Движение двух сфер в идеальной жидкости. I. Уравнения движения в евклидовом пространстве. Первые интегралы и редукция

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, С. М. Рамоданов

Институт компьютерных исследований,
Удмуртский государственный университет;

Отдел математических методов нелинейной динамики (г. Ижевск)
Институт математики и механики УрО РАН

Россия, 426034, Ижевск, ул. Университетская, 1

E-mails: borisov@rcd.ru, mamaev@rcd.ru, ramodanov@mail.ru

Получено 12 ноября 2007 г.

В работе обсуждается вывод уравнений движения двух сфер в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости в трехмерном евклидовом пространстве. Указан способ понижения порядка, использующий новые переменные, образующие алгебру Ли. Рассмотрен один из простейших интегрируемых случаев системы.

Цитата: А. В. Борисов, И. С. Мамаев, С. М. Рамоданов, Движение двух сфер в идеальной жидкости. I. Уравнения движения в евклидовом пространстве. Первые интегралы и редукция, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, №4, с. 411–422.

Ключевые слова: движение двух сфер, идеальная жидкость, редукция, интегрируемость

A. V. Borisov, I. S. Mamaev, S. M. Ramodanov

Motion of two spheres in ideal fluid. I. Equations o motions in the Euclidean space. First integrals and reduction

The paper deals with the derivation of the equations of motion for two spheres in an unbounded volume of ideal and incompressible fluid in 3D Euclidean space. Reduction of order, based on the use of new variables that form a Lie algebra, is offered. A trivial case of integrability is indicated.

Citation: A. V. Borisov, I. S. Mamaev, S. M. Ramodanov, Motion of two spheres in ideal fluid. I. Equations o motions in the Euclidean space. First integrals and reduction, *Rus. J. Nonlin. Dynamics*, 2007, Vol. 3, No. 4, pp. 411–422.

Keywords: motion of two spheres, ideal fluid, reduction, integrability
MSC 2000: 53A05, 15A21

1. Введение и исторические комментарии

Задача о движении одного твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости получила глубокое развитие в классических трудах Томсона, Тэта и Кирхгофа и на сегодняшний день представляется достаточно хорошо изученной (полную библиографию см. в [18]). К сожалению, нельзя сказать того же о задаче о движении нескольких тел. Хотя общие уравнения движения нескольких тел в форме уравнений Лагранжа и указываются в трактатах Бассета и Ламба [1, 2] (современный вывод этих уравнений дан в [7]), эти уравнения носят весьма общий характер и для каждой конкретной задачи нуждаются в весьма значительных и отнюдь не тривиальных уточнениях.

Одна из простейших задач о движении в жидкости нескольких тел, задача о движении двух сфер, рассматривалась во многих работах, например в [3, 9, 10, 12, 13]. В силу вполне объяснимых сложностей технического плана (например, языковые, а также малодоступность некоторых изданий) в разных работах порой воспроизводились одни и те же результаты.

Хикс [3] полагает, что впервые задача о движении двух сфер была рассмотрена Стоксом в 1843 г. в его малоизвестной статье «О некоторых случаях движения жидкости». В этой работе была вычислена присоединенная масса сферы при ее движении а) внутри другой сферы, б) в полупространстве, в) в безграничном объеме идеальной жидкости в присутствии другой сферы. Там же Стоксом была сформулирована важная теорема об изображении дублета относительно сферы (см., например, [8]).

В период с 1863 по 1875 г.г. К. Бьеркнес опубликовал ряд работ (некоторые из них на французском и шведском языках), в которых изучалось взаимное влияние пульсирующих и осциллирующих сфер. Для верификации полученных теоретических результатов им (совместно с профессором Shiotz) была создана достаточно хитроумная экспериментальная установка, демонстрировавшаяся на выставке Paris Electrical Exhibition в 1881 г. Подробное описание установки и проведенных экспериментов дано В. Бьеркнесом (сыном К. Бьеркнеса) в [6].

В знаменитом трактате по натуральной философии Томсона (лорда Кельвина) и Тэта [14] изучена задача о двух сферах в предельной постановке, а именно задача о движении сферы в полупространстве, заполненном идеальной жидкостью. Показано, что сфера, движущаяся в направлении, перпендикулярном к ограничивающей плоскости, как бы отталкивается от нее (т. е. независимо от того, движется ли сфера к плоскости или от нее, на сферу со стороны жидкости действует сила, направленная от плоскости). Если же сфера движется параллельно плоскости, то сфера как бы притягивается к ней. Вскоре Томсон обобщил этот результат, рассмотрев задачу об огибании телом препятствия. Оказывается притяжение или отталкивание тела препятствием определяется углом между вектором перемещения тела и полным импульсом системы.

