Замечания о частоте возвращения

Р. Ф. Шаймуратов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Москва, ГСП-1, Ленинские горы

E-mail: shaihan@rambler.ru

Получено 8 августа 2007 г.

Доказывается положительность частоты возвращения в случае конечной меры основного пространства. Приводится пример реализации нулевой частоты возвращения в случае бесконечной меры основного пространства. Получен признак неотделимости от нуля частоты возвращения.

Цитата: Р. Ф. Шаймуратов, Замечания о частоте возвращения, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, №4, с. 401–410.

Ключевые слова: эргодическая теория, теорема Пуанкаре о возвращении, частота возвращения.

R. F. Shaimuratov

On the frequency of recurrence

For sets with finite measure, the frequency of recurrence is shown to be positive. In the event of infinite measure, an example with zero frequency of recurrence is presented. The paper provides a sufficient condition under which the frequency of recurrence is not separated from zero.

Citation: R. F. Shaimuratov, On the frequency of recurrence, *Rus. J. Nonlin. Dynamics*, 2007, Vol. 3, No. 4, pp. 401–410.

Keywords: ergodic theory, Poincaré recurrence theorem, frequency of recurrence
MSC 2000: 37A05

1. Введение

Основной задачей для нас будет изучение свойств возвращаемости для преобразований, сохраняющих меру. Уточним некоторые определения и понятия. **Основным пространством** будем называть пространство M со счетно-аддитивной мерой μ. Причем оно само может иметь как бесконечную, так и конечную положительную меру. Преобразованием будем называть биективное измеримое отображение $T\colon M \to M$, сохраняющее меру μ, т. е. для любого измеримого подмножества A выполняется равенство $\mu(A) = \mu(T(A))$.

Замечание 1. В некоторых случаях рассматривают и небиективные преобразования, только при этом условие сохранения меры заменяется другим. Мы ограничимся рассмотрением биективных преобразований.

Дадим несколько определений. Будем считать фиксированными **основное пространство** M и преобразование T. Множество A будет некоторым измеримым подмножеством M, причем $\mu(A) > 0$.

Определение 1. **T-орбитой** множества A называется множество

$$G(A) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(A).$$

Замечание 2. В данном определении и везде далее подразумевается, что T^0 — тождественное преобразование, T^{-1} — обратное к T отображение (в силу биективности T, оно существует), а $T^{-n} = (T^{-1})^n$.

Определение 2. **Правой T-орбитой** множества A называется множество

$$R(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(A).$$

Определение 3. **Индексом** точки $x \in A$ в A называется

$$i_A(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } T^j(x) \notin A \text{ для всех } j \in \mathbb{N}\,; \\ p \in \mathbb{N}, & \text{если } T^p(x) \in A, \text{ но } T^j(x) \notin A \text{ для всех } j,\ 1 \leqslant j \leqslant p-1. \end{cases}$$

Замечание 3. Если мы рассматриваем множество A положительной меры в **основном пространстве** M и **T-орбита** $G(A)$ не совпадает с M, то иногда полезно считать, что $G(A)$ и является **основным пространством**. Более точно, вместо преобразования T мы рассматриваем его ограничение на T-инвариантное множество $G(A)$. Это ограничение также будет биективно и будет сохранять меру.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся два утверждения из общей эргодической теории. Мы приведем эти утверждения в той форме, которая будет удобна для нас. Более общие формулировки приведены в [1]. Первое из них это *теорема Пуанкаре о возвращении.*

Теорема 1. *Если мера* ***основного пространства*** *конечна, то для любого множества A положительной меры* ***индекс*** *почти всех точек A конечен. Иными словами, почти все точки A возвращаются в A.*

Второе утверждение носит название *теоремы Биркгофа–Хинчина* . Пусть χ_A — характеристическая функция множества A.

Теорема 2. *Для почти всех точек множества A положительной конечной меры последовательность функций $\chi_A(T^n(x))$ сходится в смысле Чезаро к некоторой функции $\varphi_A(x)$. Кроме этого, в случае конечности меры* ***основного пространства*** *M можно утверждать, что*

$$\int\limits_M \varphi_A(x)\,d\mu = \mu(A).$$

Определение 4. Частотой возвращения точки $x \in A$ в A называется значение функции $\varphi_A(x)$.

