчивости движения материальных систем, находящимся в прямой связи с общей теорией интегрирования систем дифференциальных уравнений.

В 1888 и 1889 г.г. он публикует в Сообщ. Харьк. Матем. Общества два замечательных по методам и по результатам исследования: «О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости» и «Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах».

Собственно говоря, уже его магистерская диссертация была по достоинству выше многих хороших докторских диссертаций.

Только что упомянутые работы давали больше, чем требуется от выдающейся докторской диссертации. Но требования, которые предъявлял к себе А.М., были чрезвычайно велики.

Он работал в это время над вопросами общей теории устойчивости; только что упомянутые исследования были для него лишь интересными частностями тех общих выводов, которые им уже были намечены и подвергались дальнейшей обработке и развитию.

Поэтому он, отказываясь от выгод, связанных тогда с получением докторской степени, не пожелал переработать эти исследования в докторскую диссертацию, что не представляло ни малейших затруднений, а продолжал еще 4 года оставаться в звании приват-доцента, довольствуясь скромным содержанием в 1200 руб. в год.

Он отказался также, до получения степени доктора, и от звания и. д. экстраординарного профессора, что увеличивало годовое содержание вдвое, в то время как другие магистры того же Университета давно уже пользовались этой льготой.

Только в 1892 году, после самой тщательной обработки, выпустил он в свет особым изданием Харьк. Матем. Общества свой капитальный труд под заглавием: «Общая задача об устойчивости движения» (Харьков, 1892, 250+XI стр.), доставивший ему всемирную известность первоклассного геометра.

Дать исчерпывающий анализ методов, изобретенных А.М., и всех результатов, им полученных, невозможно; придется упомянуть, и то лишь в общих чертах, о главнейших из них.

Общая задача об устойчивости движения сводится к исследованию систем дифференциальных уравнений,

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k, \quad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{1}$$

где X_k суть данные функции от t и x_k, разлагающиеся при достаточно малых x_k в сходящиеся ряды, расположенные по целым положительным степеням x_k и обращающиеся в нуль, когда все эти переменные равны нулю.

Требуется найти условия, при которых возможно выбрать начальные (при $t = 0$) достаточно малые значения x_k так, чтобы во все время последующего движения величины x_k (функции времени) оставались меньшими наперед заданных пределов, сколь угодно малых.

Задача решается весьма просто, когда возможно проинтегрировать систему (1), но почти во всех вопросах Общей Механики и особенно теоретической Астрономии, эта интеграция заведомо невыполнима. Необходимо ответить на вопрос, не умея интегрировать систему (1).

Решению этой задачи первостепенной важности, поставленной еще Лагранжем, творцом Аналитической Механики, посвящали свои силы все первоклассные геометры, начиная с самого Лагранжа.

Но, кроме тех немногих случаев, когда задачу можно было решить при помощи упоминавшегося выше начала Лагранжа, до 90-х годов прошлого столетия приходилось довольствоваться лишь теми результатами, которые можно было извлечь из первого приближения, когда в упомянутом выше разложении функций X_k отбрасываются все члены, содержащие величины x_k в степенях выше первой.

К такого рода исследованиям относятся труды Thomson'a и Tait'a, Rauth'a, профессора Московского Университета Н.Е. Жуковского и др.

Но, как уже мы имели случай говорить, первое приближение, вообще говоря, не решает вопроса: движение, устойчивое в первом приближении, оказывается иногда неустойчивым в действительности. Единственная попытка строго решить, когда первое приближение оказывается действительно достаточным для суждения об устойчивости, принадлежала H. Poincaré, но он ограничился лишь некоторыми простейшими частными случаями.

В сочинении А.М. Ляпунова этот вопрос получил полное и окончательное разрешение при некоторых общих предположениях, наиболее важных и интересных по своим приложениям (а именно, когда коэффициенты первых степеней разложения функций X_k суть постоянные, или периодические функции времени; он коснулся также и общего случая, когда эти коэффициенты суть какие угодно функции времени, модули которых не превосходят некоторых пределов).

Он перешел затем и к исследованию таких случаев, когда первое приближение оказывается недостаточным.

Все эти вопросы, как уже упомянуто, находятся в непосредственной связи с общей теорией интегрирования систем дифференциальных уравнений, разработку которой и предпринял А.М. Ляпунов.

