Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях

М.П. Харламов
Волгоградская академия государственной службы
Россия, 400131, Волгоград, ул. Гагарина, 8
E-mail: mharlamov@vags.ru

Получено 1 октября 2007 г.

Задача о вращении гиростата Ковалевской в двух постоянных полях в динамике твердого тела представляет собой единственный содержательный пример вполне интегрируемой гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, не сводимой к семейству систем меньшей размерности. Как первый шаг к решению задачи топологического анализа этой системы найдено критическое множество интегрального отображения — множество, состоящее из траекторий с числом частот меньше трех. Получены уравнения бифуркационной диаграммы в пространстве констант трех первых интегралов.

Цитата: М.П. Харламов, Критические подсистемы гиростата Ковалевской, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, № 3, с. 331–348.

Ключевые слова: гиростат Ковалевской, два постоянных поля, критическое множество, бифуркационная диаграмма

M.P. Kharlamov

Critical subsystems of the Kowalevski gyrostat in two constant fields

The Kowalevski gyrostat in two constant fields is known as the unique profound example of an integrable Hamiltonian system with three degrees of freedom not reducible to a family of systems in fewer dimensions. As the first approach to topological analysis of this system we find the critical set of the integral map; this set consists of the trajectories with number of frequencies less than three. We obtain the equations of the bifurcation diagram in three-dimensional space of the first integrals constants.

Citation: M.P. Kharlamov, Critical subsystems of the Kowalevski gyrostat in two constant fields, *Rus. J. Nonlin. Dynamics*, 2007, Vol. 3, No. 3, pp. 331–348.

Keywords: Kowalevski gyrostat, two constant fields, critical set, bifurcation diagram
MSC 2000: 70E17, 70G40

1. Введение

В 2007 году исполнилось 20 лет с момента публикации статьи [15], в которой был открыт новый случай интегрируемости задачи о движении гиростата вокруг неподвижной точки, наиболее существенным образом обобщающий случай С. В. Ковалевской и имеющий при этом ясный механический смысл. Этому результату непосредственно предшествовали несколько работ, посвященных твердым телам и гиростатам, удовлетворяющим условиям типа Ковалевской. И. В. Комаров [14] доказал полную интегрируемость гиростата Ковалевской в поле силы тяжести, найдя первое обобщение интеграла Ковалевской K. О. И. Богоявленский [2] ввел математическую модель вращения вокруг неподвижной точки тяжелого электрически заряженного тела в гравитационном и электрическом силовых полях или массивного магнита в гравитационном и постоянном магнитном силовых полях. Соответствующие уравнения называют уравнениями движения тела (гиростат) в двух постоянных полях (*two constant fields* [12]). В работе [2] было указано обобщение интеграла K на такую задачу и найден частный случай полной интегрируемости (подмногообразие $K = 0$, аналог случая Делоне). Х. Яхья [16] нашел форму интеграла Ковалевской, сочетающую в себе обобщения [2, 14], — для задачи о движении гиростата в двух постоянных полях. И все же аналог случая Ковалевской для двух постоянных полей не считался вполне интегрируемым до тех пор пока А. Г. Рейман и М. А. Семенов-Тян-Шанский [15] не нашли представление Лакса со спектральным параметром, что сразу же привело к новому интегралу, обобщающему квадрат интеграла момента для осесимметричных полей. Случай [15] не имеет явных групп симметрий и поэтому дает иллюстрацию физически реализуемой системы с тремя степенями свободы, не допускающей никакой очевидной редукции к семейству систем с двумя степенями свободы. Фазовая топология неприводимых систем до сих пор не изучалась. Теория n-мерных интегрируемых систем, создание которой начато в [5], не была проиллюстрирована ввиду отсутствия на тот момент нетривиальных содержательных примеров. В совместной работе с А. И. Бобенко [12], авторы [15] представили алгебраические обоснования интегрируемости многомерных гиростатов Ковалевской и дали описание возможного пути явного интегрирования с помощью конечнозонной техники. Для двух силовых полей это интегрирование так и не было выполнено. Задача о движении *гиростата* Ковалевской в двух постоянных полях до сих пор вообще не исследовалась. Технические трудности столь высоки, что не позволяют надеяться на получение аналитических решений в регулярных случаях. Однако опыт исследования подсистем с двумя степенями свободы, возникающих при отсутствии гиростатического момента [7, 8, 11], говорит о целесообразности такого подхода и для общего случая.

Данная работа посвящена первому этапу топологического анализа случая [15] — исследованию множества критических точек интегрального отображения, которое является фазовым пространством для подсистем с меньшим числом степеней свободы (критических подсистем), и нахождению уравнений его образа — бифуркационной диаграммы рассматриваемой задачи. Предварительно рассматривается вопрос об исключении несущественных параметров в совокупности задач о движении гиростата в двух постоянных полях. Показано, что существует группа диффеоморфизмов, являющихся эквивалентностью таких задач, и в каждом классе эквивалентности имеется задача, у которой радиус-векторы центров приложения полей составляют ортонормированную пару, а векторы напряженности полей взаимно ортогональны. У такой задачи силовое поле характеризуется лишь одним существенным безразмерным параметром — отношением модулей векторов напряженности. Для динамически симметричного гиростата с центрами приложения полей в экваториальной плоскости после выполнения указанной процедуры ортогонализации остаются всего лишь два характеризующих физические свойства объекта параметра — отношение эваториального момента инерции к осевому и величина гиростатического момента. В обобщении случая Ковалевской первый из них равен 2. Таким образом, каждая из найденных критических подсистем с четырехмерным фазовым пространством, по существу, является двухпараметрическим семейством вполне интегрируемых гамильтоновых (или почти гамильтоновых, с учетом возможности вырождения индуцированной симплектической структуры на множестве положительной коразмерности) систем с двумя степенями свободы.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой O. Выберем триэдр с началом в O, вращающийся вместе с телом, и отнесем к нему все векторные и тензорные объекты. Обозначим через $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ канонический единичный базис в $\mathbf{R}^3$, тогда сам подвижный триэдр имеет представление $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Постоянное поле — это силовое поле, порождающее вращающий момент относительно точки O вида $\mathbf{r}\times\boldsymbol{\alpha}$, где $\mathbf{r}$ — постоянный вектор, а $\boldsymbol{\alpha}$ соответствует некоторому физическому вектору, неподвижному в инерциальной пространстве; $\mathbf{r}$ указывает из точки O в центр приложения поля, $\boldsymbol{\alpha}$ есть вектор напряженности поля. Для двух постоянных полей вращающий момент имеет вид $\mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}_2 \times \boldsymbol{\beta}$. Он может быть представлен как момент одного постоянного поля, если либо $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = 0$, либо $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = 0$. Далее мы предполагаем, что

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq 0, \quad \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \neq 0. \tag{2.1}$$

Два постоянных поля, удовлетворящие (2.1), назовем *независимыми*.

Введем некоторые обозначения.

Пусть $L(n,k)$ — пространство $n \times k$-матриц. Положим $L(k) = L(k,k)$.

Отождествим $\mathbf{R}^6 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ с $L(3,2)$ посредством изоморфизма j, соединяющего два вектор-столбца

$$A = j(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\| \in L(3,2), \qquad \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbf{R}^3.$$

Для обратного отображения пишем

$$j^{-1}(A) = (\mathbf{c}_1(A), \mathbf{c}_2(A)) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, \qquad A \in L(3,2).$$

Если $A, B \in L(3,2)$, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$, по определению положим

$$A \times B = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{c}_i(A) \times \mathbf{c}_i(B) \in \mathbf{R}^3; \quad \mathbf{a} \times A = j(\mathbf{a} \times \mathbf{c}_1(A), \mathbf{a} \times \mathbf{c}_2(A)) \in L(3,2). \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Пусть* $\Lambda \in SO(3)$, $D \in GL(2,\mathbf{R})$, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$, $A, B \in L(3,2)$. *Тогда*

$$\begin{array}{ll} \Lambda(A \times B) = (\Lambda A) \times (\Lambda B); & (AD^{-1}) \times (BD^T) = A \times B; \\ \Lambda(\mathbf{a} \times A) = (\Lambda \mathbf{a}) \times (\Lambda A); & \mathbf{a} \times (AD) = (\mathbf{a} \times A)D. \end{array}$$

Доказательство проводится прямым вычислением.

