

УДК 531.01, 531.36, 531.38

# Динамика твердого тела при наличии его соударений с твердой поверхностью

**А. П. Маркеев**

Институт проблем механики РАН  
119526, Россия, Москва, пр. Вернадского, 101, стр. 1  
markeev@ipmnet.ru

*Получено 26 ноября 2007 г.*

Излагаются основные методы, алгоритмы и результаты исследования нелинейных колебаний и устойчивости стационарных вращений и периодических движений твердого тела в однородном поле тяжести при наличии его соударений с твердой поверхностью.

Ключевые слова: твердое тело, связи, соударения, устойчивость

**A. P. Markeev**

## **Dynamics of a rigid body that collides with a rigid surface**

The paper deals with non-linear oscillations and analysis of stability of stationary rotations and periodic motions of a rigid body that collides with a rigid surface in a uniform gravity field. Along with new results an overview of the fundamental methods and algorithms engaged is given.

Keywords: rigid body, constraint, collision, stability

Mathematical Subject Classifications: 70E15, 70F35, 70E50, 70H05



## 1. Введение

В последние десятилетия началось изучение динамики тела, движущегося над твердой поверхностью, подвижной или неподвижной, в предположении о том, что тело время от времени соударяется с этой поверхностью. До недавнего времени подобные задачи рассматривались в теории и приложениях виброударных систем, но там чаще всего изучались не тела конечных размеров, а материальные точки. Динамика вращающихся тяжелых твердых тел, соударяющихся с твердой поверхностью, несравненно более сложна.

Это научное направление принадлежит разделу механики, изучающему динамику систем с неударяющими связями. Наиболее актуальными здесь являются следующие задачи: математическое моделирование и анализ явления удара в механических системах; экспериментальное исследование физических явлений, сопровождающих соударение тел; развитие аналитической механики систем с неударяющими связями; исследование нелинейных колебаний и устойчивости движения в системах с соударениями; анализ динамики вращающихся тел при наличии их соударений с неподвижной твердой поверхностью и динамики твердого тела на вибрирующем основании; совершенствование методов и алгоритмов анализа виброударных систем; разработка теории безударных движений в системах с неударяющими связями. К наиболее важным научным результатам, полученным к настоящему времени при исследовании этих задач, относятся следующие результаты: получена гамильтонова форма уравнений движения систем с идеальной неударяющей связью; методы КАМ-теории (Колмогорова—Арнольда—Мозера) распространены на системы с неаналитической функцией Гамильтона; получена новая (универсальная) форма уравнений движения твердого тела на плоскости, применимая на интервалах времени, включающих как фазу свободного движения тела, так и фазу его движения при наличии контакта с плоскостью; исследована задача об устойчивости положений равновесия систем с идеальной неударяющей связью; решена задача об устойчивости перманентных вращений твердого тела при наличии упругих соударений с неподвижной абсолютно гладкой плоскостью, обнаружена «квантованность» областей устойчивости по высоте подскока тела над плоскостью; получены общие условия существования безударных движений систем с неударяющей связью, дан анализ устойчивости таких движений в случае их периодичности; рассмотрен ряд конкретных задач динамики твердого тела при наличии соударений (дан анализ движения твердого тела над плоскостью, исследована орбитальная устойчивость движения тяжелого однородного шара над цилиндрической поверхностью с горизонтальной образующей, исследованы периодические движения эллипсоида при наличии соударений с неподвижной абсолютно гладкой плоскостью, исследованы безударные движения связки двух тел на круговой орбите спутника Земли и др.).

Данный обзор состоит из двух частей. Первая часть посвящена изложению методов и алгоритмов анализа динамики твердых тел в системах с неударяющей связью. Во второй части излагаются основные результаты, полученные при исследовании конкретных задач динамики твердого тела при наличии соударений.

## 2. Методы и алгоритмы исследования движения твердого тела при наличии соударений

### 2.1. О методе припасовывания

Пусть твердое тело, имеющее выпуклую поверхность без заострений и ребер, движется в однородном поле тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью. Во время движения тело может соударяться с плоскостью.

