

# Динамика трех вихрей в возмущенных устойчивых равносторонней и коллинеарной конфигурациях

А. И. Гудименко

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН  
690041, Россия, Владивосток, ул. Балтийская, 43  
E-mail: algud@poi.dvo.ru

Получено 20 ноября 2007 г.

Изучается динамика возмущенных устойчивых равносторонней и коллинеарной конфигураций трех точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости. Получена асимптотика этой динамики к невозмущенной. Показано, что в первом приближении в системе координат, где вихри в отсутствие возмущения покоились, они вращаются вокруг их невозмущенного положения по эллиптическим орбитам. Вычислена угловая скорость этого вращения. Показано, что эксцентриситеты у всех орбит в каждой конфигурации совпадают. Вычислено отношение длин больших осей орбит двух произвольных вихрей. В случае равносторонней конфигурации это отношение совпадает с отношением обратных интенсивностей соответствующих вихрей. Вычислен угол между большими осями орбит двух произвольных вихрей. В случае равносторонней конфигурации он составляет  $\pm 120$  градусов.

**Цитата:** А. И. Гудименко, Динамика трех вихрей в возмущенных устойчивых равносторонней и коллинеарной конфигурациях, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, № 4, с. 379–391.

Ключевые слова: точечные вихри, интегрируемая динамика, теория возмущений

A. I. Gudimenko

## Dynamics of perturbed equilateral and collinear configurations of three point vortices

Dynamics of perturbed stable equilateral and collinear configurations of three point vortices in an incompressible ideal fluid is studied. The asymptotics of the perturbed motion to the unperturbed one is obtained. It is shown that in the first approximation in a appropriate coordinate system the vortices rotate about their undisturbed positions in elliptical orbits. The velocity of the rotation is calculated. It is shown that the eccentricities of the orbits are coincide. The ratio of major axes of any two orbits is calculated. In case of equilateral configuration this ratio is equal to the ratio of inverse intensities of the corresponding vortices. The angle between major axes of any two orbits of the vortices is calculated. In case of equilateral configuration this angle is  $\pm 120$  degrees.

**Citation:** A. I. Gudimenko, Dynamics of perturbed equilateral and collinear configurations of three point vortices, *Rus. J. Nonlin. Dynamics*, 2007, Vol. 3, No. 4, pp. 379–391.

Keywords: point vortices, integrable dynamics, perturbation theory  
MSC 2000: 37D45, 76U05, 76B47, 76E20



## 1. Введение

Динамика трех точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости описывается гамильтоновой системой

$$\dot{x}_i = a_i \frac{\partial H}{\partial y^i}, \quad \dot{y}_i = -a_i \frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{4\pi a_1 a_2 a_3} \sum_{i=1}^3 a_i \ln m_i, \quad (1.2)$$

где  $x_i, y_i$  — декартовы координаты  $i$ -го вихря,  $a_i$  — его обратная интенсивность и  $m_i$  — квадрат расстояния между вихрями, отличными от  $i$ -го.

Заметим, что скобка Пуассона для этой системы имеет вид

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^3 a_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

Помимо энергии (1.2), эта система обладает тремя первыми интегралами

$$Q = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{a_i}, \quad P = \sum_{i=1}^3 \frac{y_i}{a_i}, \quad I = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2 + y_i^2}{a_i}, \quad (1.4)$$

связанными с инвариантностью гамильтониана относительно параллельных переносов и вращений системы координат.

Уравнения (1.1) описывают *абсолютную* динамику трех вихрей. Наличие интегралов (1.4) позволяет выполнить редукцию системы к *относительным* переменным и понизить ее порядок.

В данной работе используется редуцированная система, предложенная в [1]. За относительные переменные берутся  $m_1, m_2, m_3$ , квадраты длин сторон вихревого треугольника, и  $\Delta$  — его удвоенная ориентированная площадь. Редуцированная система получается ограничением гамильтоновой системы со скобкой Ли–Пуассона

$$\{m_i, \Delta\} = (a_j - a_k)m_i + (a_j + a_k)(m_j - m_k), \quad \{m_i, m_j\} = -4a_k \Delta \quad (1.5)$$

и гамильтонианом (1.2) на симплектические листы — поверхности уровня  $f = 0$  и  $g = \text{const}$ , где

$$f = (2\Delta)^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1), \quad (1.6)$$

$$g = \frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3}{4a} \quad (a = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) \quad (1.7)$$

— центральные функции соответствующей алгебры Ли. Заметим, что  $f = 0$  есть формула Герона, выражающая площадь треугольника через его стороны, и  $g = I/4$ , при условии, что центр завихренности находится в начале координат.

Алгебра Ли, соответствующая ли–пуассоновой структуре (1.5), названа в [1] *вихревой алгеброй*. Устройство симплектического листа определяется вещественным типом этой алгебры, а последний, как показано [1], зависит только от знака величины  $a$ . При  $a > 0$  симплектический лист компактен. Этому случаю отвечает движение с ограниченными траекториями вихрей. В данной работе мы считаем  $a > 0$ .

