Теоретико-групповые решения кубического уравнения Шредингера, порожденные алгебрами симметрии размерности три

К.К. Измайлова, А.П. Чупахин

Новосибирский государственный университет
Россия, Новосибирск, ул. Пирогова, 2

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Россия, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15

E-mails: k-iz@yandex.ru, chupakhin@hydro.nsc.ru

Получено 8 августа 2007 г.

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) имеет многочисленные приложения в математической физике (нелинейная оптика, теория волн и другие). Алгебра симметрии L_{12} и оптимальная система подалгебр для НУШ построена Ганьоном и Винтерницем (1989). Она является центральным расширением алгебры Галилея L_{11}, допускаемой уравнениями газовой динамики. На основе анализа универсальных инвариантов оптимальной системы подалгебр доказано, что трехмерные алгебры симметрии НУШ порождают 27 существенно различных подмоделей. В работе получен перечень инвариантных и частично инвариантных решений НУШ, отвечающих существенно трехмерным нелинейным структурам. Большинство этих решений является существенно новыми и не исследовались ранее. Их изучение является перспективным для таких приложений, как нелинейная теория волн, конденсат Бозе–Эйнштейна и др.

Цитата: К.К. Измайлова, А.П. Чупахин, Теоретико-групповые решения кубического уравнения Шредингера, порожденные алгебрами симметрии размерности три, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, №3, с. 349–362.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, алгебра Ли, инвариантное и частично инвариантное решения, фактор-система.

К. Izmaylova, A. Chupakhin

Group theoretical solutions of Schrödinger equation generated by three-dimensional symmetry algebras

Nonlinear Schrödinger equation (NSE) has many applications in mathematical physics (nonlinear optics, wave theory and so on). Gagnon and Winternitz have constructed symmetry algebra L_{12} and optimal system of subalgebras for NSE (1989). It's an extension of Galilei algebra L_{11} admitted gas dynamics equations. Its three-dimensional symmetry subalgebras generate 27 different submodels. List of all solutions corresponding to these algebras has been received in this paper. Most of this solutions have not investigate previously.

Citation: K. Izmaylova, A. Chupakhin, Group theoretical solutions of Schrödinger equation generated by three-dimensional symmetry algebras, *Rus. J. Nonlin. Dynamics*, 2007, Vol. 3, No. 3, pp. 349–362.

Keywords: Schrödinger equation, Lie algebra, invariant solution, partial invariant solution, factor system.

MSC 2000: 35Q55, 35C05, 58J70

1. Введение

Теоретико-групповые методы позволяют строить широкие классы точных решений дифференциальных уравнений произвольного вида, независимо от числа переменных, типа и пр. [1] Особенно эффективно их применение к дифференциальным уравнениям, описывающим математические модели механики континуума и физики.

Рассматривается нелинейное кубическое уравнение Шредингера (НУШ)

$$\imath\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi+|\psi|^2\psi=0, \tag{1.1}$$

где $\Delta=\partial_{xx}+\partial_{yy}+\partial_{zz}$, $\psi=\psi_1+\imath\psi_2$, $|\psi|=\sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2}$.

Оно имеет многочисленные приложения в математической физике (нелинейная оптика, теория волн, конденсат Бозе — Эйнштейна и другие). Особый интерес представляют многомерные решения уравнения (1.1), поскольку в этом случае оно не интегрируется методом обратной задачи рассеяния [2].

В работе построены все подмодели (фактор-уравнения) уравнения (1.1), отвечающие его трехмерным алгебрам симметрии. Для всех таких алгебр найдены универсальные инварианты и определен тип возможного теоретико-группового решения: инвариантное (9 существенно различных типов) или частично инвариантное (18 существенно различных). Тем самым показано, что существует большое число точных решений уравнения (1.1), описывающих существенно многомерные физические структуры, перспективные для дальнейшего изучения.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Трехмерные алгебры симметрии НУШ (1) порождают 27 существенно различных подмоделей. Среди них 9 инвариантных, из них 6— ранга один и 3 — ранга два; 18 частично инвариантных, из них 17 — ранга два и 1 — ранга три. Лишней, не инвариантной, функцией во всех частично инвариантных подмоделях является фаза Ф.*

Заметим, что отдельные подмодели для уравнения (1) рассматривались в работах [3-7].

2. Доказательство теоремы

Новые искомые функции: амплитуда A и фаза Φ вводятся следующим образом: $\psi=Ae^{\imath\Phi}$. После разделения мнимой и вещественной частей из (1.1) получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} -A\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}+\Delta A-A|\nabla\Phi|^2+A^3=0,\\[2mm] \dfrac{\partial A}{\partial t}+A\Delta\Phi+2(\nabla A,\nabla\Phi)=0.\end{cases} \tag{2.1}$$

В цилиндрических координатах $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z$ $(r\geq 0, 0\leq\varphi<2\pi)$ лапласиан $\Delta_C=\partial_{rr}+\frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r}\partial_r+\partial_{zz}$ и система (2.1) имеет вид:

$$\begin{cases} -A\Phi_t+\Delta_C A-A(\Phi_r^2+\dfrac{1}{r^2}\Phi_\varphi^2+\Phi_z^2)+A^3=0,\\[2mm] A_t+A\Delta_C\Phi+2(A_r\Phi_r+\dfrac{1}{r^2}\Phi_\varphi A_\varphi+A_z\Phi_z)=0.\end{cases} \tag{2.2}$$