Пусть $\mathbf{I}$ — тензор инерции тела в точке O, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, $\boldsymbol{\lambda}$ — постоянный в теле вектор гиростатического момента. В обозначениях (2.2) уравнения Эйлера – Пуассона имеют вид

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}} = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + A \times U, \qquad U^{\boldsymbol{\cdot}} = -\boldsymbol{\omega} \times U. \tag{2.4}$$

Здесь $A = j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — постоянная матрица, $U = j(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Фазовое пространство системы (2.4) есть $\{(\boldsymbol{\omega}, U)\} = \mathbf{R}^3 \times L(3,2)$.

В действительности U в (2.4) ограничена геометрическими интегралами, то есть для некоторой постоянной симметричной матрицы $C \in L(2)$

$$U^T U = C. \tag{2.5}$$

Через $\mathcal{O}$ обозначим множество (2.5) в $L(3,2)$. Чтобы подчеркнуть зависимость этого множества от заданной матирицы C, пишем $\mathcal{O} = \mathcal{O}(C)$.

Пусть $S = (\mathbf{I}, \boldsymbol{\lambda}, A, C)$ — набор перечисленных выше параметров задачи. Обозначим через X_S векторное поле на $\mathbf{R}^3 \times \mathcal{O}(C)$, соответствующее системе (2.4). При заданном наборе S задачу о движении гиростата в двух постоянных полях, описываемую динамической системой X_S будем, для краткости, называть *задачей динамики гиростата*, или ДГ-задачей.

Сопоставим матрицам $\Lambda \in SO(3)$, $D \in GL(2, \mathbf{R})$ линейные автоморфизмы $\Psi(\Lambda, D)$ и $\psi(\Lambda, D)$ пространств $\mathbf{R}^3 \times L(3,2)$ и $L(3) \times \mathbf{R}^3 \times L(3,2) \times L(2)$:

$$\begin{aligned} &\Psi(\Lambda, D)(\boldsymbol{\omega}, U) = (\Lambda\boldsymbol{\omega}, \Lambda U D^T), \\ &\psi(\Lambda, D)(\mathbf{I}, \boldsymbol{\lambda}, A, C) = (\Lambda \mathbf{I} \Lambda^T, \Lambda\boldsymbol{\lambda}, \Lambda A D^{-1}, DCD^T). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Легко видеть, что из (2.5), (2.6) следует $\Psi(\Lambda, D)(\mathbf{R}^3 \times \mathcal{O}(C)) = \mathbf{R}^3 \times \mathcal{O}(DCD^T)$. Используя лемму 1, получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любой пары* $(\Lambda, D) \in SO(3) \times GL(2, \mathbf{R})$

$$\Psi(\Lambda, D)_*(X_S(v)) = X_{\psi(\Lambda, D)(S)}(\Psi(\Lambda, D)(v)), \qquad v \in \mathbf{R}^3 \times \mathcal{O}(C).$$

Таким образом, две задачи динамики гиростата, определенные наборами параметров S и $\psi(\Lambda, D)(S)$, полностью эквивалентны.

Назовем ДГ-задачу *канонической*, если центры приложения сил лежат на первых двух осях подвижного триэдра на единичном расстоянии от O, а напряженности сил взаимно ортогональны.

Предложение 1. *Любая ДГ-задача с независимыми силами эквивалентна канонической. Более того, в обеих эквивалентных задачах центры приложения сил лежат в одной и той же плоскости тела, содержащей неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть ДГ-задача, определенная набором параметров $S = (\mathbf{I}, \boldsymbol{\lambda}, A, C)$, удовлетворяет (2.1). Это значит, что симметричные матрицы $A_* = (A^T A)^{-1}$ и C положительно определены. По известному факту линейной алгебры, A_* и C могут быть сведены соответственно к единичной матрице и к диагональной матрице одним и тем же оператором сопряжения

$$DA_*D^T = E, \quad DCD^T = \mathrm{diag}\{a^2, b^2\}, \qquad D \in GL(2, \mathbf{R}),\ a, b \in \mathbf{R}_+.$$

Тогда $\mathbf{c}_1(AD^{-1})$ и $\mathbf{c}_2(AD^{-1})$ образуют ортонормированную пару в $\mathbf{R}^3$. Существует $\Lambda \in SO(3)$ такая, что $\Lambda\mathbf{c}_i(AD^{-1}) = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2)$. Первое утверждение получаем, применяя лемму 2 с выбранными матрицами Λ, D к исходному векторному полю X_S.

Для завершения доказательства заметим, что преобразование $A \mapsto AD^{-1}$ сохраняет плоскость, натянутую на $\mathbf{c}_1(A)$, $\mathbf{c}_2(A)$. Матрица Λ в (2.6) означает лишь замену подвижного триэдра. Поэтому если $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ представляет некоторый физический вектор исходной задачи, то $\Lambda\mathbf{a}$ представляет тот же вектор в теле в эквивалентной задаче. ■

Замечание 1. Тот факт, что любая задача о движении твердого тела в двух постоянных полях может быть сведена к задаче, в которой одна из пар $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ или $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ ортонормирована, известен из [3]. *Одновременная* ортогонализация обеих пар, предложенная в [7] для твердого тела и выполненная выше для гиростата, существенно упрощает дальнейшие вычисления.

Из предложения 1 следует, что без потери общности для независимых сил можно полагать

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_2, \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = a^2, \ \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = b^2, \ \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0. \tag{2.9}$$

Меняя при необходимость порядок векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (с одновременной сменой направления $\mathbf{e}_3$), получим $a \geqslant b > 0$.

Рассмотрим динамически симметричный волчок в двух постоянных полях с центрами приложения сил в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Выберем подвижный триэдр так, что $O\mathbf{e}_3$ есть ось симметрии. Тогда тензор инерции $\mathbf{I}$ будет диагональным. Пусть $\boldsymbol{\lambda} = \lambda \mathbf{e}_3$, $a = b$. Для любой $\Theta \in SO(2)$ обозначим через $\hat{\Theta} \in SO(3)$ соответствующее вращение пространства $\mathbf{R}^3$ вокруг $O\mathbf{e}_3$. Возьмем в (2.6) $\Lambda = \hat{\Theta}$, $D = \Theta$. При условиях (2.8), (2.9) $\psi = \mathrm{Id}$, и Ψ становится группой симметрий. Система (2.4) имеет циклический интеграл $(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot (a^2 \mathbf{e}_3 - \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})$, указанный в [16] для аналога случая Ковалевской. Поэтому такую ДГ-задачу можно свести к семейству систем с двумя степенями свободы.

Назовем ДГ-задачу *неприводимой*, если в каноническом представлении (2.8), (2.9) она удовлетворяет свойству

$$a > b > 0. \tag{2.10}$$

Следующие утверждения необходимы для дальнейшего. Они также раскрывают некоторые свойства широкого класса ДГ-задач.