Неподвижным точкам редуцированной системы отвечают следующие типы конфигураций трех вихрей:



- равносторонняя конфигурация:  $m_1 = m_2 = m_3$ ;
- коллинеарная конфигурация:  $\Delta = 0$  и  $m_1, m_2, m_3 > 0$ ;
- сингулярная конфигурация:  $\Delta = 0$  и  $\exists i \neq j m_i = m_j > 0$ .

В данной работе рассматриваются только первые два типа конфигураций. Динамика этих конфигураций известна [2] и очень проста — вихри вращаются вокруг центра завихренности с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{8\pi g a_1 a_2 a_3}. \quad (1.8)$$

Как изменится абсолютная динамика вихрей в этих конфигурациях, если последние подвергнуть возмущению, изменяя относительное положение вихрей? Прежде всего, ответ на этот вопрос зависит от устойчивости конфигурации. В данной работе рассматриваются только устойчивые конфигурации. Кроме того, могут быть возмущения, при которых тип конфигурации не меняется. Мы исключаем такие возмущения, требуя, чтобы они сохраняли интегралы движения (1.4). Таким образом, исходный вопрос сводится к вопросу об абсолютной динамике вихрей, отвечающей фазовым орбитам редуцированной системы, близким к рассматриваемым устойчивым неподвижным точкам.

Численный эксперимент дает следующий ответ на этот вопрос. В системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг центра завихренности, вихри вращаются вокруг их (стационарных) положений в отсутствие возмущения по орбитам, близким к эллиптическим. Эксцентриситеты всех трех орбит в каждой конфигурации совпадают. В равностороннем случае соответствующие оси (большая и малая) двух произвольных орбит различаются по углу на 120 градусов, а в коллинеарном — нормальны или параллельны прямой, проходящей через вихри в отсутствие возмущения. Рис. 1, 2 иллюстрируют эти наблюдения.<sup>1</sup>

Асимптотический анализ, проведенный в настоящей работе, подтверждает выводы численного эксперимента и в отдельных моментах идет дальше. А именно, мы вычисляем явный вид эллиптических орбит вихрей в возмущенных конфигурациях, находим угловую скорость  $\omega$  вращения вихрей по орбитам и получаем простое выражение для отношения длин соответствующих (больших и малых) осей произвольной пары орбит вихрей.

Несколько слов о содержании работы. Работа поделена на два основных раздела. В первом исследуется относительная динамика возмущенных равносторонней и коллинеарной конфигураций вихрей, во втором — абсолютная. Рассмотрение относительной динамики включает переход в окрестности эллиптических точек редуцированной системы к переменным угол—действие. Все вычисления носят асимптотический характер, в качестве параметра асимптотик выступает, по существу, квадратный корень из действия.

## 2. Относительная динамика

### 2.1. Нормированные канонические координаты

Вернемся к обсуждению гамильтоновой системы (1.2), (1.5), описывающей с учетом интегралов (1.6) и (1.7) относительную динамику трех вихрей. При  $a > 0$ , т. е. когда симплектический

<sup>1</sup> Стоит отметить, что общий вывод о замкнутости траектории трех вихрей в некоторой вращающейся системе координат был получен в [1] (см. также [3] для случая равных интенсивностей).

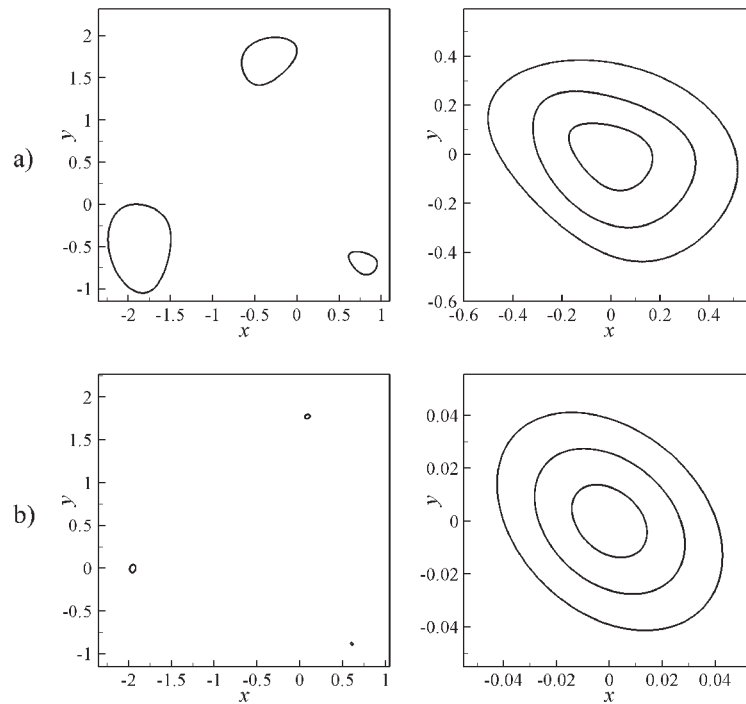


Рис. 1. Траектории вихрей возмущенной равносторонней конфигурации во вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  системе координат при  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 3$  и различных амплитудах возмущения: а) — возмущение велико, б) — мало. Справа орбиты вихрей отнесены к общему центру с подходящим поворотом на 0, 120 или 240 градусов