Алгебра симметрии L_{12} для уравнения Шредингера (1.1), записанного в виде системы (2.1), имеет следующий базис [3]:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \partial_t,\\
&X_2 = \partial_x, X_3 = \partial_y, X_4 = \partial_z,\\
&X_5 = z\partial_y - y\partial_z, X_6 = x\partial_z - z\partial_x, X_7 = y\partial_x - x\partial_y,\\
&X_8 = 2t\partial_x + x\partial_\Phi, X_9 = 2t\partial_y + y\partial_\Phi,\\
&X_{10} = 2t\partial_z + z\partial_\Phi, X_{11} = \partial_\Phi, X_{12} = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - A\partial_A.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Построим подмодели уравнения Шредингера (1.1) или, что то же, фактор-уравнения эквивалентной ему системы (2.1), порожденные трехмерными подалгебрами алгебры симметрии L_{12}. Оптимальная система ΘL_3 построена в [1]. Она задает список классов, представителей трехмерных подалгебр алгебры L_{12} с точностью до внутренних автоморфизмов. Этим представителям отвечают существенно различные точные решения уравнения (1), отвечающие соответствующим подалгебрам симметрии. Мы приводим оптимальную систему ΘL_3, оснащенную инвариантами и упорядоченную по типу решений, порождаемых ее представителями (инвариантное или частично инвариантное).

Напомним, что рангом подмодели называют число инвариантных независимых переменных. Факторуравнение есть результат подстановки представления теоретико-группового решения в исходную систему уравнений. Для инвариантных подмоделей все искомые функции имеют инвариантное представление. Для частично инвариантных это не так: инвариантов алгебры не хватает для построения такого представления, и некоторые искомые функции остаются произвольными. Их число называется дефектом частично инвариантной подмодели. При подстановке такого представления в искомые уравнения они распадаются на две подсистемы: инвариантную для инвариантных функций и переопределенную систему для неинвариантных функций. Последнюю нужно приводить в инволюцию, получая все условия совместности. Этот процесс для конкретных уравнений оказывается весьма сложным и громоздким. Вместе с тем частично инвариантные решения обладают большим произволом по сравнению с инвариантными.

Результаты приведены в таблице 1.

В первом столбце таблицы 1 приведен порядковый номер k подалгебры $L_{3,k}$ (нумерация совпадает с [1]), во втором — базис подалгебры в терминах операторов (2.3) (при этом оператор X_k обозначается номером k) и условия на константы. В третьем столбце таблицы указана система координат, в которой посчитаны инварианты, перечисленные в четвертом столбце. При этом введены обозначения: D — декартова система координат, C — цилиндрическая относительно оси z. Сокращения ИР(n) и ЧИР(n) означают инвариантные и частично инвариантные решения ранга n. Все частично инвариантные решения имеют дефект 1, лишней функцией при этом является фаза Φ.

Таблица 1

№	Базис	С. К.	Инварианты
		ИР(1)	
6	$10 + a1, 2, 3,\ a > 0$	D	$az - t^2, a^2\Phi - azt + \frac{2}{3}t^3, A$
50	$10 + a1 + b7, 2, 3,\ a > 0,\ b > 0$	-//-	-//-
7	$10, 2, 3$	-//-	$t, z^2 - 4t\Phi, A$

Продолжение таблицы 1

№	Базис	С. К.	Инварианты
45	$7+a10, 2, 3,\ a>0$	-//-	-//-
8	$1, 2, 3$	-//-	z, A, Φ
9	$1+a11, 2, 3,\ a\neq 0$	-//-	$at-\Phi, z, A$
47	$7+a1+b11, 2, 3,\ a\neq 0,$ $b\geq 0$	-//-	$bt-a\Phi, z, A$
23	$8+a2, 9+b3, 10,\ a>0,$ $a\neq b\neq 0$	-//-	$t, 2tx^2(2t+b)+2ty^2(2t+a)+(2t+a)(2t+$ $+b)(z^2-4t\Phi), A$
24	$8+a2, 9, 10,\ a>0$	-//-	$t, (2t+a)(z^2+y^2-4t\Phi)+2tx^2, A$
25	$8, 9+a3, 4,\ a>0$	-//-	$t, (2t+a)(x^2-4t\Phi)+2ty^2, A$
27	$2, 3, 4$	-//-	t, Φ, A
49	$7+a4, 2, 3,\ a>0$	-//-	-//-
62	$12+b11, 2, 10,\ b\in\mathbb{R}$	-//-	$\frac{y}{\sqrt{t}}, A\sqrt{t}, \frac{z^2}{t}+2b\ln t-4\Phi$
4	$7+a11, 4, 1,\ a\geq 0$	С	$r, a\varphi+\Phi, A$
5	$7+a11, 4, 1+b11,\ a\geq 0,$ $b\neq 0$	-//-	$r, a\varphi+bt+\Phi, A$
21	$8, 9, 10$	-//-	$t, r^2+z^2-4t\Phi, A$
41	$7+a10, 8, 9,\ a>0$	-//-	-//-
22	$8, 9, 10+a4,\ a>0$	-//-	$t, (2t+a)(r^2-4t\Phi)+2tz^2, A$
42	$10+a4+b7, 8, 9\ a\neq 0,$ $b>0$	-//-	-//-
26	$8, 9, 4$	-//-	$t, r^2-4t\Phi, A$
44	$7+a4, 8, 9,\ a>0$	-//-	-//-
54	$12+b11, 10, 7+a11,\ a\geq 0,$ $b\in\mathbb{R}$	-//-	$\frac{r}{\sqrt{t}}, A\sqrt{t}, 4(a\varphi+\Phi)+2b\ln t-\frac{z^2}{t}$
55	$12+b11, 1, 7+a11,\ a\geq 0,$ $b\in\mathbb{R}$	-//-	$\frac{z}{r}, rA, b\ln r-a\varphi-\Phi$
56	$12+b11, 4, 7+a11,\ a\geq 0,$ $b\in\mathbb{R}$	-//-	$\frac{r}{\sqrt{t}}, A\sqrt{t}, b\ln\sqrt{t}-a\varphi-\Phi$
60	$12+b11, 8, 9,\ b\in\mathbb{R}$	-//-	$\frac{z}{\sqrt{t}}, A\sqrt{t}, \frac{r^2}{t}+2b\ln t-4\Phi$
65	$12+a7+b11, 8, 9,\ a>0,$ $b\in\mathbb{R}$	-//-	-//-
61	$12+b11, 2, 3,\ b\in\mathbb{R}$	-//-	$\frac{z}{\sqrt{t}}, A\sqrt{t}, b\ln\sqrt{t}-\Phi$
66	$12+a7+b11, 2, 3\ a>0,$ $b\in\mathbb{R}$	-//-	-//-