В 1871 году Гутрие публикует в «Philosophical Magazine» письмо Томсона (лорда Кельвина), содержащее некоторые результаты (правда, без вывода) о взаимодействии сфер, одна из которых колеблется, а другая может свободно перемещаться вдоль линии центров. В частности, там утверждалось, что если плотность свободной сферы меньше плотности жидкости, то в случае, когда расстояние между центрами меньше некоторого критического расстояния — сферы отталкиваются, когда же оно больше — сферы притягиваются.

Первое наиболее полное и систематическое изложение задачи о движении двух сфер было дано Хиксом [3] в 1879 г. Основная сложность этой задачи — вычисление кинетической энергии системы, представляющей собой квадратичную форму скоростей центров сфер с коэффициентами, включающими массы и присоединенные массы сфер. В [3] все коэффициенты были получены в виде рядов (позднее более изящные выражения для коэффициентов получил Бассет [9]), а также особенно подробно была изучена задача о движении сфер вдоль линии центров. Притяжение или отталкивание сфер, их предельные движения, определяются константами первых интегралов импульса и кинетической энергии, а также отношением массы сфер к массе вытесненной жидкости. Хикс, в частности, рассмотрел задачу, когда одна из сфер совершает колебания вдоль линии центров, а вторая сфера массы m_s при этом свободна.

Если m_s больше массы вытесненной жидкости m, то свободная сфера будет притягиваться к колеблющейся сфере. В случае $m_s < m$ (как уже ранее указывалось Томсоном) дело обстоит сложнее: если расстояние d между центрами сфер достаточно велико, то на свободную сферу действует отталкивающая сила, если же d меньше некоторого критического значения, то будет иметь место притяжение. В этой связи упомянем также недавнюю работу [19], где этот результат, используя усредненные уравнения движения, получен для тел произвольной формы. Данные результаты согласуются с наблюдениями К. Бьеркнеса [6], назвавшего это явление «принципом кинетической плавучести» («Kinetic buoyancy principle»), а также результатами работы [20], где обсуждается взаимодействие круговых цилиндров.

Используя результаты К. Бьеркнеса, Пирсоном в [10] получены уравнения движения сфер в предположении, что расстояние между центрами велико. (При этом предположении, однако очень кратко, задачу рассматривал и Кирхгоф [11]). Полученные уравнения не используются в [10] для определения качественной картины движения, а лишь для вычисления силы, с которой одна сфера действует на другую.

Кинематическая задача о движении двух сфер, а также взаимодействие сфер, поверхность одной из которых совершает колебательные движения, изучалась, помимо К. Бьеркнеса, также в работе [12]. В 1895 г. Н. Е. Жуковский [13] рассмотрел эту задачу в несколько более общей постановке, предположив, что движение жидкости, оказывающее воздействие на пульсирующую или осциллирующую сферу, вызвано не движением другой сферы, а совершается по определенному и заданному закону.

В связи с упомянутой задачей о движении двух сфер в жидкости укажем на родственную задачу, по которой также имеются интересные исследования. Речь идет о взаимодействии в несжимаемой и невесомой жидкости двух пульсирующих воздушных или газовых пузырьков. В XIX в. отец и сын Бьеркнесы обнаружили и дали физическое объяснение интересному явлению, которое несложно наблюдать экспериментально. Оказывается, что если пузырьки пульсируют в одинаковой фазе, то они притягиваются друг к другу, а если в противофазе, то отталкиваются. В книге [2] эта же задача названа в честь обоих Бьеркнесов. Для моделирования этой задачи пульсирующие в жидкости шары заменяются точечными диполями. Продвинутый теоретический анализ этой задачи был предпринят Хиксом в двух работах [4, 5].

Отметим, однако, что несмотря на обширные классические исследования, многие из которых, к сожалению, сейчас почти забыты (уже Ламб в своем фундаментальном трактате останавливается на этих вопросах очень схематично, ограничиваясь лишь некоторыми литературными ссылками), пока мало известно о динамике описанных систем. Указанные работы посвящены лишь различным способам выражения (например, в рядах) для кинетической энергии взаимодействующих сфер, а движение проанализировано лишь в одномерном случае (см. также [2]). Классики не смогли вывести уравнения, удобные для описания движения системы, а также не смогли понизить порядок уравнений, что возможно сделать вследствие наличия первых интегралов, вытекающих из динамических симметрий. В этой работе, задуманной как первая часть достаточно подробного динамического исследования, мы приведем схематично классический вывод уравнений движения и выполним редукцию системы, используя новые методы, основанные на исследовании алгебр Ли (см. [17]). С помощью этих же методов мы получим уже замкнутую гамильтонову систему, пригодную для аналитических и численных исследований, анализ которой мы и предлагаем дать в последующих статьях. Отметим также, что применение в данной задаче классической процедуры редукции Рауса, связанной с исключением циклических координат, очень затруднительно и сопряжено с нетривиальными геометрическими построениями. Развиваемый же нами подход выглядит в данной задаче достаточно простым и естественным.