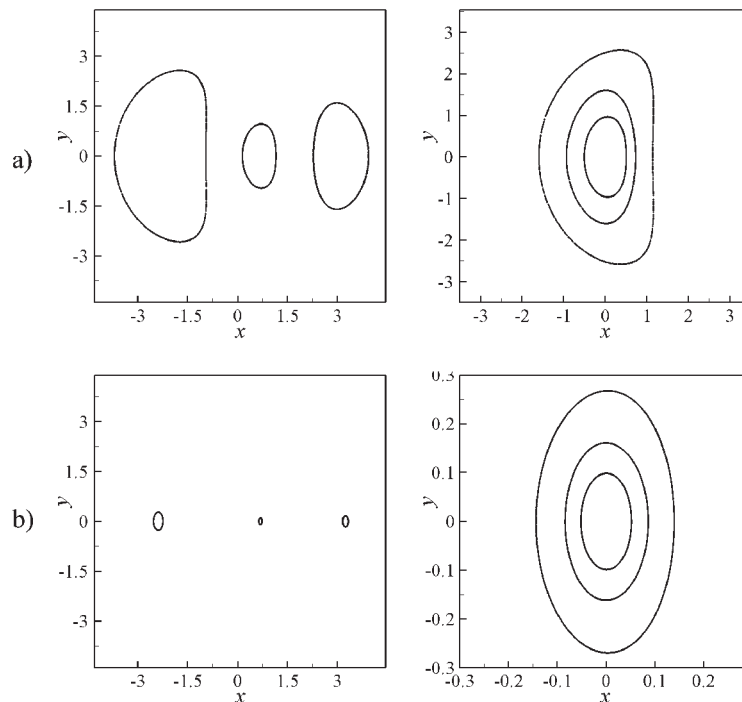


Рис. 2. Траектории вихрей возмущенной коллинеарной конфигурации во вращающейся системе координат при  $a_1 = -6$ ,  $a_2 = -3$ ,  $a_3 = 1$  и различных амплитудах возмущения. Справа орбиты вихрей отнесены к общему центру с подходящим поворотом на 0 или 180 градусов

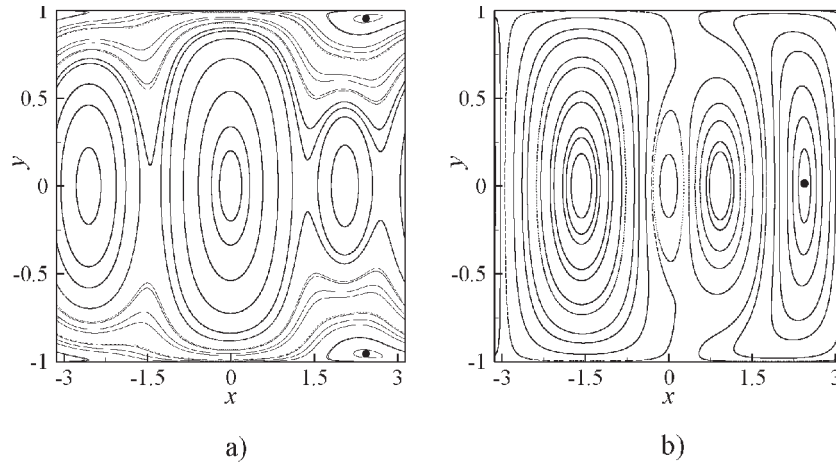


Рис. 3. Фазовые портреты относительного движения трех вихрей в нормированных канонических координатах: а) при  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$  и б) при  $a_1 = -6, a_2 = -3, a_3 = 1$

лист системы компактен, можно ввести (см. [1]) новые образующие вихревой алгебры

$$e_1 = \frac{\Delta}{2\sqrt{a}}, \quad e_2 = \frac{(a_2 - a_3)m_1 + (a_3 - a_1)m_2 + (a_1 - a_2)m_3}{4\sqrt{ab}} \quad (2.1)$$

$$e_3 = \frac{(a_2a_3 - a_1^2)m_1 + (a_3a_1 - a_2^2)m_2 + (a_1a_2 - a_3^2)m_3}{4a\sqrt{b}} \quad (b = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a) \quad (2.2)$$

и  $g$ , в которых соотношения (1.5) и (1.7) принимают соответственно вид

$$\{g, e_i\} = 0, \quad \{e_i, e_j\} = e_k \quad (2.3)$$

и

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = g^2. \quad (2.4)$$

Последнее соотношение означает, что симплектический лист системы — сфера, а первые два имеют то важное следствие, что цилиндрические координаты  $x, y$  на сфере,

$$e_1 = y, \quad e_2 = \sqrt{g^2 - y^2} \cos x, \quad e_3 = \sqrt{g^2 - y^2} \sin x, \quad (2.5)$$

оказываются каноническими.

Удобнее, однако, работать с образующими (2.1), (2.2), нормированными на  $g$  (см. формулы (2.17) и (2.18)). В этом случае сфера (2.4) трансформируется к сфере единичного радиуса, а цилиндрические координаты  $x, y$  на ней, определяются соотношениями (2.5) при  $g = 1$  и уже не являются каноническими:  $\{x, y\} = g^{-1}$ . Эти координаты мы будем называть *нормированными каноническими* координатами.