Лемма 3. *В неприводимой ДГ-задаче имеется ровно четыре положения равновесия.*

Доказательство. Множество особых точек системы (2.4) определено условиями $\boldsymbol{\omega} = 0$, $A \times U = 0$. Для эквивалентной канонической задачи со свойством (2.8) имеем

$$\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\beta} = 0. \tag{2.11}$$

Тогда четыре вектора в (2.11) параллельны одной и той же плоскости и $|\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\alpha}| = |\mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\beta}|$. Ввиду (2.9), (2.10) это равенство дает

$$\boldsymbol{\alpha} = \pm a \mathbf{e}_1, \ \boldsymbol{\beta} = \pm b \mathbf{e}_2. \tag{2.12}$$

С механической точки зрения этот результат совершенно нагляден — ни одна из взаимно ортогональных сил с различными по модулю напряженностями и «ортонормированными» центрами приложения не может порождать в положении равновесия ненулевой момент. Наличие гиростатического момента на состав положений равновесия не влияет. Поэтому результат здесь тот же, что и для твердого тела [4]. ■

Лемма 4. *Пусть неприводимая ДГ-задача в канонической форме имеет диагональный тензор инерции* $\mathbf{I} = \mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_3\}$ *и* $\boldsymbol{\lambda} = 0$. *Тогда тело имеет следующие семейства* *периодических движений маятникового типа:*

$$P_1:\ \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} \equiv \pm a\mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\omega} = \varphi^{\cdot}\mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\beta} = b(\mathbf{e}_2\cos\varphi - \mathbf{e}_3\sin\varphi), \\ \qquad\qquad I_1\varphi^{\cdot\cdot} = -b\sin\varphi; \end{cases}$$

$$P_2:\ \begin{cases} \boldsymbol{\beta} \equiv \pm b\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\omega} = \varphi^{\cdot}\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\alpha} = a(\mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_3\sin\varphi), \\ \qquad\qquad I_2\varphi^{\cdot\cdot} = -a\sin\varphi; \end{cases}$$

$$P_3:\ \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} \equiv \pm ab\mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = \varphi^{\cdot}\mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\alpha} = a(\mathbf{e}_1\cos\varphi - \mathbf{e}_2\sin\varphi), \quad \boldsymbol{\beta} = \pm b(\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi), \\ \qquad\qquad I_3\varphi^{\cdot\cdot} = -(a\pm b)\sin\varphi. \end{cases} \tag{2.13}$$

Если же $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, *но* $\boldsymbol{\lambda} = \lambda\mathbf{e}_i$ *для некоторого* $i = 1, 2, 3$, *то из вышеперечисленных семейств сохраняются только семейства* P_i *с соответствующим номером.*

Доказательство очевидно. Отметим, что в рассматриваемом случае указанные семейства исчерпывают все движения с постоянной по направлению угловой скоростью. В частности, тело (гиростат) в двух независимых постоянных полях не имеет равномерных вращений.

3. Критическое множество гиростата Ковалевской в двух постоянных полях

Предположим, что неприводимая ДГ-задача имеет диагональный тензор инерции с главными моментами инерции, удовлетворяющими отношению 2:2:1, а гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии $\boldsymbol{\lambda} = \lambda\mathbf{e}_3$. Эти условия описывают интегрируемый случай [15] движения гиростата Ковалевской в двух постоянных полях. Подходящим выбором единиц измерения представим уравнения (2.4) в форме

$$\begin{gathered} 2\omega_1^{\cdot} = \omega_2(\omega_3 - \lambda) + \beta_3,\ 2\omega_2^{\cdot} = -\omega_1(\omega_3 - \lambda) - \alpha_3,\ \omega_3^{\cdot} = \alpha_2 - \beta_1, \\ \alpha_1^{\cdot} = \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, \qquad \beta_1^{\cdot} = \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2, \\ \alpha_2^{\cdot} = \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_3, \qquad \beta_2^{\cdot} = \beta_3\omega_1 - \beta_1\omega_3, \\ \alpha_3^{\cdot} = \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, \qquad \beta_3^{\cdot} = \beta_1\omega_2 - \beta_2\omega_1. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Фазовое пространство есть $P^6 = \mathbf{R}^3 \times \mathcal{O}$, где $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ определено условием (2.9); $\mathcal{O}$ диффеоморфно $SO(3)$.

Полный набор первых интегралов в инволюции на P^6 состоит из интеграла энергии H, обобщенного интеграла Ковалевской K [2],[16] и интеграла G, найденного в [15]:

$$\begin{aligned} H &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \alpha_1 - \beta_2, \\ K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2 + \\ &\quad + 2\lambda[(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_1\alpha_3 + 2\omega_2\beta_3], \\ G &= \frac{1}{4}(M_\alpha^2 + M_\beta^2) + \frac{1}{2}(\omega_3 - \lambda)M_\gamma - b^2\alpha_1 - a^2\beta_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь обозначено

$$M_\alpha = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\alpha}, \quad M_\beta = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\beta}, \quad M_\gamma = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\cdot(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}),$$

Введем интегральное отображение

$$J = G \times K \times H : P^6 \to \mathbf{R}^3. \tag{3.4}$$

Обозначим через $\mathfrak{C} \subset P^6$ множество критических точек J. По определению, бифуркационная диаграмма отображения J есть подмножество $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$, над которым J не является локально-тривиальным; Σ определяет случаи, когда интегральные многообразия

$$J_c = J^{-1}(c), \quad c = (g, k, h) \in \mathbf{R}^3 \tag{3.5}$$

меняют топологический тип. Нахождение критического множества $\mathfrak{C}$ и бифуркационной диаграммы — необходимый этап в топологическом анализе задачи в целом.

Из теоремы Лиувилля – Арнольда следует, что для $c \notin \Sigma$ многообразие (3.5), если оно не пусто, является объединением трехмерных торов. Рассматриваемая гамильтонова система невырождена (по крайней мере, для достаточно малых значений b), поэтому траектории на таких торах квазипериодичны с тремя почти всюду независимыми частотами. Критическое множество $\mathfrak{C}$ инвариантно относительно фазового потока и состоит из траекторий с количеством частот меньше трех. Эти траектории называем *критическими движениями*. Множество $\mathfrak{C}$ стратифицировано рангом отображения J. Пусть $\mathfrak{C}_j = \{\zeta \in \mathfrak{C} : \operatorname{rank} J(\zeta) = j\}$. Можно ожидать, что $\mathfrak{C}_j$ состоит из торов Лиувилля размерности j, а образ $\mathfrak{C}_j$ в составе Σ есть гладкая поверхность Σ_j размерности j. В целом Σ можно рассматривать как двумерный клеточный комплекс, Σ_j — его остов размерности j, при этом для $j = 1, 2$ будет выполнено включение $\partial\Sigma_j \subset \Sigma_{j-1}$.

Для значения $c \in \Sigma_2$ множество $J_c \cap \mathfrak{C}$ состоит из двумерных торов. Динамическая система, индуцированная на объединении таких торов по c из некоторого открытого подмножества в Σ_2, будет гамильтоновой с двумя степенями свободы. Обратно, пусть M подмногообразие в P^6, $\dim M = 4$, и предположим, что индуцированная система на M гамильтонова. Тогда, очевидно, $M \subset \mathfrak{C}$. Это рассуждение дает полезный инструмент для того, чтобы выяснить, будет ли совместный уровень двух функций состоять из критических точек отображения J.

Лемма 5. *Рассмотрим систему уравнений*

$$f_1 = 0, \ f_2 = 0 \tag{3.6}$$

в области W, открытой в P^6. Пусть X векторное поле на P^6, соответствующее (3.1) *и пусть $M \subset W$ определено системой* (3.6). *Предположим, что*

(i) f_1, f_2 — *гладкие функции, независимые на M;*

(ii) $Xf_1 = 0, \ Xf_2 = 0$ *на M;*

(iii) *скобка Пуассона $\{f_1, f_2\}$ почти всюду на M отлична от нуля.*

Тогда M состоит из критических точек отображения J.

Доказательство. Из условий (i), (ii) следует, что M — гладкое четырехмерное инвариантное многообразие для ограничения фазового потока на открытое множество W. Условие (iii) означает, что замкнутая 2-форма, индуцированная на M симплектической структурой многообразия P^6, почти всюду невырождена. Таким образом, поток на M почти всюду гамильтонов с двумя степенями свободы. Он наследует свойство полной интегрируемости. Тогда почти все его интегральные многообразия состоят из двумерных торов и с необходимостью лежат в $\mathfrak{C}$. Так как M замкнуто в W, а $\mathfrak{C}$ замкнуто в P^6, получаем, что $M \subset \mathfrak{C}$. ■

Замечание 2. Приведенные выше рассуждения легко модифицируются на случай, когда инвариантное подмножество $M \subset P^6$ задано **четырьмя** соотношениями вида

$$f_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 4). \tag{3.7}$$

Для инвариантности необходимо потребовать $X f_i = 0$, а для невырожденности индуцированной симплектической структуры в некоторой точке достаточно невырожденности матрицы, составленной из скобок Пуассона $\{f_i, f_j\}$. Из этого одновременно следует и невырожденность матрицы Якоби системы уравнений (3.7), то есть гладкость M как двумерного многообразия в окрестности данной точки. В результате, если невырожденность имеет место почти всюду на M, то на M почти всюду индуцируется интегрируемая гамильтонова система с одной степенью свободы, и значит, M заполнено особыми периодическими решениями и их бифуркациями при возникновении неподвижных точек. В частности, $M \subset \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_0 \subset \mathfrak{C}$.