Он создал особую теорию характеристических чисел линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и на основании этой теории доказал существование так называемых асимптотических решений нелинейных дифференциальных уравнений при весьма общих условиях.

В тех случаях, когда в заданные дифференциальные уравнения переменная независимая не входит явно, он дал способ определения периодических решений.

Здесь А.М. Ляпунов столкнулся с подобными же изысканиями H. Poincaré; оба геометра одновременно, независимо друг от друга и различными путями, пришли к некоторым аналогичным результатам, честь открытия которых А.М. Ляпунов может по праву разделять с знаменитым французским геометром.

Я должен только отметить одно существенное различие между трудами этих первоклассных ученых.

В то время как у H. Poincaré встречаются зачастую недомолвки и неточности, иногда не строгие доказательства или даже только намеки на доказательства, у А.М. Ляпунова все рассуждения доведены до высокой степени совершенства, ибо он говорит всегда о том и только том, что он может доказать с безупречной строгостью.

Пользуясь этими изысканиями, он дал способы решения вопросов об устойчивости движения, когда первое приближение оказывается недостаточным, в случаях, когда характеристическое уравнение первого приближения, при постоянных коэффициентах, имеет один корень, равный нулю, и два мнимых корня, а в случае коэффициентов периодических имеет один корень, равный единице, или два мнимых с модулями, равными единице.

В этом сочинении имеется много и других интересных и важных результатов, перечислить которые нет возможности. Упомяну лишь об одном из них, имеющем значение первостепенной важности, а именно теорему о неустойчивости движения в случае, когда силовая функция сил, действующих на систему, не есть maximum, которую до него никому не удавалось доказать.

С некоторыми дополнениями эта теорема затем была опубликована им в Мемуаре «Sur l'instabilité de l'équilibre» в 1879 году в Journal des Mathématiques».

В этот же период своей деятельности он открыл новый случай движения твердого тела в жидкости, который рассматривал как предельный по отношению к другому, ранее открытому мною[1].

Отмечу также замечательное исследование А.М. Ляпунова, относящееся к этому же времени, о рядах, предложенных известным Астрономом Hill'ем для представления движения луны и могущих иметь важное значение в теории луны.

А.М. не только доказал, что при величинах средних движений солнца и луны, принимаемых в Астрономии, ряды Hill'я суть ряды сходящиеся, но и дал способ определить высший предел погрешности, которая получается, если остановить эти ряды на каком-либо n'ом члене, результат весьма важный для астрономических вычислений.

К сожалению, Мемуар этот, напечатанный на русском языке (в Изв. Русск. Общ. Любит. Естествозн., Москва 1896 г.) остался мало известным за границей.

Начиная с 1895 года среди членов Харьк. Матем. Общества проявился живой интерес к вопросам Математической Физики, в разработке которых А.М. Ляпунов принял деятельное участие, и здесь, как и во всем, за что брался, оказал услуги первостепенной важности.

Все предшествовавшие изыскания об основных задачах Математической Физики (электростатическая задача, задача Дирихле, основная задача Гидродинамики) основывались на некоторых свойствах так называемого потенциала двойного слоя, который, как заметил А.М. Ляпунов, оказывались иногда неверными даже в простейших примерах.

Я имею в виду вопрос о существовании так называемых нормальных производных от потенциала двойного слоя.

Это обстоятельство делало сомнительными все методы решения указанных выше задач, ставшие теперь, после изысканий А.М. Ляпунова, классическими. Он впервые указал общие условия как относительно напряжения слоя, так и относительно поверхности его распределения, при которых нормальная производная действительно существуют (в 1897, в C.R. и Journ. de Mathém.).

Пользуясь этими результатами, я доказал затем (в 1899 году в C.R. и в 1900 в Journal de Toulouse), что принцип Неймана действительно приложим ко всем поверхностям, удовлетворяющим условиям А.М. Ляпунова, если только напряжение исходного слоя в методе Нейманна может быть представленно под видом потенциала простого слоя.

[1]Случай А.М. Ляпунова, замечу мимоходом, можно вывести из моего без всяких вычислений, пользуясь след. замечательным свойством дифф. уравн. движения: Всякому твердому телу с живой силой T, допускающему квадратичный интеграл T_1, соответствует твердое тело с живой силой T_1, допускающее квадратичный интеграл T.