На рис. 3 приведены фазовые портреты относительного движения трех вихрей в нормированных канонических координатах. Интересующим нас в работе равносторонним и коллинеарным конфигурациям отвечают на этих портретах выделенные черными кружками эллиптические точки.

## 2.2. Переменные угол–действие

Будем считать, что рассматриваемая эллиптическая точка имеет нормированные канонические координаты  $x = y = 0$ . В окрестности этой точки определим новые координаты  $r, \phi$ , полагая

$$x = r \operatorname{se} \phi, \quad y = r \operatorname{se} \phi,$$

где

$$\operatorname{se} \phi = \sqrt{\frac{H_{rr}}{H_{xx}}} \cos \phi - \frac{H_{xy}}{\sqrt{H_{rr}H_{xx}}} \sin \phi, \quad \operatorname{se} \phi = \sqrt{\frac{H_{xx}}{H_{rr}}} \sin \phi. \quad (2.7)$$

Мы видим, что координатные линии  $r$  и  $\phi$  — эллипсы и лучи с центром в начале координат. Симплектическая структура в новых координатах —  $grdr \wedge d\phi$ . Кроме того — и это проверяется непосредственно, —

$$H_{rr} = \sqrt{H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2}. \quad (2.8)$$

Предположим, что в окрестности эллиптической точки справедливо асимптотическое разложение

$$r = \epsilon + r_2\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad (2.9)$$

где  $\epsilon$  — некоторая малая величина, и  $r_2 = r_2(\phi)$  — не зависящая от  $\epsilon$  функция. Имеем тогда, разлагая гамильтониан в ряд Тейлора по  $\epsilon$ ,

$$H = H_0 + H_r\epsilon + (r_2H_r + \frac{1}{2}H_{rr})\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad H_0 = H(0, 0),$$

или, в силу  $H_r = 0$ ,

$$H = H_0 + \frac{1}{2}H_{rr}\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \quad (2.11)$$

Координаты угол–действие  $\theta, J$  в окрестности эллиптической точки введем с помощью производящей функции симплектического преобразования к ним координат  $r, \phi$ :

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\phi gr^2 d\phi. \quad (2.12)$$

Для этого подставим (2.9) в (2.12) и проинтегрируем. Получим

$$S(\epsilon, \phi) = \frac{1}{2}g\phi\epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

Отсюда

$$J = (2\pi)^{-1}S(\epsilon, 2\pi) = \frac{1}{2}g\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad \theta = -S_J = -\epsilon^{-1}g^{-1}S_\epsilon = -\phi + O(\epsilon).$$

Итак, связь нормированных канонических координат с координатами угол–действие установлена:

$$x = \operatorname{se}(-\theta)\epsilon + O(\epsilon^2), \quad y = \operatorname{se}(-\theta)\epsilon + O(\epsilon^2) \quad (\epsilon = \sqrt{2g^{-1}J} + O(J)). \quad (2.15)$$

Выражение для гамильтониана через переменную действие получается подстановкой в (2.11) выражения для  $\epsilon$  из (2.15).

Дифференцируя этот гамильтониан по  $J$ , находим угловую скорость фазовой частицы вблизи эллиптической точки:

$$\omega = g^{-1}H_{rr} + O(\epsilon). \quad (2.16)$$

### 2.3. Относительная динамика возмущенной равносторонней конфигурации

При определении переменных угол–действие мы исходили из предположения, что эллиптическая точка, отвечающая равносторонней конфигурации, находится в центре нормированной канонической системы координат. Это условие не выполняется, если за образующие вихревой алгебры принимаются нормированные образующие (2.1) и (2.2):

$$e_1 = \frac{\Delta}{2g\sqrt{a}}, \quad e_2 = \frac{(a_2 - a_3)m_1 + (a_3 - a_1)m_2 + (a_1 - a_2)m_3}{4g\sqrt{ab}} \quad (2.17)$$

$$e_3 = \frac{(a_2a_3 - a_1^2)m_1 + (a_3a_1 - a_2^2)m_2 + (a_1a_2 - a_3^2)m_3}{4ga\sqrt{b}}. \quad (2.18)$$

Введем новые образующие  $e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$ , полагая

$$e_{1'} = \frac{\sqrt{b}e_1 + \sqrt{3a}e_3}{a_1 + a_2 + a_3}, \quad e_{2'} = \frac{\sqrt{3a}e_1 - \sqrt{b}e_3}{a_1 + a_2 + a_3}, \quad e_{3'} = e_2. \quad (2.19)$$

Нетрудно видеть, что данному преобразованию образующих соответствует поворот координатной системы  $e_1, e_2, e_3$  и, следовательно, пуассонова структура (2.3) сохраняется. Кроме того, в эллиптической точке, т. е. при  $m_1 = m_2 = m_3$ , имеем  $e_{1'} = e_{3'} = 0$  и  $e_{2'} = 1$  и, следовательно, нормированные канонические координаты этой точки суть  $x = y = 0$ , что и требовалось получить.