2. Уравнения движения

Классиками было показано [14], что уравнения движения нескольких твердых тел в идеальной жидкости могут быть представлены в виде уравнений Лагранжа второго рода (отметим, что в трактате [14] значительное место уделено обоснованию применения исследования уравнений Лагранжа в обобщенных координатах к описанию движению твердых тел в жидкости. Обсуждение этих вопросов имеется также в трактате Ламба [2]). Причем при отсутствии внешних сил, а также в предположении, что тела не имеют сквозных отверстий, лагранжиан представляет собой полную кинетическую энергию системы «тела + жидкость», выраженную через обобщенные координаты и их производные по времени.

Рассмотрим задачу о движении в безграничном объеме идеальной жидкости двух сфер с твердыми границами, на которых выполнены условия непроницаемости. Жидкость предполагается покоящейся на бесконечности и совершающей безвихревое движение. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$ — координаты центров сфер O_1 и O_2. Радиусы сфер обозначим R_1 и R_2, а их массы — m_1 и m_2.

Пусть $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ — абсолютные скорости центров сфер, которые мы представим в виде $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_\tau + \boldsymbol{V}_n$ и $\boldsymbol{U} = \mathbf{U}_\tau + \boldsymbol{U}_n$, где вектора $\boldsymbol{V}_\tau, \boldsymbol{U}_\tau$ направлены вдоль прямой O_1O_2, а вектора $\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{U}_n$ перпендикулярны ей (рис. 1). Кинетическая энергия системы «сферы + жидкость» имеет вид [1]:

$$2T = a_1 U_n^2 + b_1 U\tau^2 + a_2 V_n^2 + b_2 V_\tau^2 + 2c_1(\boldsymbol{U}_n, \boldsymbol{V}_n) - 2c_2(\boldsymbol{U}_\tau, \boldsymbol{V}_\tau). \tag{2.1}$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i, включающие массы и присоединенные массы сфер, есть функции от расстояния s между центрами сфер; с точностью до $o(s^{-12})$ они записываются следующим образом [1, 3]:

$$a_1 = m_1 + \frac{1}{2}M_1\left(1 + \frac{3R_1^3R_2^3}{s^6}\left\{\frac{1}{4} + \frac{R_2^2}{s^2} + \frac{9R_2^4}{4s^4} + \frac{R_2^3(R_1^3 + 64R_2^3)}{16s^6}\right\}\right),$$

$$a_2 = m_2 + \frac{1}{2}M_2\left(1 + \frac{3R_1^3R_2^3}{s^6}\left\{\frac{1}{4} + \frac{R_1^2}{s^2} + \frac{9R_1^4}{4s^4} + \frac{R_1^3(R_2^3 + 64R_1^3)}{16s^6}\right\}\right),$$

$$b_1 = m_1 + \frac{1}{2}M_1\left(1 + \frac{3R_1^3R_2^3}{s^6}\left\{1 + \frac{3R_2^2}{s^2} + \frac{6R_2^4}{s^4} + \frac{11R_2^6}{s^6}\right\}\right),$$

$$b_2 = m_2 + \frac{1}{2}M_2\left(1 + \frac{3R_1^3R_2^3}{s^6}\left\{1 + \frac{3R_1^2}{s^2} + \frac{6R_1^4}{s^4} + \frac{11R_1^6}{s^6}\right\}\right),$$

$$c_1 = \frac{\pi\rho R_1^3R_2^3}{s^3}\left(1 + \frac{R_1^3R_2^3}{4s^6} + \frac{R_1^3R_2^3(R_1^2 + R_2^2)}{s^8}\right),$$

$$c_2 = \frac{2\pi\rho R_1^3R_2^3}{s^3}\left(1 + \frac{R_1^3R_2^3}{s^6} + \frac{3R_1^3R_2^3(R_1^2 + R_2^2)}{s^8}\right).$$

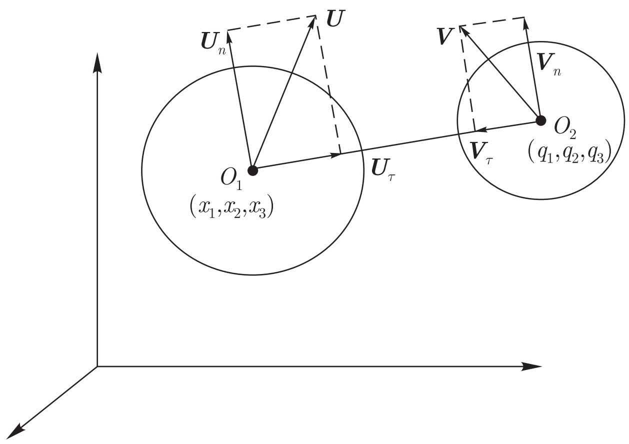

Рис. 1

Здесь ρ — плотность жидкости; $M_i = \dfrac{4}{3}\pi R_i^3 \rho$.