В 1902 году А.М. предпринял новые исследования[1] и указал новые свойства потенциала двойного слоя, которые позволили освободиться от только что указанного ограничения, что привело к решению задачи Дирихле в самом общем виде.

В своем знаменитом Мемуаре «Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet» (Journ. de Mathém., 1897) А.М. Ляпунов дал ряд других важных теорем относительно потенциалов двойного и простого слоя и указал, между прочим, необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция, решающая задачу Дирихле внутри данной области, имела нормальные производные на поверхности, ограничивающей область.

В последние годы пребывания А.М. в Харьковском Университете ему было поручено Факультетом чтение лекций по теории вероятностей.

В результате занятий этим предметом явился ряд заметок в C.R. и два Мемуара в изданиях нашей Академии Наук, где А.М. дает строгое и простое доказательство одной общей теоремы о пределе вероятности, что сумма беспредельно возрастающего числа величин, зависящих от случайных обстоятельств, заключается в известных пределах. При этом он придал этой теореме форму значительно более общую той, в которой она рассматривалась до него П.Л. Чебышевым и А.А. Марковым.

Ученые заслуги А.М. обратили на себя всеобщее внимание и наша Академия Наук избрала его в 1900 году в члены-корреспонденты, а через год (6 ноября 1901 г.) в ординарные академики по кафедре Прикладной Математики, которая оставалась вакантной после смерти Чебышева (в 1894 г.).

С этого времени, освободившись от всякой педагогической деятельности, он посвятил себя исключительно ученой работе и возобновил свои изыскания о задачи Чебышева, попыткой решить которую он начал свое ученое поприще.

И тем подвигом, которым он пытался начать свою ученую деятельность, он блестяще закончил, как увидим, свою славную жизнь, так преждевременно прерванную. Работу, совершенную А.М. за последние 15 лет, нельзя и назвать иначе, как подвигом.

Даже с внешней стороны серия Мемуаров и отдельно изданных книг по вопросу о фигурах равновесия вращающейся жидкости поражает своей грандиозностью.

Эти сочинения содержат более 1000 стр. большого формата in-4^0, причем некоторые из них дают окончательные результаты громадного количества различного рода вычислений, которые и сами по себе представляют большой интерес во многих отношениях, но не вошли в печатный текст, а хранятся в виде рукописей здесь, в шкафу П.Л. Чебышева.

Начало этих изысканий он положил Мемуаром «Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes», опубликованным в Мемуарах нашей Академии в 1903 г. и посвященным гидростатической теории фигуры планет, данной Лапласом и Лежандром и основанной на некотором разложении потенциала в ряд, указанном этими геометрами.

В течение целого столетия первоклассные ученые пытались доказать законность такого разложения, но все их попытки оставались безуспешными. А.М. нашел выход из непреодолимого, по-видимому, отбросив это разложение и заменив его другим по некоторому малому параметру, приняв за таковой известным образом определенное отклонение поверхности уровня от некоторой сферы, от которой незначительно уклоняется искомая поверхность уровня.

Установить законность им изобретенного разложения, он применил затем к решению вопроса методу последовательных приближений, дал способ составления приближений какого угодно порядка и, что особенно важно, доказал сходимость полученных им приближений, что до него никто из ученых и не пытался делать.

[1]«Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet». Сообщ. Харьк. Матем. Общества. Т. VII, 1902.

На следующий год он значительно развил и обобщил свои исследования в обширном Мемуаре «Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes» (Mém. de l'Acad. des Sciences, Cl. Ph. M. Vol. XV, № 10, 1904).

Начиная с 1905 года последовал ряд Мемуаров и отдельных изданий, посвященных специально задаче Чебышева; первый из этих Мемуаров и носит название «Sur un problème de Tchebychef», а остальные составляют 4 части одного обширного сочинения, носящего заглавие «Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation» (St. Pétersb. 1906, 1909, 1912, 1914, изд. Ак. Наук, стр. 225+IV, 203+IV, 228+IV, 112+IV, всего 768+XVI).