Найдем выражение для квадратов длин сторон вихревого треугольника через переменные  $\theta, \epsilon$ . Имеем, разрешая (2.17)–(2.19) относительно искомым величин,

$$m_i = 2g \left( a_j + a_k + \frac{a_j(a_j - a_i) + a_k(a_k - a_i)}{a_1 + a_2 + a_3} \left( \sqrt{\frac{3a}{b}} e_{1'} - e_{2'} \right) + \sqrt{\frac{a}{b}} (a_j - a_k) e_{3'} \right). \quad (2.20)$$

Выполняя здесь подстановки

$$e_{1'} = y, \quad e_{2'} = \sqrt{1 - y^2} \cos x, \quad e_{3'} = \sqrt{1 - y^2} \sin x \quad (2.21)$$

с учетом выражений (2.15), (2.7) и переразлагая по  $\epsilon$ , находим

$$m_i = m_{i0} + m_{i1}\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (2.22)$$

$$m_{i0} = \frac{4ga}{\sigma_1}, \quad m_{i1} = 2g\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{H_{rr}}{H_{xx}}} \left( (a_j - a_k) \cos \theta + \frac{(2a_i - a_j - a_k)\sqrt{\sigma_3}}{a_i\sqrt{\sigma_1}} \sin \theta \right), \quad (2.23)$$

где мы положили  $\sigma_1 = a_1 + a_2 + a_3, \sigma_3 = a_1a_2a_3$ .

Чтобы получить зависимость квадратов длин сторон от времени, нужно положить в полученных формулах  $\theta = \omega t$ .

Найдем явное выражение для  $\omega$ . Имеем, дифференцируя гамильтониан (1.2) по  $x, y$  с учетом выражений (2.20) и (2.21),

$$H_{xx} = \frac{\sigma_1^2(a\sigma_1 - 9\sigma_3)}{16\pi ab\sigma_3}, \quad H_{yy} = \frac{3\sigma_1(ab + 3\sigma_1\sigma_3 - a^2)}{16\pi ab\sigma_3}, \quad H_{xy} = \frac{\sqrt{3}\sigma_1^2(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)}{16\pi ab\sigma_3}.$$

Подставим все это в (2.8), упростим и в результате из (2.16) найдем

$$\omega = \frac{1}{8\pi ga} \sqrt{\frac{3\sigma_1^3}{\sigma_3}} + O(\epsilon). \quad (2.25)$$

## 2.4. Относительная динамика возмущенной коллинеарной конфигурации

Подходящие для этого случая образующие вихревой алгебры получаются из (2.1) и (2.2) композицией двух поворотов координатной системы  $e_1, e_2, e_3$ :

$$e_{1'} = e_1, \quad e_{2'} = \frac{\sqrt{a}(a_2 - a_1)e_2 - (a_1^2 - a_3a_1 + a_2^2 - a_2a_3)e_3}{\sqrt{b}(a_1 + a_2)},$$

$$e_{3'} = \frac{(a_1^2 - a_3a_1 + a_2^2 - a_2a_3)e_2 + \sqrt{a}(a_2 - a_1)e_3}{\sqrt{b}(a_1 + a_2)}$$

и

$$e_{1''} = e_{1'}, \quad e_{2''} = \frac{(w^2 - a)e_{2'} + 2w\sqrt{a}e_{3'}}{w^2 + a},$$

$$e_{3''} = \frac{-2w\sqrt{a}e_{2'} + (w^2 - a)e_{3'}}{w^2 + a} \quad (w = a_1z + a_2(z - 1)).$$

Здесь  $z$  — действительный корень уравнения

$$z^3 - \frac{(a_1 + 2a_2)z^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1(2a_2 + a_3)z}{a_3(a_1 + a_2)} + \frac{a_1(a_2 + a_3)}{a_3(a_1 + a_2)} = 0, \quad (2.26)$$

которое получается, если в условие инвариантности площади вихревого треугольника,  $\{\Delta, H\} = 0$ , (см. (1.5)) подставить выражения

$$m_1 = z^2m_3, \quad m_2 = (1 - z)^2m_3,$$

связывающие квадраты длин сторон коллинеарной конфигурации.

Квадраты длин сторон вихревого треугольника через новые образующие выражаются в следующем виде:

$$m_1 = 2g(a_2 + a_3) + 2g \frac{(az^2 - (a_2(1 - z) + a_3)^2)e_{2''} + 2\sqrt{a}z(a_2(z - 1) - a_3)e_{3''}}{z^2a_1 + (z - 1)^2a_2 + a_3},$$

$$m_2 = 2g(a_3 + a_1) + 2g \frac{(a(1 - z)^2 - (a_1z + a_3)^2)e_{2''} - 2\sqrt{a}(z - 1)(a_1z + a_3)e_{3''}}{z^2a_1 + (z - 1)^2a_2 + a_3},$$

$$m_3 = 2g(a_1 + a_2) + 2g \frac{(a - (a_1z + a_2(z - 1))^2)e_{2''} + 2\sqrt{a}(a_1z + a_2(z - 1))e_{3''}}{z^2a_1 + (z - 1)^2a_2 + a_3}.$$

Особенность рассматриваемой динамики в сравнении со случаем равносторонней конфигурации проявляется, в частности, в том, что  $H_{xy} = 0$ . Это приводит к более простым выражениям для нормированных канонических координат,

$$x = \sqrt[4]{\frac{H_{yy}}{H_{xx}}} \cos(\theta)\epsilon + O(\epsilon^2), \quad y = -\sqrt[4]{\frac{H_{xx}}{H_{yy}}} \sin(\theta)\epsilon + O(\epsilon^2).$$