Определение 5. Ядром возвращения называется множество $C = \{x \in A : \varphi_A(x) = 0\}$.

Нас будет в первую очередь интересовать, может ли **ядро возвращения** иметь положительную меру? В случае конечности меры **основного пространства** на этот вопрос дается отрицательный ответ. Этот факт отмечается (без доказательства) в [2]. Итак, верно

Утверждение 1. *Если мера* ***основного пространства*** *M конечна, то* ***ядро возвращения*** *имеет меру нуль.*

Доказательство (по В. В. Козлову). Рассмотрим **ядро возвращения** $C = \{x \in A\colon \varphi_A(x) = 0\}$. Предположим, что $\mu(C) > 0$. Рассмотрим множество $M' = G(C)$. На M' функция $\varphi_A(x)$ принимает тождественно нулевое значение. Кроме того, на этом множестве функции $\varphi_A(x)$ и $\varphi_C(x)$ совпадают ввиду совпадения на нем функций $\chi_A(x)$ и $\chi_C(x)$. В связи со сделанным выше наблюдением, мы можем применить теорему Биркгофа–Хинчина, считая M' **основным пространством**, к множеству C, и по второй части теоремы получим

$$\int\limits_{M'} \varphi_C(x)\,d\mu = \mu(C) > 0.$$

Приходим к противоречию с тем, что $\varphi_C(x)$ принимает на M' тождественно нулевое значение.

■

2. Пример неотделимости от нуля частоты возвращения в случае конечной меры основного пространства

Из этого утверждения возникает гипотеза, что в случае конечной меры **основного пространства** для любого множества положительной меры A функция $\varphi_A(x)$ равномерно отделена от нуля на A, быть может, за исключением множества меры нуль. Более точно: найдется $\delta > 0$, такое что $\varphi_A(x) > \delta$ почти для всех $x \in A$.

Но это неверно, как показывает

Пример 1. Рассмотрим единичный квадрат на плоскости $P = [0,1]\times[0,1]$, который разбит на счетное число прямоугольников вида

$$P_k = (1 - 1/2^k, 1 - 1/2^{k+1}) \times (0,1), \quad k = 0, 1, 2\ldots$$

Обозначим

$$W_k^m = (1 - 1/2^k, 1 - 1/2^{k+1}) \times (m, m+1), \quad k = 0, 1, 2\ldots \quad m = 0, 1, 2\ldots$$

Мера μ — это обычная мера Лебега на плоскости. Определим преобразование T его действием на эти прямоугольники:

$$P_0 = W_0^0 \to W_0^1 \to W_0^0;$$
$$P_1 = W_1^0 \to W_1^1 \to W_1^2 \to W_1^0;$$
$$\vdots$$
$$P_k = W_k^0 \to W_k^1 \to \ldots \to W_k^{k+1} \to W_k^0;$$
$$\vdots$$

под $W_k^m \to W_k^s$ подразумевается преобразование: $T(x, y) = (x, y + (s - m))$. На всей остальной плоскости будем считать преобразование T тождественным. Биективность этого преобразования очевидна.

Прежде чем продолжить строить пример, сделаем важное замечание, которое может понадобиться нам и в дальнейшем.

Замечание 4. Для рассмотрения интересующих нас вопросов нам неважно поведение нашего преобразования на множестве меры нуль. Т. е. мы можем на нем определять наше преобразование из соображений удобства. Например, выше мы положили, что T действует тождественно на границе прямоугольников W_k^m.

Рассмотрим в качестве **основного пространства *T*-орбиту** единичного квадрата: $M = G(P)$. Его мера конечна, т. к. она равна сумме сходящегося ряда

$$\mu(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{2^k}.$$

Теперь проверим, что T сохраняет меру. Пусть A — подмножество M положительной меры. Если A целиком лежит в каком-либо прямоугольнике, то оно в результате действия преобразования просто сдвинется и его мера сохранится. В противном случае разобьем его на не более чем счетное число подмножеств, каждое из которых целиком лежит в каком-либо прямоугольнике.

Легко понять, что функция $\varphi_P(x)$ принимает значение $\dfrac{1}{k+2}$ во всех точках прямоугольника P_k. Таким образом, мы получили противоречие с гипотезой о равномерной отделимости **частоты возвращения** от нуля.

