Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным множеством периодических точек[1]

С. Смейл

Цель данного сообщения — определить на двумерной сфере S^2 дифференцируемый гомеоморфизм, который, будучи структурно устойчивым в смысле Андронова—Понтрягина [1] вместе с тем имеет периодические точки сколь угодно больших периодов и не локально связное минимальное множество.

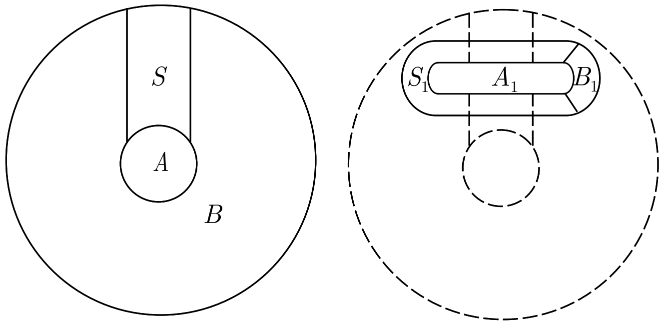

Рис. 1

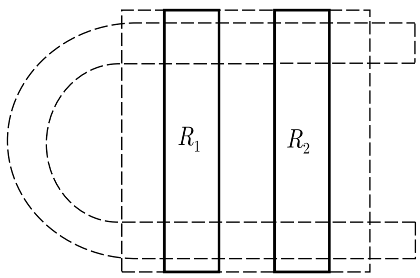

Рис. 2

Согласно [2], это отвечает на вопрос, поставленный Андроновым (можно рассмотреть индуцированный поток на $S^2 \times S^1$).

Напомним определение структурной устойчивости. Два дифференцируемых (C^∞) гомеоморфизма T, T^1 замкнутого C^∞ многообразия M называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M \to M$ такой, что $hT = T^1 h$. Они называются ε-эквивалентными, если гомеоморфизм h можно выбрать так, чтобы он отличался (в любой точке) от тождественного отображения менее, чем на ε. Пусть d_1 — это C^1-метрика на пространстве τ_m дифференцируемых гомеоморфизмов многообразия M. Тогда $T \in \tau_m$ называется структурно устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что все $T^1 \in \tau_m$, удовлетворяющие неравенству $d_1(T, T^1) < \delta$, ε-эквиваленитны T.

Теперь мы опишем дифференцируемый гомеоморфизм $T : S^2 \to S^2$ со свойствами, указанными выше. Для удобства мы задаём T на плоскости E^2, понимая E^2 как $S^2 \setminus p$, где $Tp = p$.

[1] S. Smale, A Structurally Stable Differentiable Homeomorphism with an Infinite Number of Periodic Points, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, 12-18 сентября 1961 г.). Т. 2: Качественные методы теории нелинейных колебаний, Изд-во АН УССР, Киев, 1963, с. 365–366.

Дифференцируемый гомеоморфизм T преобразует области, как показано на рис. 1 ($B \to B_1$ и т.д.), и, кроме того, он удовлетворяет следующим условиям:

a) Матрица Якоби отображения T имеет собственные числа, по модулю меньшие единицы, на внешней части множества T^{-1}(внешняя граница B) и на B_1;

b) $T^{-1}(S \cap S_1)$ представляет собой два вертикальных прямоугольника R_1, R_2 в S (как показано на рис. 2), и на каждом из этих прямоугольников отображение T является «почти» линейным: оно достаточно близко в C^1-смысле к линейному отображению на R_1, R_2.

Теперь можно построить естественное взаимно-однозначное соответствие между точками множества $K = \cap_{m=-\infty}^{\infty} T^m(S)$ и совокупностью всех бесконечных в обе стороны последовательностей из единичек и двоек с фиксированным положением «десятичной запятой»: $\ldots 1211,\ 21112 \ldots$ и т.д.

При этом периодическим точкам в K соответствуют периодические последовательности. Исходя из указанного описания, можно получить нормальную форму для T и использовать её для построения гомеоморфизма, приведённого в данном примере.

Список литературы

[1] Андронов, А.А., Понтрягин, Л.С., Грубые системы, *Докл. АН СССР*, т. 14, №5, 1937, с. 247–250.

[2] Markus, L., On the behaviour of the Solutions of a Differential System Near a Periodic Solution, with Applications to the Theory of Structurally Stable Systems, Technical Report 8, O O R project 1469, University of Minnesota, 1959.