Что касается, выражений квадратов длин сторон вихревого треугольника через переменные  $\theta$  и  $\epsilon$ , то они следующие:

$$m_1 = m_{10} + \frac{m_{30}z(a_2(z-1) - a_3)}{\sqrt{a}} \sqrt[4]{H_{yy}/H_{xx}} \cos(\theta)\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (2.28)$$

$$m_2 = m_{20} - \frac{m_{30}(z-1)(a_1z + a_3)}{\sqrt{a}} \sqrt[4]{H_{yy}/H_{xx}} \cos(\theta)\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (2.29)$$

$$m_3 = m_{30} + \frac{m_{30}(a_1z + a_2(z-1))}{\sqrt{a}} \sqrt[4]{H_{yy}/H_{xx}} \cos(\theta)\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (2.30)$$

где

$$m_{10} = z^2 m_{30}, \quad m_{20} = (z-1)^2 m_{30}, \quad m_{30} = \frac{4ga}{(z-1)^2 a_2 + z^2 a_1 + a_3}.$$

Явные выражения для  $H_{xx}$ ,  $H_{yy}$  и  $\omega$  слишком громоздки, чтобы их здесь приводить. Однако в случае, когда  $a_2 = a_1$  и, следовательно,  $z = 1/2$ , выражения сильно упрощаются. Имеем

$$H_{xx} = \frac{4a_1 + 5a_3}{8\pi a_1 a_3}, \quad H_{yy} = -\frac{3}{8\pi a_1^2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{-12a_1 - 15a_3}}{8\pi g a_1^2 \sqrt{a_3}} \quad (a_1, a_2 < 0, a_3 > 0).$$

### 3. Абсолютная динамика

Будем обозначать  $r_i, \phi_i$  полярные координаты  $i$ -го вихря. В предположении, что центр завихренности находится в начале координат (что в дальнейшем всегда будет предполагаться), из интегралов движения и формулы, связывающей длины сторон и углы треугольника, следуют соотношения:

$$r_i^2 = \frac{4a_i^2(a_j + a_k)g}{a} - \frac{a_i^2 m_i}{a}, \quad (3.1)$$

$$\cos(\phi_i - \phi_j) = \frac{a_i a_j}{2r_i r_j} \left( \frac{r_k^2}{a_k^2} - \frac{r_i^2}{a_i^2} - \frac{r_j^2}{a_j^2} \right). \quad (3.2)$$

С учетом этих соотношений из уравнений Гамильтона абсолютной динамики вихрей имеем, в частности,

$$\dot{\phi}_i = \frac{a}{4\pi} \frac{a_j a_k (m_j + m_k)(m_i - m_j - m_k) - 2(a_j^2 + a_k^2)m_j m_k}{a_i a_j a_k (a_j a_k m_i - (a_j + a_k)(a_j m_j + a_k m_k))m_j m_k}. \quad (3.3)$$

Приведенные соотношения определяют связь относительной и абсолютной динамик вихревого треугольника.

#### 3.1. Абсолютная динамика возмущенной равносторонней конфигурации

Выразим полярные координаты  $i$ -го вихря возмущенной равносторонней конфигурации вихрей через переменные  $\theta, \epsilon$ .

Радиальная координата получается из (3.1) с помощью подстановок (2.22) и (2.23):

$$r_i = r_{i0} - A \left( \frac{a_i^2(a_j - a_k)\sqrt{\sigma_1}}{r_{i0}} \cos \theta + \frac{a_i(2a_i - a_j - a_k)\sqrt{\sigma_3}}{r_{i0}} \sin \theta \right) \epsilon + O(\epsilon^2),$$

где

$$r_{i0} = 2\sqrt{\frac{a_i^2 g(a_j^2 + a_k^2 + a_j a_k)}{a\sigma_1}}, \quad A = \frac{g}{\sqrt{ab\sigma_1}} \sqrt{\frac{H_{rr}}{H_{xx}}}. \quad (3.5)$$

Чтобы найти угловую координату, мы сначала, используя (3.3), (2.22) и (2.23), вычисляем угловую скорость вихря. Имеем

$$\dot{\phi}_i = \Omega + \Omega_{i1}\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (3.6)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{8\pi g} \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \quad (3.7)$$

$$\Omega_{i1} = A\Omega a_i^2 \frac{\sqrt{\sigma_1}(a_j - a_k)(2a_i(a_j + a_k) - a_j a_k) \cos \theta + 3\sqrt{\sigma_3}(a_i a_j - a_j^2 + a_i a_k - a_k^2) \sin \theta}{ar_{i0}^2}.$$

Затем переходим в систему координат, вращающуюся с угловой скоростью  $\Omega$  (т. е. полагаем первое слагаемое в (3.6) равным нулю), и интегрируем по  $t$ . С учетом (2.25) получаем

$$\begin{aligned} \phi_i &= \phi_{i0} + \phi_{i1}\epsilon + O(\epsilon^2), \\ \phi_{i1} &= \phi_{i10} + \sqrt{3}Aa_i^2 \left( \frac{a_j^2 + a_k^2 - a_i a_j - a_i a_k}{r_{i0}^2 \sqrt{\sigma_1}} \cos \theta + \frac{(a_j - a_k)(2a_i a_j + 2a_i a_k - a_j a_k)}{3r_{i0}^2 \sqrt{\sigma_3}} \sin \theta \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $\phi_{i0}$  и  $\phi_{i10}$  — константы интегрирования.