Используя далее тривиальные кинематические соотношения, несложно выразить кинетическую энергию T через $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{q}}$ и записать шесть уравнений Лагранжа, описывающих движение сфер (лагранжиан совпадает с кинетической энергией T). Эти уравнения, однако, оказываются очень громоздкими и для анализа задачи малопригодными.

Замечание. Остановимся вкратце на выводе формулы для кинетической энергии [1], а также некоторых выражений для коэффициентов a_i, b_i, c_i, ограничившись первыми членами асимптотики.

Кинетическую энергию системы «сферы + жидкость» представим в виде

$$T = T_s + T_f,$$

где T_f и T_s — кинетические энергии движения жидкости и сфер соответственно. Пусть U_τ, V_τ, U_n, V_n — проекции абсолютных скоростей $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ центров сфер на линию центров и на прямую, ей ортогональную. Тогда

$$T_s = \frac{1}{2} m_1 \left(U_n^2 + U_\tau^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(V_n^2 + V_\tau^2\right).$$

Для определения T_f воспользуемся хорошо известной формулой [2, 8]:

$$T_f = -\frac{\rho}{2} \iint\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \tag{2.2}$$

где поверхность S есть объединение поверхностей сфер $S_1 \cup S_2 = S$, n — внешняя нормаль к S, φ — потенциал течения, удовлетворяющий уравнению Лапласа и условию идеального непротекания на S.

Следуя Кирхгофу, потенциал φ представим в виде

$$\varphi = U_n \varphi_1 + U_\tau \varphi_2 + V_n \varphi_3 + V_\tau \varphi_4,$$

где $\varphi_2(\varphi_4)$ — потенциал, отвечающий движению жидкости в случае, когда первая (вторая) сфера движется с единичной скоростью в направлении к неподвижной второй (первой) вдоль линии центров; $\varphi_1(\varphi_3)$ — потенциал течения, возникающий при движении первой (второй) сферы с единичной скоростью в направлении перпендикулярном линии центров, а вторая (первая) при этом покоится.

Подставляя выражение для потенциала в (2.2), находим

$$2T_f = A_1U_n^2 + B_1U_\tau^2 + A_2V_n^2 + B_2V_\tau^2 + 2C_1U_nV_n - 2C_2U_\tau V_\tau.$$

Здесь, например,

$$B_1 = -\rho\iint\limits_S \varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}ds, \quad C_2 = -\frac{\rho}{2}\iint\limits_S \varphi_4\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\frac{\rho}{2}\iint\limits_{S_1\cup S_2} \varphi_2\frac{\partial\varphi_4}{\partial n}ds,$$

$$B_2 = -\rho\iint\limits_S \varphi_4\frac{\partial\varphi_4}{\partial n}ds.$$

Полная энергия системы «сферы + жидкость» запишется в виде

$$\begin{gathered} T = (A_1+m_1)U_n^2 + (B_1+m_1)U_\tau^2 + (A_2+m_2)V_n^2 + \\ + (B_2+m_2)V_\tau^2 + 2C_1U_nV_n - 2C_2U_\tau V_\tau. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Отсутствие некоторых перекрестных членов, например U_nU_τ, можно объяснить так: пусть вторая сфера неподвижна, тогда кинетическая энергия не должна изменяться при смене знака у U_n.

Приведем вычисления коэффициентов B_1, B_2, C_2, следуя [2, §98]. Пусть сферы движутся вдоль оси Ox, причем начало отсчета O совпадает в данный момент с центром первой сферы O_1 (рис. 2). Определим сначала потенциал φ_2, представляющий собой гармоническую функцию, удовлетворяющую условиям непротекания

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{S_1} = -\cos\theta, \qquad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{S_2} = 0, \tag{2.4}$$

где θ — угол сферической системы координат с полярной осью O_1x.