Почти за двадцать лет до этого времени в Acta Mathematica (T. 7) был напечатан Мемуар H. Poincaré «Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation», где знаменитый французский геометр также сделал попытку решить задачу Чебышева и пришел к открытию бесчисленного множества новых форм равновесия вращающейся жидкости, отличных от эллипсоидальных.

Чтобы составить себе понятие о том впечатлении, которое произвели изыскания H. Poincaré, достаточно напомнить следующее.

Через год после появления этого Мемуара H. Poincaré был избран в члены Парижской Академии Наук (в 1887 г., 33 лет). В 1890 г. Лондонское Королевское Общество присудило ему почетную золотую медаль, которая была поднесена ему лично Президентом этого Общества, известным английским астрономом G. Darwin.

Поднося эту медаль, Darwin назвал упомянутый Мемуар как бы «откровением», сказал, что этот труд отметит навсегда важную эпоху не только в теории эволюционной Астрономии, но и в широкой области общей Механики. Что же сделал H. Poincaré в этом Мемуаре? Он применил к несколько иначе формулированной задаче Чебышева методу последовательных приближений, составил уравнения, характеризующие первое приближение и из анализа формул этого первого приближения извлек все свои выводы, так поразившие ученый мир Европы.

Но как я уже упоминал, все это уже было сделано А.М. Ляпуновым еще в 1883 году и выводы свои А.М. опубликовал в IV тезисе к своей магистерской диссертации, который привожу дословно:

«Для всякого целого n, превосходящего 2, между эллипсоидами Якоби можно найти по крайней мере один, а между эллипсоидами Маклорена $E\dfrac{n+2}{2}$ таких, к которым бесконечно близки некоторые алгебраические поверхности n'ого порядка, для которых можно в первом приближении удовлетворить условию «равновесия».

Только А.М. Ляпунов не счел возможным публиковать свои исследования, вполне аналогичные исследования H. Poincaré, считая, что ему не удалось решить задачу по соображениям уже указанным выше.

Это обусловливалось, замечу кстати, коренным различием во взглядах этих двух геометров. H. Poincaré, получив свои результаты при помощи нестрогих суждений и часто простых аналогий, говорит: «Можно сделать много возражений, но в Механике нельзя требовать такой же строгости, как в чистом Анализе», а А.М. утверждал следующее: «Непозволительно пользоваться сомнительными суждениями, коль скоро мы решаем определенную задачу, будь то задача Механики или Физики — все равно, которая поставлена совершенно определенно с точки зрения Математики. Она становится тогда задачей чистого Анализа и должна трактоваться, как таковая» (Sur un problème de Tchebychef, p. 3).

Итак, мы видим, что те трудности, которые представляла задача Чебышева и которые, как сказано выше, остановили работу А.М. в 1883 г., не были устранены и H. Poincaré, который по существу дела, не пошел дальше первоначальных изысканий А.М.

Вопрос и после трудов H. Poincaré оставался открытым.

Главная трудность состояла прежде всего, подобно тому, как и в упомянутой выше гидростатической теории планет, в необходимости найти соответствующее разложение потенциальной функции сил, действующих на жидкие массы.

Изучая всесторонне этот вопрос, А.М. убедился, что указанную трудность едва ли и возможно устранить, если сравнивать искомую форму равновесия непосредственно с данным эллипсоидом, от которого она происходит.

И он остроумно обошел это, казалось, непреодолимое затруднение, введя в рассмотрение вместо данного эллипсоида другой, переменный, поверхность которого всегда проходит через ту точку искомой формы равновесия, в которой ищется разложение потенциальной функции.

Эта блестящая идея дала и соответствующие результаты: удалось получить требуемое задачей разложение, а затем и составить все уравнения, необходимые для определения последовательных приближений какого угодно порядка. Устранив первое из указанных выше затруднений, А.М. преодолел затем, при помощи ряда остроумных приемов и вторую, главную трудность, а именно доказал сходимость употребленных им последовательных приближений, чем и разрешил вполне вопрос о существовании бесчисленного множества фигур равновесия, отличных от эллипсоидальных.

Я дал лишь беглый обзор главнейших из последних трудов А.М. Выяснить обстоятельно всю оригинальность и остроумие тех приемов, которые он изобретал для преодоления всевозможных затруднений, которые встречались на каждом шагу в этом сложном вопросе, в настоящее время нет возможности: это потребовало бы особого специального исследования.