При отсутствии гиростатического момента задача нахождения критического множества и его образа — бифуркационной диаграммы — полностью решена. Множество критических точек описывается одной системой вида (3.7) и тремя системами вида (3.6). Полное изложение этого вопроса и обзор литературы можно найти в [7, 13, 9].

Введем замену переменных [10] ($i^2 = -1$), обобщающую замену С.В. Ковалевской и подсказанную представлением Лакса [15]:

$$\begin{gathered}
x_1 = (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), \quad x_2 = (\alpha_1 - \beta_2) - i(\alpha_2 + \beta_1), \\
y_1 = (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), \quad y_2 = (\alpha_1 + \beta_2) - i(\alpha_2 - \beta_1), \\
z_1 = \alpha_3 + i\beta_3, \quad z_2 = \alpha_3 - i\beta_3, \\
w_1 = \omega_1 + i\omega_2, \quad w_2 = \omega_1 - i\omega_2, \quad w_3 = \omega_3.
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Система (3.1) запишется так (штрих означает $d/d(it)$):

$$\begin{gathered}
2w_1' = -(w_1 w_3 + z_1), \quad 2w_2' = w_2 w_3 + z_2, \quad 2w_3' = y_2 - y_1, \\
x_1' = -x_1 w_3 + z_1 w_1, \quad x_2' = x_2 w_3 - z_2 w_2, \\
y_1' = -y_1 w_3 + z_2 w_1, \quad y_2' = y_2 w_3 - z_1 w_2, \\
2z_1' = x_1 w_2 - y_2 w_1, \quad 2z_2' = -x_2 w_1 + y_1 w_2.
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Пусть V^9 — подпространство в $\mathbf{C}^9$, определенное соотношениями (3.8). На V^9 уравнения (2.9) фазового пространства P^6 примут вид

$$z_1^2 + x_1 y_2 = r^2, \quad z_2^2 + x_2 y_1 = r^2, \tag{3.10}$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + 2 z_1 z_2 = 2p^2. \tag{3.11}$$

Здесь введены положительные константы $p = \sqrt{a^2 + b^2}$, $r = \sqrt{a^2 - b^2}$.

В координатах (3.8) с учетом (3.10), (3.11) интегралы (3.2) запишутся так:

$$\begin{aligned}
& H = w_1 w_2 + \frac{1}{2} w_3^2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \\
& K = (w_1^2 + x_1)(w_2^2 + x_2) + 2\lambda(w_1 w_2 w_3 + z_2 w_1 + z_1 w_2) - 2\lambda^2 w_1 w_2, \\
& G = \frac{1}{4}(p^2 - x_1 x_2) w_3^2 + \frac{1}{2}(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2) w_3 + \\
& \quad + \frac{1}{4}(x_2 w_1 + y_1 w_2)(y_2 w_1 + x_1 w_2) - \frac{1}{4} p^2 (y_1 + y_2) + \frac{1}{4} r^2 (x_1 + x_2) + \\
& \quad + \frac{1}{2}\lambda(z_1 z_2 w_3 + y_2 z_2 w_1 + y_1 z_1 w_2) + \frac{1}{4}\lambda^2 (p^2 - y_1 y_2).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Далее всюду полагаем $\lambda \neq 0$. Следующая теорема описывает множество критических точек интегрального отображения для гиростата.

Теорема 1. *Множество критических точек интегрального отображения* (3.4) *состоит из следующих подмножеств в* P^6:

1) *множества* $\mathfrak{L}$, *определяемого системой*

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0; \tag{3.13}$$

2) *множества* $\mathfrak{N}$, *определяемого системой*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned} F_1 = {} & (w_1 w_2 + \lambda w_3)(w_2 x_1 + \lambda z_1)\lambda y_1 - \\ & - w_2(w_1^2 + x_1)(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 - x_1 x_2 w_3 + 2 z_1 z_2 \lambda) - \\ & - x_2(w_1 w_3 + z_1)(w_1 z_1 - x_1 w_3)\lambda + (x_1 w_3^2 - 2 z_1 w_1 w_3 - z_1^2) z_2 \lambda^2, \\ F_2 = {} & (w_1 w_2 + \lambda w_3)(w_1 x_2 + \lambda z_2)\lambda y_2 - \\ & - w_1(w_2^2 + x_2)(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 - x_1 x_2 w_3 + 2 z_1 z_2 \lambda) - \\ & - x_1(w_2 w_3 + z_2)(w_2 z_2 - x_2 w_3)\lambda + (x_2 w_3^2 - 2 z_2 w_2 w_3 - z_2^2) z_1 \lambda^2; \end{aligned}$$

3) *множества* $\mathfrak{O}$, *определяемого системой*

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \tag{3.15}$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= [y_1 w_2 + x_2 w_1 + z_2(w_3 + \lambda)] w_1 (w_3 - \lambda) + x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 + z_1 z_2 (w_3 + \lambda), \\ R_2 &= [y_2 w_1 + x_1 w_2 + z_1(w_3 + \lambda)] w_2 (w_3 - \lambda) + x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 + z_1 z_2 (w_3 + \lambda). \end{aligned}$$

Доказательству предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Пусть f — функция на V^9. Для краткости «критической точкой f» называем критическую точку ограничения f на P^6. Аналогично, df означает ограничение дифференциала f на пространство векторов, касательных к P^6.

Лемма 6. *Критические точки функции* f *на* V^9 *в указанном выше смысле определяются системой уравнений*

$$X_i f = 0 \quad (i = 1, \ldots 6), \tag{3.16}$$

где

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial w_1}, \; X_2 = \frac{\partial}{\partial w_2}, \; X_3 = \frac{\partial}{\partial w_3},$$

$$X_4 = z_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + z_1 \frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{1}{2} y_1 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

$$X_5 = z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{2} y_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

$$X_6 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Доказательство. Шесть векторных полей X_i касаются $P^6 \subset V^9$ и линейно независимы в каждой точке P^6. ■

Предложение 2. *Множество $\mathfrak{C}_0$ исчерпывается четырьмя положениями равновесия, существующими в этой задаче.*

Доказательство. Нулевой ранг интегрального отображения в точке $\zeta \in P^6$ предполагает, в частности, $dH = 0$, из чего сразу следует, что ζ — неподвижная точка. Тогда, согласно лемме 3, это – одна из точек (2.12), или в комплексных переменных

$$\begin{gathered} w_1 = w_2 = w_3 = 0, \quad z_1 = z_2 = 0, \\ x_1 = x_2 = \varepsilon_1 a - \varepsilon_2 b, \quad y_1 = y_2 = \varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b \qquad (\varepsilon_1 = \pm 1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1). \end{gathered}$$

Применяя уравнения (3.16) с $f = K$ и $f = G$, убеждаемся, что в этих точках $dK = 0$ и $dG = 0$. Следовательно, в этих точках $\operatorname{rank} J = 0$. Отметим, что в классических задачах динамики твердого тела в осесимметричном поле ранг интегрального отображения не меньше единицы (интеграл момента всюду регулярен). В нашем случае все положения равновесия являются *невырожденными* критическими точками гамильтониана, а потому будут критическими и для любого первого интеграла системы. ■

Предложение 3. *Множество $\mathfrak{C}_1$ полностью определяется условием* $\operatorname{rank}\{dK, dH\} = 1$ *и исчерпывается точками, входящими в состав следующих периодических движений:*