Продолжение таблицы 1

№	Базис	С. К.	Инварианты
63	$12+a7+b11, 1, 4,\ a>0,\ b\in\mathbb{R}$	-//-	$a\ln r+\varphi, rA, \Phi-b\ln r$
64	$12+b11, 1, 4,\ b\in\mathbb{R}$	-//-	$\varphi, rA, \Phi-b\ln r$
		ИР(2)	
46	$2, 3, 7$	D	t, z, A, Φ
43	$7, 8, 9$	C	$t, r^2-4t\Phi, z, A$
52	$5, 6, 7$	-//-	t, r^2+z^2, A, Φ
		ЧИР(2)	
1	$8, 9+a3, 11,\ a>0$	D	t, z, A
3	$8, 9, 11$	-//-	-//-
17	$2, 3, 11$	-//-	-//-
30	$8+a3, 9-a2+b3, 11,\ a>0, b\neq 0$	-//-	-//-
31	$8+a3, 9-a2, 11,\ a>0$	-//-	-//-
35	$9, 3+a2, 11,\ a>0$	-//-	-//-
48	$7+a11, 2, 3,\ a>0$	-//-	-//-
51	$7+a11, 8, 9,\ a>0$	-//-	-//-
15	$10, 2, 11$	D	t, y, A
38	$10+a2, 4, 11,\ a>0$	-//-	-//-
2	$8+b3, 9+b2+c3+a4, 11,\ a>0, b\geq 0, c\in\mathbb{R}$	-//-	$t, a(bx-2ty)-z(b^2-4t^2-2tc), A$
16	$10+a3, 2, 11,\ a>0$	-//-	$2ty-az, t, A$
18	$10+a1, 3, 11,\ a>0$	-//-	t^2-az, x, A
36	$10+a1+b9, 3, 11,\ a>0\ b>0$	-//-	-//-
19	$1, 4, 11$	-//-	x, y, A
34	$10+a1, 4, 11,\ a>0$	-//-	-//-
28	$8, 9+a2+c3+b4, 11,\ a\geq 0, b>0, c\in\mathbb{R}$	-//-	$t, by-(2t+c)z, A$
29	$8+a3, 9+b2+c3+d4, 11,\ a\neq b, a>0, b, c\in\mathbb{R}, d>0$	-//-	$t, d(ax-2ty)+(4t^2+2tc-ab)z, A$
37	$10+a2, 4+b3, 11,\ a>0\ b>0$	-//-	$t, b(az-2tx)-ay, A$
12	$7, 10, 11$	C	t, r, A

Продолжение таблицы 1

№	Базис	С. К.	Инварианты
13	$7, 4, 11$	-//-	-//-
40	$7 + a4, 10, 11,\ a > 0$	-//-	-//-
10	$7, 10 + a1, 11,\ a > 0$	-//-	$r, t^2 - az, A$
11	$7, 1, 11$	-//-	r, z, A
14	$7 + a1, 4, 11,\ a > 0$	-//-	$r, t + a\varphi, A$
32	$7 + a10 + b1, 4, 11,\ a > 0,$ $b \geq 0$	-//-	-//-
20	$7 + a4, 1, 11,\ a > 0$	-//-	$r, a\varphi + z, A$
39	$7 + b4, 10 + a1, 11,\ a > 0$ $b > 0$	-//-	$-a(b\varphi - z) + t^2, r, A$
53	$7, 11, 12$	-//-	$\frac{z}{\sqrt{t}}, \frac{r}{\sqrt{t}}, A\sqrt{t}$
57	$12 + a7, 10, 11,\ a \geq 0$	-//-	$\frac{r}{\sqrt{t}}, A\sqrt{t}, a \ln \sqrt{t} + \varphi$
59	$12 + a7, 4, 11,\ a \geq 0$	-//-	-//-
58	$12 + a7, 1, 11,\ a \geq 0$	-//-	$\frac{z}{r}, rA, a \ln r + \varphi$
ЧИР(3)			
33	$10, 4, 11$	D	t, x, y, A

Мы видим, что некоторые подалгебры имеют совпадающие инварианты. Это так называемый эффект дублирования [8].