При разработке вопроса ему приходилось пополнять и углублять многие отделы чистого Анализа, имеющие первостепенное значение и независимо от задачи, решения которой он искал, и могущие иметь важные приложения во многих других отделах науки.

И здесь им получены попутно результаты первостепенной важности, изложить которые во всей подробности не представляется возможным.

Остановлюсь лишь на некоторых из них, главнейших. Он дал обобщение понятия об интеграле, в котором обобщение T. Stieltjes'а заключается как частный случай («Sur l'équation de Clairaut etc.», p.p. 3 etc.).

Указал одну общую формулу Анализа («Sur une formule d'Analyse», Bull., 1917, p. 87), которая позволила ему решить вопрос о разложении потенциала простого слоя, распределенного на дальнем эллипсоиде, в точках поверхности другого эллипсоида, не софокусного, а подобного данному. В первом случае разложение достигается при помощи произведений Ляме, во втором этот прием оказывался неприменимым. При помощи упомянутой формулы А.М. получил требуемое разложение, совершенно не прибегая к функциям Ляме.

Отмечу замечательную теорему о рядах, расположенных по полиномам P_k, зависящих от какого угодно числа n переменных x_k $(k = 1, 2\ldots, n)$, вида

$$P_0 + \alpha P_1 + \ \ldots\ + \alpha^k P_k + \ \ldots,$$

где $|\alpha| < 1$.

А.М. показал, что ряд этот представляет аналитическую функцию переменных x_k в известной области комплексных значений этих переменных, коль скоро $|P_k|$ при всяком k не превосходит некоторого определенного предела для всех вещественных значений x_k, заключенных между -1 и $+1$ («Sur les séries de polynomes», Bull. 1915, p. 1857). Упомяну, наконец, о ряде усовершенствований, которые он внес в теорию функций Ляме, игравших важную роль во многих его исследованиях, начиная с его магистерской диссертации.

В заключение этого беглого обзора трудов А.М. остановлю внимание собрания еще на одном факте, который считаю небесполезным отметить.

Выше уже было упомянуто, что при употреблении методов рядов или последовательных приближений при решении какой бы то ни было задачи, эту задачу можно считать решенной лишь в том случае, если установлена сходимость этих рядов, или по крайней мере размеры погрешности, совершаемой при приближенных вычислениях. И это требование не есть прихоть чрезмерной строгости чистой Математики, ибо без соблюдения этого требования можно получить ложные выводы.

Как раз подобный случай и произошел с задачей Чебышева.

В Мемуаре «The stability of the pear-chaped figure of equilibrium» (Philos. Trans., A, 200) профессор Darwin подверг исследованию вопрос об устойчивости форм равновесия вращающейся жидкости, которым H. Poincaré дал название грушевидных (для случая вязкой жидкости).

По формулам H. Poincaré, которыми пользовался Darwin, устойчивость или неустойчивость зависит от знака некоторой величины A. Употребляя прием приближенного вычисления Darwin, после весьма сложных вычислений, нашел, что $A < 0$.

Грушевидные фигуры равновесия выводятся как частный случай из бесчисленного множества других фигур равновесия, строго установленных А.М. Ляпуновым, причем для A получается точное выражение под видом некоторой алгебраической функции двух аргументов p и q. Это обстоятельство позволило А.М. Ляпунову, после ряда весьма сложных вычислений, установить пределы, между которыми должна заключаться величина A, причем оба предела (верхний и нижний) оказались положительными.

А.М. Ляпунов несколько раз различными приемами проверил свои вычисления и окончательно убедился, что

$$A > 0.$$

Воспользовавшись приближенными формулами без надлежащей предосторожности, Darwin получил ошибочный результат, из которого заключил затем, что грушевидные фигуры равновесия устойчивы, тогда как при строгой постановке Анализа, какая дана А.М., он должен бы был прийти к результату прямо противоположному.

Если исследования H. Poincaré можно было назвать откровением, делающим эпоху в истории науки, то какими словами можно оценить труды А.М., в рассматриваемой области?!