Движение тела отнесем к неподвижной системе координат  $Oxyz$  с началом в некоторой точке плоскости, ось  $Oz$  направим вертикально вверх. С телом жестко свяжем систему координат  $O\xi\eta\zeta$ , оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции. Ориентация тела относительно неподвижной системы координат задается углами Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ . Единичный вектор  $\gamma$  оси  $Oz$  в системе  $O\xi\eta\zeta$  задается компонентами  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ :

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta. \quad (2.1)$$

Пусть  $M$  — ближайшая к горизонтальной плоскости  $Oxy$  точка поверхности тела. Ее координаты  $\xi, \eta, \zeta$  в системе  $O\xi\eta\zeta$  будут функциями углов  $\theta, \varphi$ , определяемыми по виду уравнения  $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ , задающего форму поверхности тела.

Если  $x, y, z$  — координаты центра тяжести тела в системе  $Oxyz$ ,  $m$  — масса тела,  $g$  — ускорение свободного падения,  $A, B, C$  — главные центральные моменты инерции тела,  $p, q, r$  — проекции его угловой скорости на оси  $G\xi, G\eta, G\zeta$ , то кинетическая и потенциальная энергия определяются выражениями

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \Pi = mgz, \quad (2.2)$$

где

$$p = \dot{\psi}\gamma_1 + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad q = \dot{\psi}\gamma_2 - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad r = \dot{\psi}\gamma_3 + \dot{\varphi}. \quad (2.3)$$

Ограничение на перемещения тела выражается геометрической неударяющей связью

$$q_0 \geq 0, \quad (2.4)$$

где

$$q_0 = z - d, \quad d = d(\theta, \varphi) = -(\xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta\gamma_3),$$

$d$  — расстояние от центра тяжести тела до горизонтальной плоскости, проходящей через точку  $M$ . Неравенство  $q_0 \geq 0$  означает, что точка  $M$  тела не может располагаться ниже плоскости  $Oxy$ .

При наличии связи (2.4) следует различать три возможных типа движения тела: свободное ( $q_0 > 0$ ), опорное ( $q_0 = \dot{q}_0 = 0$ ) и импульсивное, или ударное ( $q_0 = 0, \dot{q}_0 < 0$ ). Уравнения движения можно получить из теорем об изменении количества движения  $\mathbf{Q}$  тела и его кинетического момента  $\mathbf{K}$  относительно точки  $G$ .

В случае свободного движения имеем такие два векторных уравнения

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -mg\gamma, \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = 0. \quad (2.5)$$

В скалярной форме они запишутся в виде системы шести уравнений:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Система (2.6)–(2.7) должна рассматриваться с учетом кинематических соотношений (2.1), (2.3).

Из уравнений (2.6)–(2.7) видно, что в случае свободного движения твердого тела его центр масс движется по параболе или вертикальной прямой, а вращение вокруг центра масс представляет собой хорошо изученное движение Эйлера–Пуансо [1,2].

В опорной фазе движения имеем иные уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -mg\gamma + \mathbf{R}, \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{GM} \times \mathbf{R}, \quad q_0 = 0. \quad (2.8)$$

Здесь  $\mathbf{R}$  — реакция плоскости. Зависимость  $\mathbf{R}$  от кинематических параметров движущегося тела определяется характером трения в точке контакта  $M$  поверхности тела и опорной плоскости  $Oxy$ . Анализ опорной фазы движения тела посвящены многочисленные исследования (см., например, монографию [2] и приведенную в ней библиографию).

Уравнения (2.8) справедливы лишь до тех пор, пока вертикальная составляющая  $N$  реакции  $\mathbf{R}$  остается положительной. В момент, когда она становится отрицательной, опорная фаза заканчивается, тело подпрыгивает над плоскостью и вместо уравнений (2.8) надо пользоваться системой (2.5).