3. Примеры существования ядра возвращения ненулевой меры в случае бесконечной меры основного пространства

Теперь перейдем к случаю бесконечной меры **основного пространства**. Как и раньше, T и M считаем фиксированными, а A — множеством положительной (но не обязательно конечной) меры. В этом случае *теорема Пуанкаре*, вообще говоря, неверна. Поэтому оправданно

Определение 6. Множество A называется **нормальным**, если **индекс** всех его точек конечен.

Замечание 5. В случае бесконечной меры **основного пространства** информацию о некоторых свойствах возвращаемости точек дает теорема Хопфа. Но она основана на рассмотрении дополнительных топологических конструкций на M, поэтому мы ее касаться не будем.

Интересный вопрос: может ли быть равной нулю **частота возвращения** в **нормальное** множество A? Ответ в этом случае оказывается положительным. Сначала разберем случай, когда $\mu(A) = +\infty$. Тогда, вообще говоря, само определение **частоты возвращения** может оказаться некорректным, т. к. в этом случае в качестве последовательности $\chi_A(T^n(x))$ можно реализовать любую последовательность из нулей и единиц. Примеры несходящихся по Чезаро последовательностей из нулей и единиц можно найти в [3]. Реализуем, например, случай, когда **частота возвращения** равна нулю.

Пример 2. В этом примере преобразование по своей структуре похоже на преобразование из **примера 1**. Поэтому не будем подробно останавливаться на некоторых технических деталях.

Возьмем в качестве A следующее множество на плоскости: $(-\infty, +\infty) \times (0, 1)$. Разобьем его на единичные квадраты:

$$P_k = (k, k+1) \times (0, 1), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Положим

$$W_k^m = (k, k+1) \times (m, m+1), \ k, m \in \mathbb{Z}.$$

Как и в **примере 1**, определим преобразование действием только на этих квадратах:

$$\begin{array}{ll} P_k = W_k^0 \to W_{k+1}^0 = P_{k+1}, & k < 1; \\ P_k = W_k^0 \to W_k^1 \to \ldots \to W_k^{k-1} \to W_k^k \to W_{k+1}^0 = P_{k+1}, & k \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Преобразование биективно и будет сохранять меру. Непосредственно из определения следует, что A — **нормальное** множество.

Покажем, что **частота возвращения** всех точек A равна нулю. Это следует из того, что следующая числовая последовательность

$$1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

сходится в смысле Чезаро к нулю. Итак, пример полностью построен.

Гораздо более содержательным является случай, когда мера множества A конечна. В этом случае существует весьма нетривиальный пример, показывающий, что **частота возвращения** почти всех точек A может быть равна нулю.

Пример 3. Рассмотрим единичный квадрат на плоскости $A = (0, 1) \times (0, 1)$. Разобьем его на прямоугольники

$$\begin{array}{ll} A_m = \left(1 - \dfrac{1}{2^{m-1}}, 1 - \dfrac{1}{2^m}\right) \times (0, 1), & m \in \mathbb{N}; \\ B_m = \left(\dfrac{1}{2^m}, \dfrac{1}{2^{m-1}}\right) \times (0, 1), & m \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Рассмотрим некоторую последовательность натуральных чисел $\{p_m\}$.

Положим

$$W_m^s = \left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}, 1 - \frac{1}{2^m}\right) \times (s, s+1), \ m \in \mathbb{N}, \ s = 0 \ldots p_m.$$

Преобразование T определим следующим образом:

$$A_m = W_m^0 \to W_m^1 \to \ldots \to W_m^{p_m} \to B_m, \ m \in \mathbb{N}.$$

Тогда мера T**-орбиты** A будет равна

$$\mu(G(A)) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{2^m}.$$

Если эта мера конечна, то, по доказанному выше **утверждению 1**, **частота возвращения** почти всех точек A положительна. Докажем, что в случае бесконечности меры $G(A)$ **частота возвращения** всех точек тождественно равна нулю. Определим еще преобразования T_k ($k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{array}{ll} A_m = W_m^0 \to W_m^1 \to \ldots \to W_m^{p_m} \to B_m, & m = 1 \ldots k; \\ A_m \to B_m, & m > k. \end{array}$$

Остановимся на геометрическом смысле этих преобразований. Сначала рассмотрим преобразование T. Исходный единичный квадрат разбивается на две равные части. Левая половинка под действием нашего преобразования сначала последовательными сдвигами поднимается, а через $p_1 + 1$ шагов переходит в правую половинку. Далее, единичный квадрат разбивается на 4 части, второй справа прямоугольник также после некоторого числа сдвигов ($p_2 + 1$) переходит во второй слева. Потом разбиваем на 8 частей и т. д. Преобразование T_k отличается от T тем, что на каком-то шаге все дальнейшие p_m полагаются равными нулю.