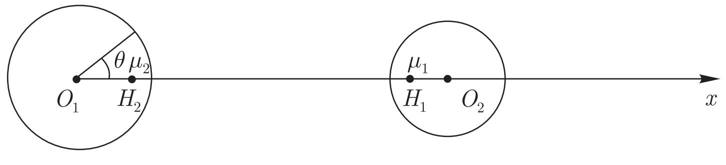

Рис. 2

Если бы вторая сфера отсутствовала, то течение жидкости, вызванное движущейся с единичной скоростью первой сферой описывалось бы потенциалом $\dfrac{R_1^3\cos\theta}{2r^2}$, ($r$ — расстояние до O_1), что соответствует потенциалу диполя интенсивности $\mu_0 = 2\pi R_1^3$, ось которого направлена вдоль O_1x. Такой потенциал удовлетворяет первому условию (2.4), но нарушает второе. Чтобы второе условие выполнялось поместим диполь интенсивности $\mu_1 = -\mu_0\dfrac{R_2^3}{s^3}$ в точку H_1, симметричную точке O_1 относительно второй сферы. Это в свою очередь приведет к нарушению первого условия (2.4), и поэтому поместим диполь μ_2 в точку H_2, симметричную точке H_1 относительно первой сферы и т. д. Интенсивности диполей $\mu_1, \mu_2, \dots$ и их расстояния $f_1, f_2, \dots$ до точки O_1 удовлетворяют соотношениям:

$$f_1 = s - \frac{R_2^2}{s}, \qquad f_2 = \frac{R_1^2}{f_1}, \dots$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = -\frac{R_2^3}{s^3}, \qquad \frac{\mu_2}{\mu_1} = -\frac{R_1^3}{f_1^3}, \dots \qquad s = |O_1 O_2|.$$

(Величины μ_i достаточно быстро убывают, так что соответствующий ряд для φ_2 сходится.) Аналогично и потенциал φ_4 определяется диполями $\widetilde{\mu_0}, \widetilde{\mu_1}, \widetilde{\mu_2}, \widetilde{\mu_3}, \dots$ на расстоянии $s, s - \widetilde{f_1}, s - \widetilde{f_2}, s - \widetilde{f_3}, \dots$ от O_1, где

$$\widetilde{\mu_0} = 2\pi R_2^3, \quad \widetilde{\mu_1} = -\frac{R_1^3}{s^3}\widetilde{\mu_0}, \quad \widetilde{\mu_2} = -\frac{R_2^3}{\widetilde{f_1}^3}\widetilde{\mu_1}, \quad \widetilde{\mu_3} = -\frac{R_1^3}{(s - \widetilde{f_2})^2}, \dots .$$

$$\widetilde{f_1} = s - \frac{R_1^2}{s}, \quad \widetilde{f_2} = \frac{R_2^2}{\widetilde{f_1}}, \quad \widetilde{f_3} = s - \frac{R_1^2}{s - \widetilde{f_2}}.$$

Разложим φ_2 в ряд Фурье на поверхности первой сферы

$$4\pi\varphi_2 = (\mu_0 + \mu_2 + \mu_4 + \dots)\frac{\cos\theta}{R_1^2} - 2\left(\frac{\mu_1}{f_1^3} + \frac{\mu_3}{f_3^3} + \dots\right) R_1 \cos\theta + \dots \tag{2.5}$$

Заметим, что в силу (2.4),

$$B_1 = \rho \iint_{S_1} \varphi_2 \cos\theta ds,$$

причем обозначенные многоточием члены ряда Фурье сократятся при интегрировании. Отсюда

$$B_1 = \frac{\rho}{3}(\mu_0 + 3\mu_2 + \dots) = \frac{2}{3}\pi\rho R_1^3 \left(1 + \frac{3R_1^3 R_2^3}{s f_1^3} + \dots\right) =$$
$$= \frac{1}{2} M_1 \left(1 + \frac{3R_1^3 R_2^3}{s^6} + o(s^{-6})\right), \quad M_1 = \frac{4\pi\rho R_1^3}{3}$$

Выражение для B_2 может быть получено из соображений симметрии:

$$B_2 = \frac{1}{2} M_2 \left(1 + \frac{3R_1^3 R_2^3}{s^6} + o(s^{-6})\right), \quad M_2 = \frac{4\pi\rho R_2^3}{3}.$$

И, наконец, записав для φ_4 разложение, аналогичное (2.5), найдем

$$C_2 = -\frac{\rho}{2} \iint_{s_1} \varphi_4 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} ds = \rho(\widetilde{\mu_1} + \widetilde{\mu_3} + \dots) = 2\pi\rho\frac{R_1^3 R_2^3}{s^3} + o(s^{-3}).$$

С учетом полученных выражений для B_1, B_2, C_2, сравнивая (2.3) и (2.1), находим что с точностью до малых порядка s^{-6} выполнены соотношения:

$$b_i = B_i + m_i, \qquad c_2 = C_2.$$

Аналогично можно доказать равенство и остальных коэффициентов в формах (2.1) и (2.3). Коэффициенты A_1, A_2, C_1 могут также быть вычислены построением системы инверсных образов. Однако для них выкладки существенно усложняются. Дело в том, что если ось диполя не проходит через центр сферы, то им генерируемое на поверхности поле скоростей не может быть скомпенсировано лишь одним диполем в инверсно-симметричной точке — необходимо будет добавить внутрь сферы еще некоторую радиально распределенную систему источников и стоков. Поэтому за обстоятельным изложением данного вопроса мы отсылаем читателя к [1, 3, 9].