Используя соотношение (3.2), можно вычислить  $\phi_{i0}$  и  $\phi_{i10}$  для любого  $i$ , задаваясь произвольным значением этих констант для фиксированного  $i$ . В дальнейшем мы будем игнорировать константы  $\phi_{i0}$ , считая  $\phi_{10} = \phi_{20} = \phi_{30} = 0$ . Что касается констант  $\phi_{i10}$ , то, полагая  $\phi_{110} = 0$  и вычисляя углы по формуле (3.2), находим  $\phi_{210} = \phi_{310} = 0$ . Таким образом, в формуле (3.8) можно считать  $\phi_{i10} = 0$ .

Перейдем теперь от полярных координат к декартовым. Имеем, опуская выкладки,

$$x_i = x_{i0} + Ax_{i1}\epsilon + O(\epsilon^2), \quad y_i = Ay_{i1}\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (3.9)$$

где

$$x_{i1} = -\frac{a_i^2(a_j - a_k)\sqrt{\sigma_1}}{r_{i0}} \cos \theta - \frac{a_i(2a_i - a_j - a_k)\sqrt{\sigma_3}}{r_{i0}} \sin \theta, \quad (3.10)$$

$$y_{i1} = \frac{\sqrt{3}a_i^2(a_j^2 + a_k^2 - a_i a_j - a_i a_k)}{r_{i0}\sqrt{\sigma_1}} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}a_i^2(a_j - a_k)(2a_i a_j + 2a_i a_k - a_j a_k)}{3r_{i0}\sqrt{\sigma_3}} \sin \theta. \quad (3.11)$$

Подведем первые итоги. Мы видим (см. формулы (3.6), (3.7)), что в начальном приближении по  $\epsilon$  вихри, образуя равностороннюю конфигурацию, вращаются с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг центра завихренности. При этом  $i$ -й вихрь находится на расстоянии  $r_{i0}$  (см. формулу (3.5)) от этого центра. Это — известные результаты [2].

С учетом следующего приближения оказывается, что во вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  системе координат  $i$ -й вихрь вращается с угловой скоростью  $\omega$  (см. формулу (2.25)) по эллиптической орбите вокруг его стационарного положения в начальном приближении (см. формулы (3.9)–(3.11)).



Для полного описания динамики в этом приближении следовало бы определить основные характеристики  $i$ -й орбиты, как то: ее эксцентриситет, фокусное расстояние и угол наклона ее большой оси относительно, скажем, направления на ее центр. Эти характеристики не представляет труда вычислить, но мы этого делать не будем из-за громоздкости окончательных формул. Вместо этого мы проведем сравнительный анализ этих характеристики для произвольной пары вихрей.

Перейдем от параметрической формы задания  $i$ -й орбиты (3.10), (3.11) к неявной:

$$\alpha_i x^2 - 2\beta_i xy + \gamma_i y^2 = 1. \tag{3.12}$$

Коэффициенты в (3.12) легко вычисляются и с точностью до общего для всех орбит множителя имеют вид

$$\alpha_i = \frac{a(a_j - a_k)^2 + 3a_i(a_j + a_k)(a_j a_k + a_j^2 + a_k^2)}{a_i^2(a_j a_k + a_j^2 + a_k^2)\sigma_1\sigma_3} \tag{3.13}$$

$$\beta_i = -\frac{\sqrt{3}(a_j - a_k)}{a_i^3(a_j a_k + a_j^2 + a_k^2)}, \quad \gamma_i = \frac{3(a_j + a_k)}{a_i^3(a_j a_k + a_j^2 + a_k^2)}. \tag{3.14}$$

Вычислим угол  $\phi_{ij}$  между большими осями  $i$ -й и  $j$ -й орбит. Это можно сделать, например, воспользовавшись формулой для угла между осью  $i$ -й орбиты и осью абсцисс:

$$\phi_i = \arctan \frac{\alpha_i - \gamma_i \pm \sqrt{(\alpha_i - \gamma_i)^2 - 4\beta_i^2}}{2\beta_i}.$$

Имеем в результате

$$\phi_{ij} = \arctan \frac{\sqrt{3}a_k\sigma_1}{a + a_i a_j - a_k}.$$

Сравним этот угол с углом  $\psi_{ij}$  между соответствующими вихрями невозмущенной конфигурации. Последний легко вычислить по формуле (3.2), зная расстояния от центра завихренности до вихрей (см. формулу (3.5)). Имеем

$$\psi_{ij} = \arctan \frac{\sqrt{3}a}{-a + 2a_i a_j - 2a_k},$$

$$\phi_{ij} - \psi_{ij} = \frac{2}{3}\pi.$$

Вывод: угол между большими осями произвольной пары орбит возмущенной конфигурации отличается на 120 градусов от угла между соответствующими вихрями невозмущенной конфигурации. Это утверждение согласуется с результатами численного анализа (см. рис. 1.).