Обозначим $\nu(x)$ **частоту возвращения** точки $(x, y) \in A$ при преобразовании T. А через $\nu_k(x)$ частоту при T_k. Заметим, что мы не пишем вторую координату, т. к. от нее соответствующие величины не зависят. Мы и далее будем придерживаться этого соглашения.

Исследуем свойства преобразования T_k. Пусть $G_k(A)$ — T_k**-орбита** множества A. Тогда имеем

$$\mu(G_k(A)) = 1 + \sum_{m=1}^{k} \frac{p_m}{2^m}.$$

По индукции по k легко показать, что любая точка A при действии преобразования T_k рано или поздно попадет в прямоугольник $\left(1 - \dfrac{1}{2^k}, 1\right) \times (0, 1)$. Пусть x и y — некоторые две точки этого прямоугольника. Нетрудно понять, что при любом $s \in \mathbb{N}$ точки $T^s(x)$ и $T^s(y)$ лежат или не лежат в А одновременно. Из этого непосредственно следует, что функция $\nu_k(x)$ принимает постоянное значение на $G_k(A)$. Обозначим его ν_k. Применим вторую часть теоремы *Биркгофа–Хинчина*

$$\int\limits_{G_k(A)} \nu_k(x)\, d\mu = \mu(A).$$

Учитывая постоянство $\nu_k(x)$, получим

$$\nu_k = \frac{1}{1 + \sum\limits_{m=1}^{k} \dfrac{p_m}{2^m}}.$$

В случае бесконечности меры $G(A)$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует k, при котором ν_k меньше ε. Осталось понять, что

$$\forall x \in (0, 1)\ \nu(x) \leqslant \nu_k(x) = \nu_k.$$

Это следует из того, что последовательность $\chi_A(T^n(x))$ получается из последовательности $\chi_A(T_k^n(x))$ просто добавлением нулей.

В результате получим, что из $\mu(G(A)) = +\infty$ следует $\nu(x) \equiv 0$.

4. Признак неотделимости от нуля частоты возвращения

Идеи **примера 3** применимы и в более общей ситуации. Пусть A — **нормальное** подмножество конечной положительной меры **основного пространства** M, T — сохраняющее меру биективное преобразование. Пусть также $M = G(A)$. Тогда если мера M конечна, то **частота возвращения** почти всех точек A больше нуля. Верно и в некотором смысле обратное утверждение. Точнее, справедлива

Теорема 3. *Пусть A — **нормальное** множество конечной и положительной меры. Тогда если **частота возвращения** $\varphi_A(x)$ почти для всех точек A не меньше некоторого вещественного неотрицательного числа ν и $\mu(G(A)) = +\infty$, то $\nu = 0$.*

Доказательство. Обозначим:

$$W_m = \{x \in A\colon i_A(x) = m; \qquad m \in \mathbb{N};$$

$$U_k = \coprod_{m=k}^{\infty} W_m; \qquad\qquad W'_m = T^m(W_m) \subset A;$$

$$U'_k = \coprod_{m=k}^{\infty} W'_m; \qquad\qquad A' = \coprod_{m=1}^{\infty} W'_m.$$

То, что эти множества измеримы, следует из измеримости множеств

$$W_m = \{x \in A : T^m(x) \in A, T^j(x) \notin A \ 1 \leqslant j \leqslant m-1\} = (A \cap T^{-m}(A)) \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} T^{-j}(A).$$

Множество A — **нормальное**, поэтому

$$A = U_1 = \coprod_{m=1}^{\infty} W_m.$$

Заметим, что

$$\mu(A') = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(W'_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(W_m) = \mu(A).$$

Пусть $B = A \setminus A'$, тогда нетрудно показать, что $\forall x \in A \setminus G(B)\ \exists y \in A\ \exists n \in \mathbb{N}\ T^n(y) = x$. Рассматривая вместо A множество $A \setminus G(B)$, далее считаем $A = A'$.