3. Редукция системы в алгебраическом виде

Гамильтониан $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p})$, где $\boldsymbol{p} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}$, $\boldsymbol{y} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}$, нашей задачи инвариантен относительно действия евклидовой группы движений $E(3)$, являющейся полупрямым произведением групп вращений $SO(3)$ и абелевой группы трансляций. При этом уравнения Гамильтона имеют первые интегралы, скобка Пуассона которых образует алгебру Ли $e(3)$:

$$P_i = y_i + p_i,\ M_i = p_{i+1}q_{i+2} - p_{i+2}q_{i+1} + y_{i+1}x_{i+2} - y_{i+2}x_{i+1},\ i \in \overline{1,3}. \tag{3.1}$$

Несложно видеть, что указанная инвариантность системы относительно группы $E(3)$ обеспечивает возможность редукции на 4 степени свободы. Выполним ее в явном виде.

Следуя общим идеям Ли и Картана (см., например, [17]), выберем в качестве новых редуцированных переменных величины, коммутирующие с интегралами движения (3.1). Кроме того нам необходимо добиться наиболее простого и приемлемого для дальнейшего анализа вида этих уравнений. Для этого (ср. с классической динамикой твердого тела [18]) новые переменные желательно выбрать так, чтобы они при коммутации образовывали алгебру Ли (в отличие от канонической коммутации переменных, в которых приведенный гамильтониан может быть достаточно сложен). Выберем в качестве новых переменных:

1. квадрат расстояния между центрами
$$f_1 = s^2 = \sum_{i=1}^{3}(x_i - q_1)^2;$$
2. квадраты импульсов
$$f_2 = \sum_{i=1}^{3} y_i^2, \qquad f_3 = \sum_{i=1}^{3} p_i^2;$$
3. скалярные произведения
$$f_4 = \sum_{i=1}^{3}(x_i - q_i)y_i, \qquad f_5 = \sum_{i=1}^{3}(x_i - q_i)p_i, \qquad f_6 = \sum_{i=1}^{3} y_i p_i.$$

Известно [15], что для канонической симплектической структуры $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ квадратичные функции от p_i, q_i образуют алгебру Ли $sp(n)$. Поэтому функции $f_1, \ldots, f_6$ образуют некоторую подалгебру $sp(n)$ (исследование ее см. далее). При таком подходе часть динамической информации может быть получена из анализа самой алгебры Ли и ее орбит, что заведомо невозможно при прямом каноническом формализме. Тем не менее далее мы введем приведенные канонические переменные, используя чисто алгебраические алгоритмы (а не опираясь подобно классикам на неочевидные геометрические соображения, связанные с поиском циклических координат).

Действительно, гамильтониан может быть выражен через новые переменные:

$$H = \widetilde{a_2}(f_1f_2 - f_4^2) + \widetilde{a_1}(f_1f_3 - f_5^2) + \widetilde{c_1}(f_5f_4 - f_6f_1) - \\ - \widetilde{c_2}f_5f_4 + \widetilde{b_1}f_5^2 + \widetilde{b_2}f_4^2,$$

$$\widetilde{a_i} = \frac{a_i}{\triangle_1}, \quad \widetilde{c_1} = \frac{2c_1}{\triangle_1}, \quad \triangle_1 = 2s^2(a_1a_2 - c_1^2) > 0,$$

$$\widetilde{b_i} = \frac{b_i}{\triangle_2}, \quad \widetilde{c_2} = \frac{2c_2}{\triangle_2}, \quad \triangle_2 = 2s^2(b_1b_2 - c_2^2) > 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Переменные $f_1, \ldots, f_6$ образуют алгебру Ли со скобкой

$$\|\{f_i, f_j\}\| = \begin{pmatrix} 0 & 4f_4 & -4f_5 & 2f_1 & -2f_1 & 2f_5 - 2f_4 \\ -4f_4 & 0 & 0 & -2f_2 & -2f_6 & 0 \\ 4f_5 & 0 & 0 & 2f_6 & 2f_3 & 0 \\ -2f_1 & 2f_2 & -2f_6 & 0 & -f_5 - f_4 & f_6 - f_2 \\ 2f_1 & 2f_6 & -2f_3 & f_5 - f_4 & 0 & f_3 - f_6 \\ -2f_5 + 2f_4 & 0 & 0 & -f_6 + f_2 & -f_3 + f_6 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Ранг полученной скобки равен 4, в то время как ранг первоначальной скобки $\{x, y\}, \{q, p\}$ равнялся 12; таким образом, (пока не в канонической форме) нами выполнена редукция на 4 степени свободы. Разберемся в структуре алгебры, определяемой скобкой (3.2). Это позволит нам получить описание ее орбит и, используя метод цепочек подалгебр [17], построить симплектические переменные, которые и обеспечивают требуемое понижение порядка (в классическом смысле).