1) *маятниковые движения* (2.13)*;*

2) *движения, описываемые следующей системой уравнений:*

$$w_1 = q(w)\sqrt{w}, \quad w_2 = \frac{\sqrt{w}}{q(w)}, \quad w_3 = \frac{\lambda}{\sigma} w, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sigma u}[\, r^2\lambda^2\sigma^2 - (\lambda^2+\sigma)\, u\, q^2(w) w\,], \\ x_2 &= \frac{1}{\sigma u}[\, r^2\lambda^2\sigma^2 - (\lambda^2+\sigma)\, u\, \frac{w}{q^2(w)}\,], \\ y_1 &= \sigma\left(1 + \frac{\sigma}{\lambda^2} - \frac{r^4\lambda^2\sigma}{u^2}\right) + \frac{r^2\lambda^2}{u} q^2(w) w, \\ y_2 &= \sigma\left(1 + \frac{\sigma}{\lambda^2} - \frac{r^4\lambda^2\sigma}{u^2}\right) + \frac{r^2\lambda^2}{u} \frac{w}{q^2(w)}, \\ z_1 &= -\frac{r^2\lambda\,\sigma}{u}\frac{\sqrt{w}}{q(w)} + \frac{\lambda^2+\sigma}{\lambda} q(w)\sqrt{w}, \\ z_2 &= -\frac{r^2\lambda\,\sigma}{u} q(w)\sqrt{w} + \frac{\lambda^2+\sigma}{\lambda}\frac{\sqrt{w}}{q(w)}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь $q(w)$ — корень уравнения $q^4 - 2Q(w)q^2 + 1 = 0$, где

$$Q(w) = \frac{\sigma u^3 + (\lambda^2+\sigma)[\lambda^2 w^2 + \sigma^2(2w-\sigma)]u^2 + r^4\lambda^4\sigma^4}{2r^2\lambda^2\sigma^2(\lambda^2+\sigma)uw}; \tag{3.20}$$

σ, u — константы, связанные уравнением

$$\begin{aligned} &\lambda^2(\lambda^2+\sigma)^2u^5 + (\lambda^2+\sigma)[2p^2\lambda^4 - (\lambda^2+\sigma)^3\sigma]\sigma u^4 + \\ &\quad + r^4\lambda^6\sigma^2u^3 + 2r^4\lambda^4\sigma^4(\lambda^2+\sigma)^2u^2 - r^8\lambda^8\sigma^6 = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Зависимость вспомогательной переменной w от времени задается уравнением

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = -\frac{\lambda^2}{4\sigma^2}P_+(w)P_-(w), \tag{3.22}$$

где

$$P_\pm(w) = w^2 + 2\sigma^2\frac{u \pm r^2\lambda^2}{\lambda^2 u}w + \frac{\sigma[u^3 - (\lambda^2+\sigma)\sigma^2u^2 + r^4\lambda^4\sigma^3]}{(\lambda^2+\sigma)\lambda^2u^2}. \tag{3.23}$$

Доказательство. Поскольку в точках множества $\mathfrak{C}_1$ выполнено $dH \neq 0$, для исследования зависимости K и H достаточно ввести функцию с одним неопределенным множителем Лагранжа σ. Выпишем систему уравнений (3.16), полагая $f = K - 2\sigma H$:

$$\begin{aligned}(w_1^2 + x_1)w_2 + [z_1 + \lambda w_1(w_3 - \lambda)] - \sigma w_1 = 0,\\ (w_2^2 + x_2)w_1 + [z_2 + \lambda w_2(w_3 - \lambda)] - \sigma w_2 = 0,\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\lambda w_1 w_2 - \sigma w_3 = 0, \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}(w_1^2 + x_1)z_2 - \lambda(w_2x_1 + w_1y_1) + \sigma z_1 = 0,\\ (w_2^2 + x_2)z_1 - \lambda(w_1x_2 + w_2y_2) + \sigma z_2 = 0,\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$x_1w_2^2 - x_2w_1^2 + \sigma(y_1 - y_2) = 0. \tag{3.27}$$

Рассмотрим вначале множество критических точек функции K. Для его нахождения нужно в уравнениях (3.24)–(3.27) положить $\sigma = 0$. Уравнение (3.25) сразу же дает $w_1 = w_2 = 0$, а из уравнений (3.24) получаем тогда, что $z_1 = z_2 = 0$, и уравнения (3.26), (3.27) выполнены. Уравнения (3.16) в подстановке $f = G$ этими значениями также удовлетворены. Следовательно, $dK = 0, dG = 0$, $dH \neq 0$ и $\operatorname{rank} J = 1$. В исходных переменных на соответствующих траекториях имеем $\omega_1 = \omega_2 \equiv 0$, $\alpha_3 = \beta_3 \equiv 0$. Подстановка в систему (3.1) приводит к решениям (2.13).

Далее полагаем $\sigma \neq 0$. Неподвижные точки системы уже исключены, поэтому из уравнения (3.25) следует, что $w_1w_2 \neq 0$. Удовлетворяя (3.25), введем замену (3.18). Четыре уравнения (3.24), (3.26) образуют линейную систему по y_1, y_2, z_1, z_2, из которой эти переменные находятся как функции от x_1, x_2, w, q. Подстановка найденных зависимостей в (3.27) дает тождество. Обозначая

$$u = (w - \sigma)^2(\lambda^2 + \sigma) - \sigma x_1 x_2, \tag{3.28}$$

решим систему (3.10) относительно x_1, x_2. Получим выражения (3.19) и условие совместности с (3.28) в виде (3.20), где

$$Q = \frac{1}{2}(q^2 + \frac{1}{q^2}).$$

Последнее неиспользованное уравнение (3.11) дает связь (3.21) между u и константами λ, σ, так что величина (3.28) также оказывается константой. Таким образом, все фазовые переменные выражены через одну переменную w, для которой из (3.9) найдем дифференциальное уравнение (3.22). Интересно отметить, что в силу (3.23) оно интегрируется в эллиптических функциях. Остается показать, что в точках этого семейства периодических решений и в самом деле $\operatorname{rank} J = 1$, то есть что из условия зависимости dK, dH следует зависимость dG, dH. Для этого выпишем уравнения (3.16), полагая

$$f = 2G - (p^2 + \frac{\lambda^2 + \sigma}{\lambda^2\sigma}u)H,$$

и убедимся, что все они обращаются в тождества. Таким образом, в рассматриваемых точках $\operatorname{rank}\{dK, dG, dH\} = 1$. ■

Предложение 4. *Система уравнений* (3.9) *имеет четырехмерное инвариантное подмногообразие* $\mathfrak{O}_*$, *заданное уравнениями*

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \tag{3.29}$$

где

$$U_1 = \frac{y_2 w_1 + x_1 w_2 + z_1(w_3 + \lambda)}{w_1} - \frac{x_2 w_1 + y_1 w_2 + z_2(w_3 + \lambda)}{w_2}, \quad U_2 = w_1 w_2 U_1'. \tag{3.30}$$

Скобка Пуассона $\{U_1, U_2\}$ *на этом многообразии отлична от нуля почти всюду.*

Доказательство. Вычисляя производную U_2' в силу системы (3.9), убеждаемся, что она пропорциональна U_1, то есть обращается в нуль тождественно на множестве (3.29), что доказывает его инвариантность. Скобка Пуассона функций, задающих $\mathfrak{O}_*$, может быть представлена в виде

$$\{U_1, U_2\} = -\frac{4}{s}[3s^4 - 2s^3(h - \frac{\lambda^2}{2}) + \frac{p^4 - r^4}{4}], \tag{3.31}$$

где h — постоянная энергии, s — постоянная частного интеграла

$$S = \frac{x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 + z_1 z_2 (w_3 + \lambda)}{2 w_1 w_2 (w_3 - \lambda)}, \tag{3.32}$$

независимого с H почти всюду на $\mathfrak{O}_*$. Таким образом, множество нулей функции (3.31) имеет в $\mathfrak{O}_*$ коразмерность единица, а меру нуль. ■

Замечание 3. При $\lambda = 0$ многообразие $\mathfrak{O}_*$ переходит в фазовое пространство гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, изученной в [6], [8]. Геометрической характеристикой движений в этой системе являлось условие [6]

$$\frac{\mathbf{M}{\cdot}\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{M}{\cdot}\mathbf{e}_1} = \frac{\mathbf{M}{\cdot}\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{M}{\cdot}\mathbf{e}_2} = \mathrm{const},$$

где $\mathbf{M}$ — вектор кинетического момента. Система (3.29), (3.30) получена из этого же условия с учетом того, что здесь $\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$.