3. Фактор-системы для каждого типа решений

Выпишем существенно различные фактор-системы. В скобках указываются подмодели, эквивалентные данной. Некоторые из этих систем допускают понижение порядка и интегрирование, например $L_{3,7}, L_{3,26}, L_{3,27}$. Мы не делаем этого в данной работе, поскольку её целью является описание всех теоретико-групповых решений заданного вида. Исследованию таких решений будут посвящены специальные работы.

3.1. Инвариантные решения. Ранг 1

1) Фактор-система:

$$\left\{ v' = \frac{c}{u^2}, u'' \quad = k_1 b\lambda u - k_2 a u + k_3 \frac{c^2}{u^3} - u^3, \right. \tag{3.1}$$

где c — некоторая константа.

а) Подмодели $L_{3,6}$ ($L_{3,50}$) соответствует фактор-система (3.1) при $k_1 = k_3 = 1, k_2 = 0$. Представление решения:

$$A = u(\lambda), \Phi = btz - \frac{2}{3} b^2 t^3 + v(\lambda), \text{ где } b = \frac{1}{a}, \lambda = z - bt^2.$$

б) Подмодели $L_{3,8}$ соответствует фактор-система (3.1) при $k_3 = 1, k_1 = k_2 = 0$. Представление решения:

$$A = u(z), \Phi = v(z).$$

в) Подмодели $L_{3,9}$ ($L_{3,47}$) соответствует фактор-система (3.1) при $k_2 = k_3 = 1, k_1 = 0$. Представление решения:

$$A = u(z), \Phi = at + v(z).$$

2) Фактор-система:

$$\begin{cases} v' = u^2, \\ u' + k_1\dfrac{u}{2t} + k_2\dfrac{u}{2t+a} + k_3\dfrac{u}{2t+b} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

а) Подмодели $L_{3,7}$ ($L_{3,45}$) соответствует фактор-система (3.2) при $k_1 = 1, k_2 = k_3 = 0$. Представление решения:

$$A = u(t), \Phi = \frac{z^2}{4t} + v(t).$$

б) Подмодели $L_{3,23}$ соответствует фактор-система (3.2) при $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Представление решения:

$$A = u(t), \Phi = \frac{x^2}{2(2t+a)} + \frac{y^2}{2(2t+b)} + \frac{z^2}{4t} + v(t).$$

в) Подмодели $L_{3,24}$ соответствует фактор-система (3.2) при $k_1 = k_2 = 1, k_3 = 0$. Представление решения:

$$A = u(t), \Phi = \frac{x^2}{2(2t+a)} + \frac{y^2+z^2}{4t} + v(t).$$

г) Подмодели $L_{3,25}$ соответствует фактор-система (3.2) при $k_1 = k_2 = 1, k_3 = 0$. Представление решения:

$$A = u(t), \Phi = \frac{x^2}{4t} + \frac{y^2}{2(2t+a)} + v(t).$$

д) Подмодели $L_{3,27}$ ($L_{3,49}$) соответствует фактор-система (3.2) при $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Представление решения:

$$A = u(t), \Phi = v(t).$$

е) Подмодели $L_{3,21}$ ($L_{3,41}$) соответствует фактор-система (3.2) при $k_1 = 3, k_2 = k_3 = 0$. Представление решения:

$$A = u(t), \Phi = \frac{r^2+z^2}{4t} + v(t).$$

ж) Подмодели $L_{3,22}$ ($L_{3,42}$) соответствует фактор-система (3.2) при $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 0$. Представление решения:

$$A = u(t), \Phi = \frac{r^2}{4t} + \frac{z^2}{2(2t+a)} + v(t).$$

з) Подмодели $L_{3,26}$ ($L_{3,44}$) соответствует фактор-система (3.2) при $k_1 = 2, k_2 = k_3 = 0$. Представление решения:

$$A = u(t), \Phi = \frac{r^2}{4t} + v(t).$$

3) Фактор-система:

$$
\begin{cases}
ru^2v' = c, \\
u'' = \dfrac{c^2}{r^2u^3} + \dfrac{a^2}{r^2}u - \dfrac{1}{r}u' - u^3 + k_1bu,
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

где c — некоторая константа.

a) Подмодели $L_{3,4}$ соответствует фактор-система (3.3) при $k_1 = 0$. Представление решения:

$$A = u(r), \Phi = v(r) - a\varphi.$$

b) Подмодели $L_{3,5}$ соответствует фактор-система (3.3) при $k_1 = 1$. Представление решения:

$$A = u(r), \Phi = v(r) - a\varphi + bt.$$

4) Фактор-система:

$$
\begin{cases}
u'' + k_1\dfrac{u'}{\lambda} + u\left(\dfrac{\lambda}{2}v' - \dfrac{b}{2} - v'^2 - k_2\dfrac{a^2}{\lambda^2}\right) + u^3 = 0, \\
uv'' + 2u'v' + k_3\dfrac{1}{\lambda}uv' - k_4\dfrac{\lambda}{2}u' - k_5\dfrac{u}{2} = 0.
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