Функциями Казимира служат квадрат полного импульса $\boldsymbol{P}^2$ и квадрат скалярного произведения $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{P})^2$:

$$\boldsymbol{P}^2 = f_2 + f_3 + 2f_6, \qquad \mathcal{D}^2 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{P})^2 = \begin{vmatrix} f_3 & f_6 & f_5 \\ f_6 & f_2 & f_4 \\ f_5 & f_4 & f_1 \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

Вычислив собственные вектора формы Килинга [16], введем в алгебре (3.2) новые образующие $\boldsymbol{x} = (S_1, S_2, S_3, N_1, N_2, N_3)$.

$$f_1 = 2\alpha^2(S_2 - S_3), \quad f_2 = -\frac{2}{\alpha^2}(S_3 + S_2) - \alpha^3 N_2 + \frac{N_3}{8},$$

$$f_3 = -\frac{2}{\alpha^2}(S_2 + S_3) + \alpha^3 N_2 + \frac{N_3}{8}, \quad f_4 = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}N_1 + 2S_1,$$

$$f_5 = -2S_1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}N_1, \quad f_6 = \frac{2}{\alpha^2}(S_2 + S_3) + \frac{N_3}{8}, \quad \alpha = 3^{\frac{1}{8}}.$$

Для них таблица коммутационных соотношений и функции Казимира примут вид:

$$\|\{x_i, x_j\}\| = \begin{pmatrix} 0 & S_3 & S_2 & -\frac{N_1}{2} & \frac{N_2}{2} & 0 \\ -S_3 & 0 & -S_1 & -\frac{N_2}{2} & -\frac{N_1}{2} & 0 \\ -S_2 & S_1 & 0 & -\frac{N_2}{2} & \frac{N_1}{2} & 0 \\ \frac{N_1}{2} & \frac{N_2}{2} & \frac{N_2}{2} & 0 & -N_3 & 0 \\ -\frac{N_2}{2} & \frac{N_1}{2} & -\frac{N_1}{2} & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{P}^2 = \frac{N_3}{2}, \quad \mathcal{D}^2 = 2N_3(S_3^2 - S_1^2 - S_2^2) - 2N_2S_1N_1 + N_2^2(S_3 - S_2) + N_1^2(S_2 - S_3). \tag{3.5}$$

Линейная оболочка N_1, N_2, N_3 образует идеал в алгебре l_6, соответствующей скобке (3.2). Таким образом, l_6 есть полупрямая сумма груп $so(2,1)$ и идеала.

4. Симплектические координаты

Построим симплектические координаты (l, g, L, G) на орбите, заданной соотношениями [7], аналогичные переменным Андуайе в динамике твердого тела [17]. Для этого введем их сначала на подалгебре $\{S_1, S_2, S_3\}$, а затем распространим на всю алгебру. В динамике твердого тела классические переменные Андуайе были введены [17, 18] как раз без использования чисто геометрических и механических соображений (которые весьма запутаны — в некотором смысле переменные Андуайе явились результатом поисков удобных систем переменных, предпринятых еще Пуассоном, Якоби, Серре и Шарлье). В рассматриваемой здесь задаче о двух сферах построение геометро-механических интерпретаций движения (наподобие известных в классической динамике твердого тела конструкций Пуассона, Серре, Андуайе) представляется тем более затруднительным, что, возможно, и объясняет тот факт, что классиками приведенные уравнения движения так и не были получены.

На подалгебре $so(2,1)$ в качестве переменной действия выберем $S_3 = L$. С учетом таблицы (3.4), а также соотношения $\{l, L\} = 1$ найдем

$$\{L, S_1\} = -\frac{\partial S_1}{\partial l} = -S_2, \qquad \{L, S_2\} = -\frac{\partial S_2}{\partial l} = S_1.$$

Отсюда $S_1 = A\sin l, S_2 = A\cos l$. Подбирая A таким образом, чтобы выполнялось $\{S_1, S_2\} = S_3$, получаем

$$S_1 = \sqrt{L^2 - G^2}\sin l, \qquad S_2 = \sqrt{L^2 - G^2}\cos l, \qquad S_3 = L.$$

Функция Казимира $G^2 = S_3^2 - S_1^2 - S_2^2$ подалгебры $so(2,1)$ равна $\frac{1}{16}\left(\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{p})\right)^2$. Решая далее линейные уравнения

$$\{G^2, N_1\} = -\frac{\partial N_1}{\partial g} \cdot 2G = S_1N_1 + N_2S_2 - N_2S_3,$$

$$\{G^2, N_2\} = -\frac{\partial N_2}{\partial g} \cdot 2G = -S_1N_2 + N_1S_2 + N_1S_3,$$