Под влиянием силы тяжести в некоторый момент времени  $t_0$  контакт поверхности тела и плоскости возобновляется, что в общем случае сопровождается ударом (возможны и безударные движения; см., например, работы [64,66,67]). Классические уравнения теории удара имеют вид [3]:

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \Delta \mathbf{K} = \mathbf{GM} \times \mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{R} dt, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{I}$  — ударный импульс,  $\tau$  — продолжительность удара, которая считается пренебрежимо малой. Если удар упругий, то после него снова начинается фаза свободного движения твердого тела и так далее.

Таким образом, движение тела при наличии связи (2.4) состоит из участков, где скорость центра масс и угловая скорость тела непрерывны, и ударов, когда эти величины изменяются скачком. Последнее приводит к разрывным фазовым траекториям. Построение этих траекторий можно осуществить методом «припасовывания» [4]. Суть этого метода состоит в том, что поэтапно интегрируются дифференциальные уравнения движения на каждом из участков безударного движения, а начальные условия для каждого участка находятся по конечным значениям переменных на предыдущем участке.

Практическое применение метода припасовывания осложняется тем, что моменты ударов заранее неизвестны, а само «припасовывание» может быть сложно выполнимым технически. Кроме того, если удары не вполне упруги, то переход от прыжков тела к опорной фазе сопровождается бесконечным числом ударов на конечном интервале времени [5]. Здесь, очевидно, метод припасовывания вообще неприменим.

## 2.2. Универсальная форма уравнений движения твердого тела на плоскости

Упомянутые в конце раздела 2.1 сложности могут быть преодолены при помощи предложенной в [6,7] новой формы уравнений движения твердого тела на горизонтальной плоскости. Эта форма является универсальной, так как она пригодна для описания опорной фазы, фазы свободного движения и ударов тела о плоскость. В предложенном в [6,7] подходе фазовые переменные сохраняют непрерывность во все время движения, что обеспечивает эффективность аналитических и численных методов исследования.

**Случай абсолютно гладкой плоскости.** Пусть плоскость абсолютно гладкая. Удар тела о плоскость считаем упругим, коэффициент восстановления равен  $\kappa$  ( $0 \leq \kappa < 1$ ).

Реакция  $\mathbf{R}$  перпендикулярна плоскости,  $\mathbf{R} = (0, 0, N)$ ,  $N \geq 0$ . Уравнения (2.8) запишем в виде

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = N - mg, \quad \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{GM} \times \mathbf{R} \quad (2.10)$$

Первые два уравнения системы (2.10) отделяются от остальных уравнений и легко интегрируются. Правые части остальных уравнений линейны относительно величины  $N$ . Составляя

линейную комбинацию этих уравнений, можно преобразовать их к такой форме, когда из четырех скалярных уравнений лишь одно будет содержать нормальную реакцию  $N$ . Остальные три уравнения инвариантны типу движения: они остаются справедливыми и при свободном движении, и при ударах. Процедуру исключения реакции  $N$  удобно осуществить при помощи уравнений Лагранжа.

Положив в (2.10)  $z = q_0 + d(\theta, \varphi)$ , получим

$$m(\dot{q}_0 + d_\theta \dot{\theta} + d_\varphi \dot{\varphi}) = N - mg, \quad \dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta}, \quad \dot{p}_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi}, \quad \dot{p}_\psi = \frac{\partial L}{\partial \psi}, \quad (2.11)$$

где  $p_\theta = \partial L / \partial \dot{\theta}$ ,  $p_\varphi = \partial L / \partial \dot{\varphi}$ ,  $p_\psi = \partial L / \partial \dot{\psi}$ ,  $L = T - \Pi$  — функция Лагранжа. Величина  $N$  содержится только в первом из уравнений (2.11). Запишем его в виде

$$\dot{q}_0 = UN + F, \quad (2.12)$$

где  $U, F$  зависят от  $q_0, \varphi, \theta, \dot{q}_0, p_\theta, p_\varphi, p_\psi$ , причем  $U > 0$ . В свободном полете тела  $q_0 > 0, N = 0$ ; при ударах вектор ударного импульса  $\mathbf{I}$  из (2.9) вертикален, а его модуль находится из условия

$$\dot{q}_0^+ = -\kappa \dot{q}_0^-, \quad (2.13)$$

где знаки плюс и минус у величины  $\dot{q}_0$  соответствуют окончанию и началу удара. Для представления движения в переменных, непрерывных во все время движения в статьях [6,7] предложена следующая замена переменных:

$$q_0 = |s|, \quad \dot{q}_0 = wv \operatorname{sign} s, \quad w = 1 - \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \operatorname{sign}(sv). \quad (2.14)$$