Рассмотрим множество (напомним, что $T^0(W_s) = W_s$)

$$G = W_1 \cup (W_2 \cup T(W_2)) \cup \ldots \cup (W_k \cup T(W_k) \cup \ldots \cup T^{k-1}(W_k)) \cup \ldots =$$
$$= \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{s-1} T^n(W_s) = \bigcup_{0 \leqslant n < s} T^n(W_s).$$

Докажем, что T**-орбита** множества A совпадает с G. Очевидно, что $G \subset G(A)$. Докажем обратное включение. Пусть точка $y \in G(A)$. Покажем, что тогда $y \in G$. Если $y \in A$, то $\exists s y \in W_s$, а значит, $y \in G$. Сначала рассмотрим случай, когда $y \in T^{-n}(A)$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $\exists s\ T^n(y) \in W'_s$. Без ограничения общности можно считать, что точки $T(y) \ldots T^{n-1}(y)$ не лежат в A, тогда $s > n$ и $y \in T^{s-n}(W_s) \subset G$. Второй случай, когда $y \in T^n(A)$, $n \in \mathbb{N}$, рассматривается аналогично. Итак, $G = G(A)$.

В дальнейшем нам понадобится то, что множества $T^n(W_s)$ $(0 \leqslant n < s)$ не пересекаются между собой. Действительно, предположим противное, т. е. некоторая точка u принадлежит пересечению $T^p(W_i) \cap T^q(W_j)$ и не выполнено одно из равенств $p = q$ или $j = i$. Тогда существуют точки $x \in W_i$ и $y \in W_j$, такие что $u = T^p(x) = T^q(y)$. Заметим, что $p \neq q$ в силу биективности T, иначе бы множества W_j и W_i имели общую точку $T^{-p}(u) = T^{-q}(u)$, а это возможно лишь при $i = j$. Без ограничения общности считаем, что $p > q$. Тогда $T^{p-q}(x) = y \in W_j \subset A$, т. е. **индекс** точки x не больше $p - q$, но это невозможно, т. к. $x \in W_i$ и $0 \leqslant p < i$. Мы пришли к противоречию.

Зафиксируем некоторое натуральное число $k > 1$. Обозначим

$$P_k = W_1 \cup (W_2 \cup T(W_2)) \cup \ldots \cup (W_{k-1} \cup T(W_{k-1}) \cup \ldots \cup T^{k-2}(W_{k-1})) = \bigcup_{s=1}^{k-1} \bigcup_{n=0}^{s-1} T^n(W_s).$$

Определим преобразование T_k следующим образом:

$$T_k(x) = \begin{cases} T(x), & \text{если } x \in P_k; \\ T^m(x), & \text{если } x \in W_m, \text{ для некоторого } m, m \geqslant k. \end{cases}$$

Областью определения преобразования T_k будет множество

$$G_k = P_k \cup U_k.$$

T_k биективно на своей области определения G_k. Докажем это. Имеем

$$\begin{aligned} &T_k(T^s(W_m)) = T^{s+1}(W_m), && 0 \leqslant s < m-1, \quad m < k; \\ &T_k(T^{m-1}(W_m)) = W'_m, && m < k; \\ &T_k(W_s) = W'_s, && s \geqslant k. \end{aligned}$$

Пусть $u \in G_k$, докажем, что ее прообраз при отображении T_k существует и единственнен. Выше мы доказали, что множества $T^n(W_s)$ $(0 \leqslant n < s)$ не пересекаются между собой, поэтому $G_k = P_k \sqcup U_k$. Непосредственно проверяется, что $T_k(G_k) = T_k(P_k) \sqcup T_k(U_k) = G_k$. Отсюда вытекает существование прообраза любой точки $u \in G_k$. Единственность прообраза вытекает из того, что множества $T_k(P_k)$ и $T_k(U_k)$ не пересекаются. Действительно, пусть, например, $u \in T_k(P_k)$, тогда из равенства $u = T_k(x)$ вытекает равенство $u = T(x)$, осталось заметить, что T — биективно, поэтому точка x определена однозначно. Аналогично разбирается случай, когда $u \in T_k(U_k)$.