и подбирая константы интегрирования таким образом, чтобы выполнялись коммутационные соотношения (3.4), находим

$$N_1 = F(L,G) \cdot \left(\frac{\sqrt{L^2 - G^2} - L}{G} \sin\frac{g}{2} \cos\frac{l}{2} - \cos\frac{g}{2} \sin\frac{l}{2} \right),$$

$$N_2 = F(L,G) \cdot \left(\frac{L - \sqrt{L^2 - G^2}}{G} \sin\frac{g}{2} \sin\frac{l}{2} - \cos\frac{g}{2} \cos\frac{l}{2} \right),$$

$$F(L,G) = \frac{\sqrt{(L + \sqrt{L^2 - G^2}) \cdot (\mathcal{D}^2 - 4P^2G^2)}}{G}.$$

Переменные L, G, l, g являются каноническими, через них может быть выражен гамильтониан, правда, весьма громоздким способом. Гамильтониан зависит от D и p как от параметров и задает приведенную гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

В заключение укажем простейший интегрируемый случай. При сужении системы на пуассоново многообразие $\boldsymbol{P}^2 = 0$ получаем систему с одной степенью свободы. Действительно, из (3.3) следует, что $\mathcal{D}^2 = 0$, при этом $N_1 = N_2 = 0$, и, следовательно, уравнения для переменных S_1, S_2, S_3 отделяются. Функция $D^2 = S_3^2 - S_1^2 - S_2^2$ при этом является дополнительным интегралом, обеспечивающим интегрируемость системы в квадратурах. Интересно было бы дать подробный анализ этой интегрируемой задачи.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-1312.2006.1), при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-01058), ЕНО «Регулярная и хаотическая гдродинамика» (грант РФФИ 07-01-92210) и INTAS (грант 04-80-7297).

Список литературы

[1] Basset A. B. *A Treatise on Hydrodynamics*. Deighton, Bell & co., 1888.

[2] Lamb H. *Hydrodynamics (6th ed.)*. Cambridge University Press, 1932.

[3] Hicks W. M. On the motion of two spheres in a fluid. *Phil. Trans.*, 1880, pp. 455–493.

[4] Hicks W. M. On the problem of two pulsating spheres in a fluid. Part I. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1880, Vol. 3, Pt. 7.

[5] Hicks W. M. On the problem of two pulsating spheres in a fluid. Part II. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1880, Vol. 4, Pt. 1.

[6] Bjerknes V. F. K. *Fields of force*, N. Y., Columbia Univ. Press, 1906.

[7] Kanso E., Marsden J. E., Rowley C. W., Melly-Huber J. B. Locomotion of articulated bodies in a perfect fluid. *J. Nonlinear Science*, 2005, vol. 15, pp. 255–289.

[8] Milne-Thomson L. M. *Theoretical Hydrodynamics (4th ed.)*. London, MacMillan & co., 1962.

[9] Basset A. B. On the motion of two spheres in a liquid, and allied problems, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 18, pp. 369–378.

[10] Pearson K. On the motion of spherical and ellipsoidal bodies in fluid media. *Quarterly Journal*, vol. 20, pp. 60–80.

[11] Kirchhoff G. R. *Vorlesungen über Mechanik*. Teubner, Leipzig, 1883.

[12] Herman R. A. On the motion of two spheres in a fluid, and allied Problems. *Quarterly Journal*, 1887, vol. 22., p. 204–262.

[13] Жуковский Н. Е. Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующие на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы. *Собр. сочинений*, М.-Л.: ГИТТЛ, 1949, т. 2, с. 670–688.

[14] Thompson W., Tait P. G. *Treatise on Natural Philosphy*. Cambridge University Press, 1987.

[15] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. *Симплектическая геометрия*. Ижевск: Изд-во «РХД», 2000.

[16] Барут А., Рончка Р. *Теория представлений групп и ее приложения*. Том 1, Том 2, М.: Мир, 1980.

[17] Борисов А. В, Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*. Ижевск: Изд-во «РХД», 1999.

[18] Борисов А. В, Мамаев И. С. *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.

[19] Ragazzo C. G. Dynamics of many bodies in a liquid: Added–mass tenzor of compounded bodies and systems with a fast oscillating body. *Physics of fluids*, 2002, vol. 14, №5, pp. 1590–1600.

[20] A.V. Borisov, I.S. Mamaev, S.M. Ramodanov, Dynamics of two interacting circular cylinders in perfect fluid, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2007, vol.19, no. 2, pp. 235–253.