а) Подмодели $L_{3,56}$ соответствует фактор-система (3.4) при $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1$. Представление решения:

$$A = \frac{u(\lambda)}{\sqrt{t}}, \Phi = \frac{b\ln t}{2} - a\varphi + v(\lambda), \text{ где } \lambda = \frac{r}{\sqrt{t}}.$$

б) Подмодели $L_{3,62}$ соответствует фактор-система (3.4) при $k_4 = 1, k_1 = k_2 = k_3 = k_5 = 0$. Представление решения:

$$A = \frac{u(\lambda)}{\sqrt{t}}, \Phi = \frac{z^2}{4t} + \frac{b\ln t}{2} + v(\lambda), \text{ где } \lambda = \frac{y}{\sqrt{t}}.$$

в) Подмодели $L_{3,54}$ соответствует фактор-система (3.4) при $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1, k_5 = 0$. Представление решения:

$$A = \frac{u(\lambda)}{\sqrt{t}}, \Phi = \frac{z^2}{4t} - \frac{b\ln t}{2} - a\varphi + v(\lambda), \text{ где } \lambda = \frac{r}{\sqrt{t}}.$$

г) Подмодели $L_{3,60}$ ($L_{3,65}$) соответствует фактор-система (3.4) при $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$. Представление решения:

$$A = \frac{u(\lambda)}{\sqrt{t}}, \Phi = \frac{r^2}{4t} + \frac{b\ln t}{2} + v(\lambda), \text{ где } \lambda = \frac{z}{\sqrt{t}}.$$

д) Подмодели $L_{3,61}$ ($L_{3,66}$) соответствует фактор-система (3.4) при $k_4 = k_5 = 1, k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Представление решения:

$$A = \frac{u(\lambda)}{\sqrt{t}}, \Phi = \frac{b\ln t}{2} + v(\lambda), \text{ где } \lambda = \frac{z}{\sqrt{t}}.$$

5) Фактор-система:

$$\begin{cases} (k_1a^2+1)u''-k_12au'-u(1+b^2+2abv'+(k_1a^2+1)v'^2)+u^3=0, \\ (k_1a^2+1)uv''-2bu-k_12auv'+k_12abu'+2(k_1a^2+1)u'v'=0. \end{cases} \tag{3.5}$$

а) Подмодели $L_{3,63}$ соответствует фактор-система (3.5) при $k_1 = 1$. Представление решения:

$$A=\frac{u(\lambda)}{r}, \Phi = b\ln r + v(\lambda), \text{ где } \lambda = a\ln r+\varphi.$$

б) Подмодели $L_{3,64}$ соответствует фактор-система (3.5) при $k_1 = 0$. Представление решения:

$$A=\frac{u(\varphi)}{r}, \Phi = b\ln r + v(\varphi).$$

6) Подмодель $L_{3,55}$. Представление решения:

$$A=\frac{u(\lambda)}{r}, \Phi = b\ln r - a\varphi + v(\lambda), \text{ где } \lambda = \frac{z}{r}.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} (\lambda^2+1)u''+3\lambda u'+u(1-b^2-a^2+2b\lambda v'-(\lambda^2+1)v'^2)+u^3=0, \\ \big(u^2v'(\lambda^2+1)\big)'-2b(\lambda u)'+\lambda uv'=0. \end{cases}$$

3.2. Ранг 2

7) Подмодель $L_{3,46}$. Представление решения:

$$A=u(t,z), \Phi=v(t,z).$$

Фактор-система:

$$\left\{ -uv_t+u_{zz}-uv_z^2+u^3=0, \quad u_t+uv_{zz}+2u_zv_z=0. \right.$$

8) Подмодель $L_{3,43}$. Представление решения:

$$A=u(t,z), \Phi=\frac{r^2}{4t}+v(t,z).$$

Фактор-система:

$$\left\{ \frac{u_{zz}+u^3}{u}=v_t+v_z^2, \quad u_t+u(\frac{1}{t}+v_{zz})+2u_zv_z=0. \right.$$

9) Подмодель $L_{3,52}$. Представление решения:

$$A=u(t,\lambda), \Phi=v(t,\lambda), \text{ где } \lambda=r^2+z^2.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} -uv_t+6u_\lambda+2\lambda u_{\lambda\lambda}-4\lambda uv_\lambda^2+u^3=0, \\ u_t+6uv_\lambda+2\lambda uv_{\lambda\lambda}+8\lambda u_\lambda v_\lambda=0. \end{cases}$$

3.3. Частично инвариантные решения. Ранг 2

1) Подмодель $L_{3,1}$ ($L_{3,3}$, $L_{3,17}$, $L_{3,30}$, $L_{3,31}$, $L_{3,35}$, $L_{3,48}$). Представление решения:

$$A = u(t,z), \Phi = v(t,x,y,z).$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{zz}+u^3}{u} = v_t + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \\ u_t + u(v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}) + 2u_z v_z = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Система (10) является переопределенной системой двух уравнений для функции

$$v = v(t,x,y,z).$$

Условия совместимости будут уравнениями на инвариантную функцию

$$u = u(t,z).$$

Их получение представляется весьма нетривиальной задачей. Инвариантная система в этом случае имеет вид

$$u_x = u_y = 0.$$

Аналогично устроены и все остальные фактор-уравнения, описывающие ЧИР.