Итак, $T_k \colon G_k \to G_k$ — биективное отображение, сохранение им меры очевидно. G_k — **основное пространство**, его мера конечна. Мы можем применить вторую часть *теоремы Биркгофа–Хинчина*, получим

$$\int\limits_{G_k} \varphi_k(x)\, d\mu = \mu(A).$$

Понятно, что **частота возвращения** всех точек A при преобразовании T_k не меньше чем ν, это следует из того, что последовательность $\chi_A(T^n(x))$ получается из последовательности $\chi_A({T_k}^n(x))$ лишь добавлением нулей. Получаем $\nu \leqslant \dfrac{\mu(A)}{\mu(G_k)}$. Осталось лишь заметить, что величину $\mu(G_k)$ можно сделать сколь угодно большой, а из этого и следует требуемое равенство. ■

Применяя эту теорему, легко получить важное на практике

Следствие 1. *Пусть* $A \subset M$, $0 < \mu(A) < \infty$ *и* T — *сохраняющее меру биективное преобразование. Если* T-**орбита** *любого подмножества множества* A *положительной меры имеет бесконечную меру, то* **частота возвращения** *почти всех точек* A *равна нулю.*

Доказательство. Обозначим $B_n = \{x \in A\colon \varphi_A(x) \geqslant 1/n\}$. Пусть множество $B = \{x \in A\colon \varphi_A(x) \neq 0\}$ имеет положительную меру, тогда существует натуральное число s, такое что $\mu(B_s) > 0$. Обозначим $C = B_s$. Заметим, что если $x \in C$ и $T^n(x) \in A$, то $T^n(x) \in C$, это следует из того, что $\varphi_A(T^n(x)) = \varphi_A(x)$. Поэтому $\forall x \in C$ $\varphi_A(x) = \varphi_C(x)$. Учитывая этот факт и равенство $\mu(G(C)) = +\infty$, применим теорему к множеству C и придем к противоречию. Значит, $\mu(B) = 0$. ■

5. Теорема Шварцшильда–Литтлвуда

В заключение рассмотрим одну из известных задач эргодической теории. Как и раньше, зафиксируем тройку (M, μ, T). Пусть D — какое-то подмножество M положительной и конечной меры. Рассмотрим множество точек, которые «захватывает» D:

$$A = \{x \in M : \exists n \in \mathbb{N} \ \forall k > n \ \ T^k(x) \in D\}.$$

Оно измеримо, т. к.

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n+1}^{\infty} T^{-k}(D).$$

Докажем *теорему Шварцшильда–Литтлвуда* (см., например, [4, 5]), которая утверждает, что

$$\mu(A \setminus D) = 0.$$

Замечание 6. Если мера D бесконечна, то теорема, вообще говоря, неверна. В случае конечности меры M она прямо следует из теоремы Пуанкаре о возвращении.

Положим

$$C = \{x \in D : \forall n \in \mathbb{N} \ \ T^n(x) \in D\}.$$

Или, что то же самое:

$$C = D \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(D) \right).$$

Это множество измеримо и имеет конечную меру, т. к. является подмножеством множества D. Учитывая включение $T(C) \subset C$ и условие сохранения меры, получим, что множество $B = T^{-1}(C) \setminus C$ имеет меру нуль. Легко понять, что $\forall x \in A$ $\exists n$ $T^n(x) \in C$. Тогда $\forall x \in A \setminus C$ $\exists n$ $T^n(x) \in B$, т.е. $A \setminus C \subset G(B) = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} T^n(B)$. Откуда имеем, что $\mu(A \setminus C) = 0$, т.к. $\mu(B) = 0$. Учитывая включение $C \subset D$, получаем требуемое равенство.

Список литературы

[1] Халмош П. Р. *Лекции по эргодической теории*, Ижевск: «Удмуртский университет», 1999.

[2] Окстоби Дж. *Мера и категория*, М: «Мир», 1974.

[3] Козлов В. В. Весовые средние, равномерное распределение и строгая эргодичность, *УМН*, т. 60, вып. 6, с. 115–138.

[4] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики*, М: УРСС, 2002.

[5] Зигель К., Мозер Ю. *Лекции по небесной механике*, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая механика», 2001.