Ученые заслуги А.М. признаны всем ученым миром, внешним выражением чего отчасти служит то, что он состоял почетным членом Петербургского, Харьковского и Казанского Университетов, иностранным членом Академии Наук dei Lincei в Риме, членом-корреспондентом Парижской Академии Наук, иностранным членом Circolo Matematico di Palermo, почетным членом Харьковского Математического Общества и Полтавского Кружка Физико-Математических Наук, действительным членом Московского Математического Общества и непременным членом Общества Любителей Естествознания в Москве и др.

В последних своих Мемуарах А.М. сообщил, что за последние два года им разработан еще более сложный и важный вопрос о фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости и обещал опубликовать свои исследования в особом Мемуаре.

Однако в рукописях, оставшихся здесь после А.М. Ляпунова и тщательно мною пересмотренных, я не нашел никаких следов его исследований по указанному вопросу.

Возможно, что он захватил с собою все относящиеся сюда материалы в Одессу, куда он уехал летом 1917 года в надежде, что южный климат окажет благотворное влияние на сильно пошатнувшееся здоровье его жены (туберкулез).

Но поездка эта оказалась для А.М. роковой.

Вскоре он оказался отрезанным от Петербурга и в частности от Академии Наук.

В начале 1918 г. еще доходили изредка отрывочные, случайные известия от него о том затруднительном положении, в котором он оказался со своей женой в Одессе, а затем всякие известия прекратились.

В конце ноября 1918 г. мы были поражены случайно дошедшим до нас слухом, что жена А.М. Ляпунова Наталья Рафаиловна, урожденная Сеченова, скончалась в Одессе, а сам он покончил с собой.

К величайшему прискорбию, этот слух подтвердился.

Отрезанный от Петербурга, поставленный в затруднительное материальное положение, истомленный длительной болезнью жены, которая медленно угасала на его глазах в Одессе, лишенный вследствие всех этих обстоятельств возможности продолжать свою ученую работу, он находился в последнее время (по словам его брата профессора Одесского Унив. Бор. Мих. Ляпунова) в крайне мрачном настроении.

Смерть жены, с которой он был связан узами дружбы чуть ли не с самого детства, привела к роковой развязке: в день смерти Натальи Рафаиловны 31 октября 1918 года А.М. выстрелил в себя, а 3 ноября, в день ее похорон, в 5 час. дня, скончался в университетской хирургической клинике, где лежал без сознания три дня.

Тяжкая, трудно заменимая утрата для науки вообще и для нашей Академии в частности.

В А.М. мы потеряли не только первоклассного ученого, но и редкого по своим внутренним достоинствам человека.

Воспитанный сначала своим отцом, сотоварищем Н.И. Лобачевского по Казанскому Университету, затем в кругу лиц, близких к нашему знаменитому физиологу И.М. Сеченову, которому, кстати сказать, А.М. одно время давал уроки Математики, проведший свою юность в среде наиболее просвещенной части нашего тогдашнего общества, на умы которого еще продолжали влиять Н.А. Добролюбов и Н.Г. Чернышевский, А.М. Ляпунов олицетворял собою лучший тип идеалиста 60–х годов, в настоящее время, быть может, не всем понятный.

Все из ряда вон выходящие силы свои он отдавал на беззаботное служение науки, ею он жил, в ней одной видел смысл жизни и часто говорил, что без научного творчества и самая жизнь для него ничего не стоит.

С самого начала своей ученой деятельности он работал изо дня в день до 4-х или 5-ти часов ночи, а иногда являлся на лекции (в Харьковском Университете), не спав всю ночь.

Он не позволял себе почти никаких развлечений и если появлялся иногда (раз или два в год) в театре или в концерте, то лишь в самых исключительных случаях, как например на редких концертах своего брата, известного композитора С.М. Ляпунова.

Круг знакомства А.М. был крайне ограничен и состоял из ближайших его родственников и небольшого числа ученых, преимущественно математиков, причем редкие товарищеские собрания, на которых бывал А.М., преимущественно сводились, особенно в Харьковский период его жизни[1], к высшей степени поучительным собеседованиям по текущим вопросам науки.

Отчасти потому и производил он иногда на лиц мало его знавших впечатление молчаливо — хмурого, замкнутого человека, что зачастую был настолько поглощен своими научными размышлениями, что смотрел — и не видел, слушал – и не слыхал, над чем так часто и так добродушно подсмеивался в кругу близких его тесть Раф. Мих. Сеченов.