Покажем теперь, что отношение длин соответствующих осей  $i$ -й и  $j$ -й орбит относятся как  $a_i/a_j$ . Имеем для квадратов длин осей  $i$ -й орбиты:

$$A_i^2 = \frac{1 + \tan^2 \phi_i}{\gamma \tan^2 \phi_i - 2\beta \tan \phi_i + \alpha}, \quad B_i^2 = \frac{1 + \tan^2 \phi_i}{\alpha \tan^2 \phi_i + 2\beta \tan \phi_i + \gamma}.$$

Подставим сюда (3.13) и (3.14), вычислим отношение этих величин и убедимся в справедливости сделанного утверждения.

Итак, эксцентриситеты всех трех орбит совпадают, а длины больших осей произвольной пары орбит относятся как обратные интенсивности соответствующих вихрей.

### 3.2. Абсолютная динамика возмущенной коллинеарной конфигурации

Полярные координаты вихрей для возмущенной коллинеарной конфигурации получаются аналогично, как в случае возмущенной равносторонней конфигурацией. Опуская выкладки (отметим только, что исходные выражения для квадратов длин сторон вихревого треугольника даются теперь формулами (2.28)–(2.30)), имеем

$$r_i = r_{i0} + \epsilon A r_{i1} \cos \theta + O(\epsilon^2), \quad \phi_i = \epsilon A \phi_{i1} \sin \theta + O(\epsilon^2), \quad (3.18)$$

где

$$r_{i0} = 2\sqrt{g a_i^2 \left( \frac{a_j + a_k}{a} - m_{i0} \right)}, \quad A = \frac{g}{\sqrt{a}} \sqrt[4]{\frac{H_{yy}}{H_{xx}}},$$

$$r_{11} = -\frac{2a_1^2 z (a_2(z-1) - a_3)}{\sigma r_{10}}, \quad r_{21} = \frac{2a_2^2 (z-1)(a_1 z + a_3)}{\sigma r_{20}}, \quad r_{31} = -\frac{2a_3^2 (a_1 z + a_2(z-1))}{\sigma r_{30}},$$

$$\phi_{11} = \frac{a_1 \sigma z \left( \frac{a(z-1)(a_2 - a_3(z-1))}{a_2 a_3 \sigma} + \frac{1}{2} z - 1 \right)}{2\pi g a \omega r_{10}^2 (z-1)^2},$$

$$\phi_{21} = -\frac{a_2 \sigma (z-1) \left( \frac{a z (a_3 z + a_1)}{a_3 a_1 \sigma} + \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} \right)}{2\pi g a \omega r_{20}^2 z^2},$$

$$\phi_{31} = \frac{a_3 \sigma \left( \frac{a z (z-1)(a_1(z-1) + a_2)}{a_1 a_2 \sigma} + z - \frac{1}{2} \right)}{2\pi g a \omega r_{30}^2 z^2 (z-1)^2}$$

и  $\sigma = (z-1)^2 a_2 + z^2 a_1 + a_3$ . Отметим, что в (3.18) предполагается, что мы находимся в системе координат, вращающейся с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{\sigma_1}{8\pi g \sigma_3}.$$

Соответственно для декартовых координат вихрей в этой вращающейся системе координат имеем

$$x_i = x_{i0} + A x_{i1} \epsilon + O(\epsilon^2), \quad y_i = A y_{i1} \epsilon + O(\epsilon^2),$$

где

$$x_{i1} = r_{i1} \cos \theta, \quad y_{i1} = r_{i0} \phi_{i1} \sin \theta.$$

Анализируя полученные формулы, мы делаем вывод, что во вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  системе координат вихри вращаются вокруг их положений в невозмущенном состоянии с угловой скоростью  $\omega$  по эллиптическим орбитам. При этом, соответствующие оси орбит параллельны и образуют с прямой, соединяющей невозмущенные вихри, угол 0 или 90 градусов.

Найдем отношение горизонтальных осей различных пар орбит. Опуская выкладки, сводящиеся к непосредственному упрощению выражений, имеем

$$\frac{r_{11}}{r_{21}} = \left| \frac{a_1 z}{(z-1)a_2} \right|, \quad \frac{r_{21}}{r_{31}} = \left| \frac{(z-1)a_2}{a_3} \right|. \quad (3.22)$$

Точно такие же выражения получаются, если вычислять отношения вертикальных осей, т. е. выражения  $r_{i0}\phi_{i1}/r_{j0}\phi_{j1}$ .

Отсюда вывод: соответствующие оси различных пар орбит возмущенной коллинеарной конфигурации относятся как в (3.22). Эксцентриситеты у всех трех орбит совпадают.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 08-05-00061-а).

## Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Математические методы динамики вихревых структур*. Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, 386 с.
- [2] Мелешко В. В., Константинов М. Ю. *Динамика вихревых структур*. Киев: Наукова думка, 1993, 280 с.
- [3] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Absolute and relative choreographies in the problem of point vortices moving on a plain, *Reg. & Chaot. Dyn.*, 2004, vol. 9, № 2, pp. 101–112.