Замечание 4. Нетрудно видеть, что из уравнений (3.29), (3.30) следуют уравнения (3.15), в частности, $\mathfrak{O}_* = \mathfrak{O} \backslash \mathfrak{L}$. Согласно лемме 5 это многообразие целиком содержится в $\mathfrak{C}_2$.

4. Доказательство теоремы 1

Согласно утверждению теоремы, необходимо доказать, что

$$\mathfrak{L} \cup \mathfrak{N} \cup \mathfrak{O} = \mathfrak{C}. \tag{4.1}$$

Из предложений 2, 3 следует, что $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{C}_0 \cup \mathfrak{C}_1$ (на $\mathfrak{L}$ имеем $dK \equiv 0, dG \equiv 0$). Отметим также, что система соотношений (3.13) удовлетворяет условиям, перечисленным в замечании 2. Поэтому $\mathfrak{L}$ — гладкое двумерное инвариантное многообразие, на котором индуцирована гамильтонова система с одной степенью свободы.

Согласно предложению 4 имеем $\mathfrak{O}_* \subset \mathfrak{C}_2$, следовательно, $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_* \cup \mathfrak{L} \subset \mathfrak{C}$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{N}$, заданное уравнениями (3.14), и выясним, в каких случаях они *не разрешимы* относительно y_1, y_2. Если предположить, что

$$w_1 w_2 + \lambda w_3 \equiv 0, \tag{4.2}$$

то после ряда дифференцирований в силу системы (3.9) придем к уравнениям (3.24)–(3.27) с $\sigma=-\lambda^2$. Соответствующие точки лежат в $\mathfrak{C}_1$. Если же

$$(w_2x_1+\lambda z_1)(w_1x_2+\lambda z_2)\equiv 0, \tag{4.3}$$

то последовательное дифференцирование приведет к системе уравнений, допускающей только решения вида (3.13), то есть к множеству $\mathfrak{L}$. Обозначим $\mathfrak{N}_*=\mathfrak{N}\backslash(\mathfrak{C}_0\cup\mathfrak{C}_1)$. На этом множестве из (3.14) будем иметь

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{(w_1w_2+\lambda w_3)(w_2x_1+\lambda z_1)\lambda}[w_2(w_1^2+x_1)(x_2z_1w_1+x_1z_2w_2-x_1x_2w_3+\\
&\quad +2z_1z_2\lambda)+x_2(w_1w_3+z_1)(w_1z_1-x_1w_3)\lambda-(x_1w_3^2-2z_1w_1w_3-z_1^2)z_2\lambda^2],\\
y_2 &= \frac{1}{(w_1w_2+\lambda w_3)(w_1x_2+\lambda z_2)\lambda}[w_1(w_2^2+x_2)(x_2z_1w_1+x_1z_2w_2-x_1x_2w_3+\\
&\quad +2z_1z_2\lambda)+x_1(w_2w_3+z_2)(w_2z_2-x_2w_3)\lambda-(x_2w_3^2-2z_2w_2w_3-z_2^2)z_1\lambda^2].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Продифференцируем функции F_1,F_2 в силу системы (3.9) и подставим в F_1',F_2' выражения (4.4). Получим

$$F_1'\equiv 0,\quad F_2'\equiv 0,$$

что доказывает инвариантность множества $\mathfrak{N}_*$. Скобка Пуассона $\{F_1,F_2\}$ в подстановке (4.4) может быть представлена в виде

$$\{F_1,F_2\}=\lambda(w_1w_2+\lambda w_3)\sqrt{2(w_1w_2+\lambda w_3)(w_2x_1+\lambda z_1)(w_1x_2+\lambda z_2)}C, \tag{4.5}$$

где величина C выражается через постоянную h интеграла энергии и постоянную s имеющегося в этом случае частного интеграла

$$S=\frac{x_1x_2w_3-x_2z_1w_1-x_1z_2w_2-\lambda z_1z_2}{2\lambda(w_1w_2+\lambda w_3)}, \tag{4.6}$$

аналогичного интегралу (3.32) и независимого с H почти всюду на $\mathfrak{N}_*$, следующим образом

$$C=\frac{1}{s}(8s^3\lambda^2-r^4)\sqrt{2s^2-(2h+\lambda^2)s+p^2}. \tag{4.7}$$

Случаи обращения в нуль переменных сомножителей (4.2) и (4.3) в выражении (4.5) уже разобраны. Нули функции (4.7) имеют коразмерность единица. Поэтому выражение (4.5) отлично от нуля почти всюду на множестве $\mathfrak{N}_*$. По лемме 5 получаем, что $\mathfrak{N}_*\subset\mathfrak{C}_2$. Итак, $\mathfrak{L}\cup\mathfrak{N}\cup\mathfrak{O}\subset\mathfrak{C}$. Для доказательства равенства (4.1) покажем, что имеет место и обратное включение $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{L}\cup\mathfrak{N}\cup\mathfrak{O}$.

Точки множества $\mathfrak{C}_0$ (предложение 2) удовлетворяют (3.13). Согласно предложению 3, множество $\mathfrak{C}_1$ представимо в виде $\mathfrak{C}_{11}\cup\mathfrak{C}_{12}$, где $\mathfrak{C}_{11}$ состоит из точек траекторий (2.13), а $\mathfrak{C}_{12}$ определяется системой (3.18)–(3.21). На траекториях (2.13) выполнено (3.13). Непосредственно проверяется, что точки, заданные равенствами (3.18)–(3.20) при условии (3.21) удовлетворяют обеим системам (3.14) и (3.15). Следовательно, $\mathfrak{C}_0\cup\mathfrak{C}_{11}\subset\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{C}_{12}\subset\mathfrak{N}\cap\mathfrak{O}$.

Рассмотрим произвольную точку из $\mathfrak{C}_2$. Из предложений 2, 3 следует, что в такой точке дифференциалы dK и dH линейно независимы. Поэтому в функции с неопределенными множителями Лагранжа для исследования зависимости G,H,K можно множитель у функции G считать отличным от нуля и положить его равным любой ненулевой константе. Удобно взять в качестве такой функции $2G+SK+(T-p^2)H$, где S,T — неопределенные множители. Из инвариантности относительно фазового потока условия

$$2dG + S\,dK + (T-p^2)\,dH = 0, \tag{4.8}$$

следует, что $\dot S\,dK + \dot T\,dH = 0$. Но $\operatorname{rank}\{dG, dK, dH\} = 2$, поэтому в точках множества $\mathfrak{C}_2$ имеем $\dot S \equiv 0, \dot T \equiv 0$. Таким образом, функции S,T являются частными интегралами на множестве $\mathfrak{C}_2$. Согласно лемме 6 запишем уравнение (4.8) в виде системы