Подмодель $L_{3,15}$ ($L_{3,38}$). Представление решения:

$$A = u(t,y), \Phi = v(t,x,y,z).$$

Фактор-система эквивалентна факторсистеме подмодели $L_{3,1}$.

2) Подмодель $L_{3,2}$. Представление решения:

$$A = u(t,\lambda), \Phi = v(t,\lambda,y,z), \text{ где } \lambda = a(bx-2ty) - (b^2-4t^2-2ct)z.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{(a^2b^2+4a^2t^2+(b^2-4t^2-2ct)^2)u_{\lambda\lambda}+u^3}{u} = v_t + \\ \qquad + 2\left((c+4t)z-ay\right)v_\lambda + a^2b^2v_\lambda^2 + (v_y-2atv_\lambda)^2 + (v_z+(b^2-4t^2-2ct)v_\lambda)^2, \\ u_t + 2\left((c+4t)z-ay\right)u_\lambda + u(v_{\lambda\lambda}(a^2b^2+4a^2t^2+(b^2-4t^2-2ct)^2)+ \\ \qquad + v_{yy}+v_{zz}+2atvy\lambda+(b^2-4t^2-2ct)v_{z\lambda}) + a^2b^2u_\lambda v_\lambda - 2atu_\lambda(v_y-2atv_\lambda)+ \\ \qquad\quad + (b^2-4t^2-2ct)u_\lambda(v_z+(b^2-4t^2-2ct)v_\lambda) = 0. \end{cases}$$

3) Подмодель $L_{3,16}$. Представление решения:

$$A = u(t,\lambda), \Phi = v(t,x,y,\lambda), \text{ где } \lambda = 2ty - az.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{(4t^2+a^2)u_{\lambda\lambda}+u^3}{u} = v_t + 2yv_\lambda + v_x^2 + 4t^2v_\lambda^2 + (v_z-av_\lambda)^2, \\ u_t + 2yu_\lambda + u(v_{xx}+4t^2v_{\lambda\lambda}+v_{zz}-2av_{z\lambda}+a^2v_{\lambda\lambda}) + u_\lambda v_\lambda(4t^2-a+a^2) = 0. \end{cases}$$

4) Подмодель $L_{3,18}$ ($L_{3,36}$). Представление решения:

$$A = u(x,\lambda), \Phi = v(t,x,y,\lambda), \text{ где } \lambda = t^2 - az.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{xx} + a^2 u_{\lambda\lambda} + u^3}{u} = v_t + 2tv_\lambda + v_x^2 + v_y^2 + a^2 v_\lambda^2, \\ t(u^2)_\lambda + (u^2 v_x)_x + (u^2 v_y)_y + (u^2 v_\lambda)_\lambda = 0. \end{cases}$$

5) Подмодель $L_{3,19}$ ($L_{3,34}$). Представление решения:

$$A = u(x,y), \Phi = v(t,x,y,z).$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{xx} + u_{yy} + u^3}{u} = v_t + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \\ (u^2 v_x)_x + (u^2 v_y)_y + (u^2 v_z)_z = 0. \end{cases}$$

6) Подмодель $L_{3,28}$. Представление решения:

$$A = u(t,\lambda), \Phi = v(t,x,\lambda,z), \text{ где } \lambda = by - (2t+c)z.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{(b^2 + (2t+c)^2)u_{\lambda\lambda} + u^3}{u} = v_t - 2zv_\lambda + v_x^2 + b^2 v_\lambda^2 + (v_z - (2t+c)v_\lambda)^2, \\ u_t - 2zu_\lambda + u(v_{xx} + b^2 v_{\lambda\lambda} + v_{zz} - 2(2t+c)v_{\lambda z} + (2t+c)^2 v_{\lambda\lambda}) + \\ \qquad + 2b^2 u_\lambda v_\lambda - 2(2t+c)u_\lambda(v_z - (2t+c)v_\lambda) = 0. \end{cases}$$

7) Подмодель $L_{3,29}$. Представление решения:

$$A = u(t,\lambda), \Phi = v(t,\lambda,y,z), \text{ где } \lambda = d(ax - 2ty) + (4t^2 + 2ct - ab)z.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{(a^2d^2 + 4d^2t^2 + (4t^2 + 2ct - ab)^2)u_{\lambda\lambda} + u^3}{u} = \\ \quad = v_t + 2(4t^2 + 2ct - ab)v_\lambda + (a^2d^2 + 4t^2d^2 + (4t^2 + 2ct - ab)^2)v_\lambda^2 - \\ \qquad - 4tdv_y v_\lambda + 2(4t^2 + 2ct - ab)v_z v_\lambda, \\ u_t + 2(4t^2 + 2ct - ab)u_\lambda + u(v_{\lambda\lambda}(a^2d^2 + 4d^2t^2 + (4t^2 + 2ct - ab)^2) + \\ \quad + v_{yy} + v_{zz} - 4dtv_{y\lambda} + 2(4t^2 + 2ct - ab)v_{z\lambda}) + \\ \qquad + 2((a^2d^2 + 4d^2t^2 + (4t^2 + 2ct - ab)^2)u_\lambda v_\lambda - 2dtu_\lambda v_y + (4t^2 + 2ct - ab)u_\lambda v_z) = 0. \end{cases}$$