В действительности же, за внешней сухостью и даже суровостью, в А.М. скрывался человек большого темперамента с чуткой и можно сказать детски чистой душой.

[1]Впоследствии он с особой любовью вспоминал этот период своей жизни (от 1885 – 1902 г.г.) и в беседах со мною часто называл его самым счастливым.

Вспоминая слова из одной актовой речи нашего «Коперника Геометрии» Н.И. Лобаческого, можно сказать, что А.М. Ляпунов удовлетворял в полной мере тем требованиям, которые предъявлял Лобачевский к человеку вообще и в особенности к представителям науки, ибо в А.М., говоря словами Лобачевского, «действительно продолжались чувства чести, любовь славы и внутреннего достоинства».

Это высоко развитое чувство чести и внутреннего достоинства, бросавшееся в глаза всякому даже при мимолетной встрече с ним, действовали импонирующим образом на всех и в особенности на молодежь, о чем я уже имел случай упоминать выше.

Перефразируя стихи Некрасова, написанные на смерть сходного с А.М. по внутреннему содержанию Н.А. Добролюбова, можно сказать, что «все качества духовной красоты совмещены в нем были благодатно» и русская земля действительно может гордиться таким сыном, но в то же время должна и горько плакать, ибо на этой земле, отчасти благодаря неустройству жизни русской, так неожиданно и преждевременно «такой светильник разума угас, такое сердце биться перестало!»

* * *

Около месяца спустя после произнесения этой речи получено было письмо из Одессы от профессора Б.М. Ляпунова, сообщающее некоторые подробности о последних днях жизни А.М. и об оставшихся после него рукописях.

Иван Михайлович Занчевский (с супругой Еленой Ивановной). Декан Физико-математического факультета Новороссийского университета в 1918 году (ранее ректор Новороссийского университета), который в тяжелейшее время организовывал похороны Александра Михайловича Ляпунова в Одессе и сохранил для потомков последние бесценные рукописи А.М. Ляпунова

По предложению профессоров Одесского Университета А.М. начал в Университете (с осени 1918 г.), т.е. месяца за два до смерти, курс лекций по теории равновесия небесных тел по 2 часа в неделю (по понедельникам), который продолжал почти до самой смерти, несмотря на крайне тяжелое нравственное состояние и быстро развивавшееся истощение.

За последнее время он, еще недавно вполне здоровый и крепкий человек[1], настолько ослабел, что с трудом добирался домой после двух часовой лекции в Университете.

Тем не менее, он успел закончить обещанный труд, о котором упоминалось выше.

Он оставил после себя вполне законченную рукопись в 489 стр. формата писчей бумаги, заключающую в себе обширное исследование, под заглавием: «Sur certaines séries des figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation».

Таким образом, не смотря на все невзгоды двух последних лет его жизни, приведших в конце концов к трагической развязке, он нашел в себе силу выполнить до конца поставленную задачу, и только закончив принятый на себя ученый подвиг, покончил и свои расчеты с земной жизнью, которая после наступившего крайнего истощения, начинавшейся слепоте (катарракт) и смерть горячо любимой жены потеряла для него всякий смысл. Эта драгоценная рукопись хранится в комнате Физико-Математического Факультета Новороссийского Университета за № 233, под наблюдением декана факультета, профессора И.М. Занчевского.

[1]Насколько помню, в Харькове за 17 лет он не пропустил ни одной лекции по болезни.

Академия Наук, с своей стороны, приняла все возможные меры к охране этого документа первостепенной важности и доставке копии с него в Петроград для того, чтоб при первой возможности опубликовать это посмертное произведение А.М. Ляпунова в изданиях Академии.

Осталась также рукопись вступительной лекции, прочтенной А.М. Ляпуновым при начале упомянутого выше курса осенью 1918 года в Новороссийском Университете, набросок самого предполагавшегося курса, под заглавием: «Compléments au Mémoire «Recherches dans la théorie des corps célestes», и некоторые другие черновые заметки. Само собой разумеется, и эти рукописи будут доставлены в свое время в Петроград, будут храниться в Математическом кабинете, учрежденном Академией Наук в память своих знаменитых сочленов П.Л. Чебышева и А.М. Ляпунова, и, если окажется возможным, напечатаны, в изданиях Академии.