$$\begin{aligned}
&x_2(y_2+2S)w_1 + 2S(w_1w_2+\lambda w_3)w_2 + \\
&\qquad + (T - z_1z_2 - 2S\lambda^2)w_2 + x_2z_1w_3 + (y_2+2S)z_2\lambda = 0,\\
&x_1(y_1+2S)w_2 + 2S(w_1w_2+\lambda w_3)w_1 + \\
&\qquad + (T - z_1z_2 - 2S\lambda^2)w_1 + x_1z_2w_3 + (y_1+2S)z_1\lambda = 0,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
&(T - x_1x_2)w_3 + x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2 + (2Sw_1w_2 + z_1z_2)\lambda = 0,\\
&Tz_1 + x_1z_2w_3^2 + [(x_1x_2 - 2z_1z_2)w_1 + (y_1z_1 + x_1z_2)\lambda + x_1y_1w_2]w_3 - \\
&\qquad - (y_1z_1 + x_1z_2)w_1w_2 + x_1(y_1+2S)w_2\lambda - [x_2z_1 + (y_2+2S)z_2]w_1^2 + \\
&\qquad + [(y_2+2S)y_1 - 2z_1z_2]w_1\lambda + y_1z_1\lambda^2 - [(y_2+2S)x_1 + z_1^2]z_2 = 0,\\
&Tz_2 + x_2z_1w_3^2 + [(x_1x_2 - 2z_1z_2)w_2 + (y_2z_2 + x_2z_1)\lambda + x_2y_2w_1]w_3 - \\
&\qquad - (y_2z_2 + x_2z_1)w_1w_2 + x_2(y_2+2S)w_1\lambda - [x_1z_2 + (y_1+2S)z_1]w_2^2 + \\
&\qquad + [(y_1+2S)y_2 - 2z_1z_2]w_2\lambda + y_2z_2\lambda^2 - [(y_1+2S)x_2 + z_2^2]z_1 = 0,\\
&(T - x_1x_2)(y_1 - y_2) + 2(y_2+S)x_2w_1^2 - 2(y_1+S)x_1w_2^2 + \\
&\qquad + 2(x_2z_1w_1 - x_1z_2w_2)w_3 + x_2z_1^2 - x_1z_2^2 + 2(y_2z_2w_1 - y_1z_1w_2)\lambda = 0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Из предложения 4 следует, что этой системе заведомо удовлетворяют точки множества $\mathfrak{O}_*$, заданного системой (3.29). Исключим эти точки с целью найти все остальные случаи. Полагая

$$U_1U_2 \neq 0, \tag{4.11}$$

выразим из уравнений (3.30) y_1, y_2:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{2w_1w_2(w_3-\lambda)}\{2U_2 - [w_1w_2(w_3-\lambda) + w_2z_1 - w_1z_2]U_1 - 2[w_1z_2(w_3-\lambda)^2 + \\
&\qquad + (x_2w_1^2 + z_1z_2 + 2\lambda w_1z_2)(w_3-\lambda) + x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2 + 2\lambda z_1z_2]\},\\
y_2 &= \frac{1}{2w_1w_2(w_3-\lambda)}\{2U_2 + [w_1w_2(w_3-\lambda) + w_1z_2 - w_2z_1]U_1 - 2[w_2z_1(w_3-\lambda)^2 + \\
&\qquad + (x_1w_2^2 + z_1z_2 + 2\lambda w_2z_1)(w_3-\lambda) + x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2 + 2\lambda z_1z_2]\}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Определитель системы (4.9) по $T, 2S$ равен

$$\Delta = x_1w_2^2 - x_2w_1^2 - (z_2w_1 - z_1w_2)\lambda.$$

Если допустить, что $\Delta \equiv 0$ на некотором отрезке времени, то последовательное дифференцирование этого тождества в силу системы (3.9) приведет к условиям (3.13), то есть к точкам из $\mathfrak{C}_0 \cup \mathfrak{C}_1$. Поэтому считаем

$$\Delta \neq 0 \tag{4.13}$$

и из уравнений (4.9) находим

$$\begin{aligned} S &= \frac{x_2y_2w_1^2 - x_1y_1w_2^2 + (x_2z_1w_1 - x_1z_2w_2)w_3 + (y_2z_2w_1 - y_1z_1w_2)\lambda}{\Delta}, \\ T &= \frac{A_1B_1 - A_2B_2}{\Delta}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A_1 &= (x_1w_2 + \lambda z_1)y_1 + (x_1w_3 - z_1w_1)z_2, \quad B_1 = (w_2^2 + x_2)w_1 + \lambda w_2(w_3 - \lambda) + \lambda z_2, \\ A_2 &= (x_2w_1 + \lambda z_2)y_2 + (x_2w_3 - z_2w_2)z_1, \quad B_2 = (w_1^2 + x_1)w_2 + \lambda w_1(w_3 - \lambda) + \lambda z_1. \end{aligned}$$

Подставив (4.12), (4.14) в (4.10), получим систему четырех уравнений вида $E_i = 0$ ($i = 1, \ldots, 4$), где $E_i = a_{i2}U_1^2 + a_{i1}U_1 + a_{i0}U_2$, a_{ij} — многочлены. Для доказательства теоремы эта система в полном виде оказывается избыточной. Нам достаточно приравнять нулю, например, результант наиболее простых функций E_1, E_4 по U_2. Получим $4w_1w_2U_1Q\Delta = 0$, где

$$\begin{aligned} Q = {} & \lambda w_1w_2(x_1w_2 + \lambda z_1)(x_2w_1 + \lambda z_2)U_1 - \bigl\{w_1w_2[x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2 - \\ & - x_1x_2(w_3 - \lambda) + 2\lambda z_1z_2] + (z_1z_2w_3 + x_2z_1w_1 + x_1z_2w_2)\lambda^2 + z_1z_2\lambda^3\bigr\}\Delta. \end{aligned}$$

По предположению (4.11) $U_1 \neq 0$. В точках $\mathfrak{C}\backslash\mathfrak{L}$ произведение w_1w_2 не есть тождественный нуль. Искомое множество $\mathfrak{C}\backslash(\mathfrak{L}\cup\mathfrak{O})$ инвариантно относительно фазового потока, поэтому в силу условия (4.13) и системы (3.9) должно быть $Q = 0$, $Q' = 0$. Из этих уравнений, линейных по y_1, y_2, получаем выражения (4.4), удовлетворяющие соотношениям (3.14). Следовательно, $\mathfrak{C}\backslash(\mathfrak{L}\cup\mathfrak{O}) \subset \mathfrak{N}$. Теорема доказана.

Замечание 5. На множестве $\mathfrak{N}$ интеграл S принимает вид (4.6). Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить выражения (4.4) в первую формулу (4.14). На множестве $\mathfrak{O}$ та же функция S в подстановке (3.29), (4.12) принимает вид (3.32). Поэтому использование одного и того же обозначения в (3.32) и (4.6) оправдано. Выражения для T также упрощаются. На множестве $\mathfrak{N}$ оказывается $T = 2\lambda^2 S$, то есть независимого с S частного интеграла эта функция не дает. На множестве $\mathfrak{O}$ имеем

$$T = x_1x_2 + z_1z_2 - 2w_1w_2S.$$

При $\lambda = 0$ такое же выражение с соответствующей функцией S дало независимый с S частный интеграл, позволивший получить простую бифуркационную диаграмму индуцированной системы с двумя степенями свободы и разделить переменные в дифференциальных уравнениях [8].

5. Бифуркационная диаграмма

Представление Лакса для данной задачи, найденное в работе [15], в наших обозначениях может быть записано в виде

$$L' = LM - ML, \tag{5.1}$$

где

$$L = \begin{Vmatrix} 2\lambda & \frac{x_2}{\kappa} & -2w_1 & \frac{z_2}{\kappa} \\ -\frac{x_1}{\kappa} & -2\lambda & -\frac{z_1}{\kappa} & 2w_1 \\ -2w_1 & \frac{z_2}{\kappa} & -2w_3 & -\frac{y_1}{\kappa} - 4\kappa \\ -\frac{z_1}{\kappa} & 2w_2 & \frac{y_2}{\kappa} + 4\kappa & 2w_3 \end{Vmatrix}, \quad M = \begin{Vmatrix} -\frac{w_3}{2} & 0 & \frac{w_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{w_3}{2} & 0 & -\frac{w_1}{2} \\ \frac{w_1}{2} & 0 & \frac{w_2}{2} & \kappa \\ 0 & -\frac{w_2}{2} & -\kappa & -\frac{w_3}{2} \end{Vmatrix},$$

через $\varkappa$ обозначен спектральный параметр, производная в (5.1) вычисляется в силу системы (3.9). Уравнение для собственных значений μ матрицы L определяет ассоциированную с данным представлением алгебраическую кривую [12]. Положим $s = 2\varkappa^2$ и обозначим через h, k, g произвольные постоянные интегралов (3.12). Уравнение алгебраической кривой примет вид

$$\begin{aligned} &\mu^4 - 4\mu^2[\frac{p^2}{s} - (2h+\lambda^2) + 2s] + 4[\frac{r^4}{s^2} + \frac{2}{s}(4g - 2p^2h - p^2\lambda^2) + \\ &\quad + 4(k + 2\lambda^2 h) - 8\lambda^2 s] = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Можно предположить, что бифуркационная диаграмма интегрального отображения (3.4) содержится в множестве тех значений (g, k, h), при которых кривая (5.3) перестает быть неособенной, то есть либо является приводимой — левая часть уравнения (5.3) распадается в произведение рациональных выражений, либо имеет особую точку в стандартном смысле. Таким путем можно предугадать результат следующего утверждения. Однако для его строгого доказательства понадобятся непосредственные вычисления на полученных выше критических подмножествах.