8) Подмодель $L_{3,37}$. Представление решения:

$$A = u(t,\lambda), \Phi = v(t,x,y,\lambda), \text{ где } \lambda = 2btx + ay - abz.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{(4b^2t^2+a^2+a^2b^2)u_{\lambda\lambda}+u^3}{u} = v_t + 2bxv_\lambda + v_x^2 + v_y^2 + \\ \quad + (4b^2t^2+a^2+a^2b^2)v_\lambda^2 + 4btv_xv_\lambda + 2av_yv_\lambda, \\ u_t + 2bxu_\lambda + u(v_{xx}+v_{yy}+(4b^2t^2+a^2+a^2b^2)v_{\lambda\lambda} + \\ \quad + 4btv_{x\lambda} + 2av_{y\lambda}) + 2((4b^2t^2+a^2+a^2b^2)u_\lambda v_\lambda + 2btu_\lambda v_x + au_\lambda v_y) = 0. \end{cases}$$

9) Подмодель $L_{3,12}$ ($L_{3,13}$, $L_{3,40}$). Представление решения:

$$A = u(t,r), \Phi = v(t,r,\varphi,z).$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{rr}+\dfrac{u_r}{r}+u^3}{u} = v_t + v_r^2 + \dfrac{1}{r^2}v_\varphi^2 + v_z^2, \\ u_t + u(v_{rr} + \dfrac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} + \dfrac{1}{r}v_r + v_{zz}) + 2u_rv_r = 0. \end{cases}$$

10) Подмодель $L_{3,10}$. Представление решения:

$$A = u(r,\lambda), \Phi = v(t,r,\varphi,\lambda), \text{ где } \lambda = az - t^2.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{rr}+\dfrac{u_r}{r}+a^2u_{\lambda\lambda}+u^3}{u} = v_t - 2tv_\lambda + v_r^2 + \dfrac{1}{r^2}v_\varphi^2 + a^2v_\lambda^2, \\ -2tu_\lambda + u(v_{rr} + \dfrac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} + \dfrac{1}{r}v_r + a^2v_{\lambda\lambda}) + 2(u_rv_r + a^2u_\lambda v_\lambda) = 0. \end{cases}$$

11) Подмодель $L_{3,11}$. Представление решения:

$$A = u(r,z), \Phi = v(t,r,\varphi,z).$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{rr}+\dfrac{u_r}{r}+u_{zz}+u^3}{u} = v_t + v_r^2 + \dfrac{1}{r^2}v_\varphi^2 + v_z^2, \\ u(v_{rr} + \dfrac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} + \dfrac{1}{r}v_r + v_{zz}) + 2(u_rv_r + u_zv_z) = 0. \end{cases}$$

12) Подмодель $L_{3,14}$ ($L_{3,32}$). Представление решения:

$$A = u(r,\lambda), \Phi = v(t,r,\lambda,z), \text{ где } \lambda = a\varphi + t.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{rr}+\dfrac{u_r}{r}+\dfrac{a^2}{r^2}u_{\lambda\lambda}+u^3}{u} = v_t + v_\lambda + v_r^2 + \dfrac{a^2}{r^2}v_\lambda^2 + v_z^2, \\ u_\lambda + u(v_{rr} + \dfrac{a^2}{r^2}v_{\lambda\lambda} + \dfrac{1}{r}v_r + v_{zz}) + 2(u_rv_r + \dfrac{a^2}{r^2}u_\lambda v_\lambda) = 0. \end{cases}$$

13) Подмодель $L_{3,20}$. Представление решения:

$$A = u(r,\lambda), \Phi = v(t,r,\varphi,\lambda),\ \text{где}\ \lambda = \varphi + az.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{rr} + \frac{u_r}{r} + (\frac{1}{r^2} + a^2)u_{\lambda\lambda} + u^3}{u} = v_t + v_r^2 + \dfrac{1}{r^2}(v_\varphi + v_\lambda)^2 + a^2 v_\lambda^2, \\ u(v_{rr} + \dfrac{1}{r^2}(v_{\varphi\varphi} + 2v_{\varphi\lambda} + v_{\lambda\lambda}) + \frac{1}{r}v_r + a^2 v_{\lambda\lambda}) + 2(u_r v_r + \dfrac{1}{r^2}(v_\varphi + v_\lambda)u_\lambda + a^2 u_\lambda v_\lambda) = 0. \end{cases}$$

14) Подмодель $L_{3,39}$. Представление решения:

$$A = u(r,\lambda), \Phi = v(t,r,\varphi,\lambda),\ \text{где}\ \lambda = t^2 - ab\varphi - az.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{rr} + \frac{u_r}{r} + a^2(\frac{b^2}{r^2} + 1)u_{\lambda\lambda} + u^3}{u} = v_t + 2tv_\lambda + v_r^2 + \dfrac{1}{r^2}(v_\varphi - abv_\lambda)^2 + a^2 v_\lambda^2, \\ 2tu_\lambda + u(v_{rr} + \dfrac{1}{r^2}(v_{\varphi\varphi} - 2abv_{\varphi\lambda} + a^2b^2v_{\lambda\lambda}) + \frac{1}{r}v_r + a^2 v_{\lambda\lambda}) + \\ \quad + 2(u_r v_r - \dfrac{ab}{r^2}(v_\varphi - abv_\lambda)u_\lambda + a^2 u_\lambda v_\lambda) = 0. \end{cases}$$