Теорема 2. *Бифуркационная диаграмма интегрального отображения $G \times K \times H$ содержится в объединении следующих (пересекающихся) подмножеств пространства $\mathbf{R}^3(g, k, h)$:*

1) *пары прямых*

$$\Gamma_+ : \begin{cases} k = (a+b)^2, \\ g = -ab(h - \dfrac{\lambda^2}{2}); \end{cases} \qquad \Gamma_- : \begin{cases} k = (a-b)^2, \\ g = ab(h - \dfrac{\lambda^2}{2}); \end{cases} \tag{5.4}$$

2) *поверхности*

$$\Gamma_1 : \begin{cases} k = -2\lambda^2(h - \dfrac{\lambda^2}{2} - 2s) - \lambda^4 + \dfrac{r^4}{4s^2}, \\ g = \dfrac{1}{2}p^2(h + \dfrac{\lambda^2}{2}) - \lambda^2 s^2 - \dfrac{r^4}{4s}, \qquad s \in \mathbf{R}\backslash\{0\}; \end{cases} \tag{5.5}$$

3) *поверхности*

$$\Gamma_2 : \begin{cases} k = p^2 + (h - \dfrac{\lambda^2}{2})^2 - 4(h - \dfrac{\lambda^2}{2})s + 3s^2 - \dfrac{p^4 - r^4}{4s^2}, \\ g = (h - \dfrac{\lambda^2}{2} - s)s^2 + \dfrac{p^4 - r^4}{4s}, \qquad s \in \mathbf{R}\backslash\{0\}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Доказательство. Пусть $\zeta \in \mathfrak{L}$. Подстановка значений $z_1 = z_2 = 0$ в (3.10), (3.11) дает $x_1x_2 = (a \pm b)^2$, $y_1y_2 = (a \mp b)^2$. С учетом этого из (3.12), (3.13) получаем соотношения, определяющие прямые (5.4).

Пусть $\zeta \in \mathfrak{N}\backslash\mathfrak{L}$. Возьмем в качестве параметра s в (5.5) постоянную частного интеграла (4.6), подставим выражения (3.12) вместо соответствующих констант и выполним замену (4.4). Оба уравнения (5.5) обратятся в тождества. Следовательно $J(\mathfrak{N}\backslash\mathfrak{L}) \subset \Gamma_1$.

Аналогично доказывается и включение $J(\mathfrak{O}\backslash\mathfrak{L}) \subset \Gamma_2$. В качестве параметра s в (5.6) следует взять постоянную частного интеграла (3.32) и выполнить подстановку (4.12) с $U_1 = U_2 = 0$. ■

Замечание 6. Отметим, что сдвиг энергии $\tilde{h} = h - \lambda^2/2$ сделает уравнения прямых $\Gamma_\pm$ и поверхности Γ_2 не зависящими от λ и совпадающими с соответствующими уравнениями случая $\lambda = 0$ [13]. Поверхность Γ_1 получается возмущением по λ двух гладких касающихся между собой листов бифуркационной диаграммы случая $\lambda = 0$: плоскости $k = 0$ и наклонного параболического цилиндра $(p^2h - 2g)^2 - r^4k = 0$. Таким образом, легко прослеживается эволюция классов Аппельрота [1] классической задачи С. В. Ковалевской в процессе двух последовательных обобщений — добавления второго поля и отличного от нуля гиростатического момента.

Уравнения, приведенные в теореме 2, удобны тем, что, зафиксировав значение энергии h, мы получим параметрические уравнения одномерного подмножества плоскости (g, k) (с определенным набором узловых точек), а именно, бифуркационной диаграммы Σ_h ограничения пары интегралов G, K на изоэнергетическую поверхность, которая всегда компактна. Следовательно, все бифуркационные диаграммы Σ_h лежат в ограниченной области плоскости (g, k) и легко строятся численно. Аналитическое исследование перестроек диаграмм Σ_h в пространстве существенных параметров $(b/a, \lambda, h)$ представляет собой весьма интересную, но технически сложную задачу. То, что такая задача в принципе разрешима, следует из того, что, во-первых, множество точек самопересечения и точек возврата кривых $\Gamma_{1,2}$ на плоскости (g, k) легко записывается и исследуется аналитически, и, во-вторых, значения интегралов на особых периодических решениях (3.18)–(3.21) параметризуют точки трансверсального пересечения $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, что, по крайней мере, дает возможность составления численного алгоритма эффективного вычисления узловых точек одномерного клеточного комплекса Σ_h. В свою очередь, случаи бифуркаций совокупности таких узловых точек несложно перечислить в зависимости от параметров, определяющих найденное семейство периодических решений.

Список литературы

[1] Аппельрот Г. Г., Не вполне симметричные тяжелые гироскопы, *Движение твердого тела вокруг неподвижной точки*, М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1940, с. 61–156.

[2] Богоявленский О. И., Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1984, т. 48, № 5, с. 883–938.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С., *Динамика твердого тела*, Ижевск: НИЦ РХД, 2001, 384 с.

[4] Зотьев Д. Б., Харламов М. П., Изоэнергетические многообразия и области возможности движения твердого тела в двойном поле сил, *Нелинейная динамика*, 2005, т. 1, № 1, с. 23–32.

[5] Фоменко А. Т., *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, М.: Изд-во МГУ, 1988, 413 с.

[6] Харламов М. П., Бифуркационная диаграмма обобщения 4-го класса Аппельрота, *Механика твердого тела*, Донецк: Изд-во ИПММ НАНУ, 2005, вып. 35, с. 38–48.

[7] Харламов М. П., Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле, *Механика твердого тела*, Донецк: Изд-во ИПММ НАНУ, 2004, вып. 34, с. 47–58.

[8] Харламов М. П., Обобщение 4-го класса Аппельрота: область существования движений и разделение переменных, *Нелинейная динамика*, 2006, т. 2, № 4, с. 453–472.

[9] Харламов М. П., Области существования критических движений обобщенного волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы, *Механика твердого тела*, Донецк: Изд-во ИПММ НАНУ, 2006, вып. 36, с. 13–22.

[10] Харламов М. П., Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле, *Механика твердого тела*, Донецк: Изд-во ИПММ НАНУ, 2002, вып. 32, с. 32–38.

[11] Харламов М. П., Савушкин А. Ю., Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской, *Укр. математ. вестник*, 2004, т. 1, № 4, с. 548–565.

[12] Bobenko A. I., Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M.A., The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions, *Commun. Math. Phys.*, 1989, vol. 122, № 2, pp. 321–354.

[13] Kharlamov M. P., Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields, *Regul. & Chaotic Dyn.*, 2005, vol. 10, № 4, pp. 381–398.

[14] Komarov I. V., A generalization of the Kovalevskaya top, *Phys. Letters*, 1987, vol. 123, № 1, pp. 14–15.

[15] Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A., Lax representation with a spectral parameter for the Kowalewski top and its generalizations, *Lett. Math. Phys.*, 1987, vol. 14, № 1, pp. 55–61.

[16] Yehia H., New integrable cases in the dynamics of rigid bodies, *Mech. Res. Commun.*, 1986, vol. 13, № 3, pp. 169–172.