15) Подмодель $L_{3,53}$. Представление решения:

$$A = \frac{u(\lambda,\mu)}{\sqrt{t}}, \Phi = v(t,\lambda,\varphi,\mu),\ \text{где}\ \lambda = \frac{r}{\sqrt{t}}, \mu = \frac{z}{\sqrt{t}}.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{\lambda\lambda} + \frac{u_\lambda}{\lambda} + u_{\mu\mu} + u^3}{u} = tv_t - \dfrac{\lambda}{2}v_\lambda - \dfrac{\mu}{2}v_\mu + v_\lambda^2 + \dfrac{1}{\lambda^2}v_\varphi^2 + v_\mu^2, \\ -u - \lambda u_\lambda - \mu u_\mu + 2u(v_{\lambda\lambda} + \dfrac{1}{\lambda^2}v_{\varphi\varphi} + \dfrac{1}{\lambda}v_\lambda + v_{\mu\mu}) + 4(u_\lambda v_\lambda + u_\mu v_\mu) = 0. \end{cases}$$

16) Подмодель $L_{3,57}$ ($L_{3,59}$). Представление решения:

$$A = \frac{u(\lambda,\mu)}{\sqrt{t}}, \Phi = v(t,\lambda,\mu,z),\ \text{где}\ \lambda = \frac{r}{\sqrt{t}}, \mu = a\ln\sqrt{t} + \varphi.$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{\lambda\lambda} + \frac{u_{\mu\mu}}{\lambda^2} + \frac{u_\lambda}{\lambda} + u^3}{u} = tv_t - \dfrac{\lambda}{2}v_\lambda + \dfrac{a}{2}v_\mu + v_\lambda^2 + \dfrac{1}{\lambda^2}v_\mu^2 + v_z^2, \\ -\dfrac{u}{2} - \dfrac{\lambda u_\lambda}{2} + u(v_{\lambda\lambda} + \dfrac{1}{\lambda^2}v_{\mu\mu} + \dfrac{1}{\lambda}v_\lambda + v_{zz}) + 2(u_\lambda v_\lambda + \dfrac{u_\mu v_\mu}{\lambda^2}) = 0. \end{cases}$$

17) Подмодель $L_{3,58}$. Представление решения:

$$A = \frac{u(\lambda,\mu)}{r}, \Phi = v(t,r,\lambda,\mu),\ \text{где}\ \lambda = \frac{z}{r}, \mu = a\ln r + \varphi.$$

3.4. Ранг 3

18) Подмодель $L_{3,33}$. Представление решения:

$$A = u(t, x, y), \Phi = v(t, x, y, z).$$

Фактор-система:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{xx} + u_{yy} + u^3}{u} = v_t + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \\ u_t + u(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) + 2(u_x v_x + u_y v_y) = 0. \end{cases}$$

Как и для ЧИР ранга 2, уравнения представляют собой переопределенную систему уравненй для функции v. Её необходимо приводить в инволюцию.

Таким образом, число существенно различных подмоделей, порожденных трехмерными алгебрами симметрии НУШ, равно 27. Среди них 9 инвариантных, из них 6 — ранга один и 3 — ранга два, 18 частично инвариантных, из них 17 — ранга два и 1 — ранга три. Вопрос о редукции последних должен решаться при анализе фактор-системы.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов: РФФИ № 05-01-00080, Программы поддержки ведущих научных школ № НШ-5245.2006.1, Интеграционного проекта СО РАН № 2.15.

Список литературы

[1] Овсянников Л. В., *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М.: Наука, 1978.

[2] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., *Теория солитонов; Метод обратной задачи*, М.: Наука, 1980.

[3] Gagnon L. and Winternitz P., Lie symmetries of f generalised non-linear Schrodinger equation: I. The symmetry group and its subgroups, *J. Phys. A*, 1988, vol. 21, pp. 1493–1511.

[4] Gagnon L. and Winternitz P., Lie symmetries of f generalised non-linear Schrodinger equation: II. Exact solutions, *J. Phys. A*, 1988, vol. 22, pp. 469–497.

[5] Gagnon L. and Winternitz P., Exact solutions of the cubic and quintic nonlinear Schrodinger equation for a cylindrical geometry, *Physical Review A*, 1989, vol. 39, pp. 296–306.

[6] Gagnon L. and Winternitz P., Lie symmetries of f generalised non-linear Schrodinger equation: I. The symmetry group and its subgroups, *J. Phys. A*, 1988, vol. 24, pp. 1493–1511.

[7] Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. В., *Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики*, Киев: Наук. думка, 1989, 336 стр.

[8] Чупахин А. П., Небарохронные подмодели типов $(1, 2)$ и $(1, 1)$ уравнений газовой динамики, Новосибирск, 1999. (Препр. РАН Сиб. отделение. Институт гидродинамики; с. 1–99.)