Граничное условие (2.13) в силу замены (2.14) автоматически выполняется при  $s = 0$ .

Изменение вспомогательных переменных описывается системой уравнений

$$\dot{s} = wv, \quad \dot{v} = \frac{F}{w} \operatorname{sign} s, \quad (2.15)$$

правые части которых при  $s = v = 0$  доопределяются по правилу:

$$\dot{s} = 0, \quad \dot{v} = \max\{0, F\}. \quad (2.16)$$

Таким образом, универсальные уравнения движения тяжелого твердого тела не ниже абсолютно гладкой горизонтальной плоскости состоят из первых двух уравнений (2.10) и системы (2.11), в которой первое уравнение заменено на два уравнения (2.15), а вместо  $q_0, \dot{q}_0$  подставлены их выражения (2.14).

**Случай плоскости с трением.** В [7] рассмотрен также случай кулоновского трения. При наличии трения реакция  $\mathbf{R}$  имеет горизонтальную составляющую,  $\mathbf{R} = (R_x, R_y, N)$ . Пусть в неподвижной системе координат  $Oxyz$   $\mathbf{K} = (K_x, K_y, K_z)$ ,  $\mathbf{GM} = (\varrho_1, \varrho_2, -d)$ . Выражения компонент вектора кинетического момента через углы Эйлера и их производные хорошо известны [2], а

$$\varrho_1 = d_\theta \sin \psi - d_\varphi \frac{\cos \psi}{\sin \theta}, \quad \varrho_2 = -d_\theta \cos \psi - d_\varphi \frac{\sin \psi}{\sin \theta}.$$

Уравнения (2.8) составляют систему шести уравнений второго порядка. При получении универсальной формы уравнений движения в [7] вводятся квазискорости

$$\dot{\pi}_1 = K_x - m\dot{y} - m\varrho_2\dot{z}, \quad \dot{\pi}_2 = K_y + m\dot{x} + m\varrho_1\dot{z}, \quad \dot{\pi}_3 = K_z + m\varrho_2\dot{x} - m\varrho_1\dot{y}. \quad (2.17)$$

Для их производных, в силу (2.8), имеют место выражения

$$\ddot{\pi}_1 = mg\varrho_2 - m\dot{y} - m\dot{\varrho}_2\dot{z}, \quad \ddot{\pi}_2 = -mg\varrho_1 + m\dot{x} + m\dot{\varrho}_1\dot{z}, \quad \ddot{\pi}_3 = m\dot{\varrho}_2\dot{x} - m\dot{\varrho}_1\dot{y}. \quad (2.18)$$

При кулоновском трении

$$R_x = -\mu N \cos \beta, \quad R_y = -\mu N \sin \beta, \quad (2.19)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения, а  $\beta$  — угол между осью  $Ox$  и горизонтальной составляющей вектора скорости точки  $M$  тела, в которой происходит его касание с плоскостью. В общем случае угол  $\beta$  изменяется со временем. Но в ряде задач (например, при плоском движении) он постоянен. Рассмотрим только этот частный случай. Положим

$$\dot{\pi}_4 = \dot{x} \sin \beta - \dot{y} \cos \beta, \quad \dot{\pi}_5 = \dot{x} \cos \beta + \dot{y} \sin \beta + \mu \dot{z}. \quad (2.20)$$

Тогда, вследствие (2.19), имеем

$$\ddot{\pi}_4 = 0, \quad \ddot{\pi}_5 = -\mu g. \quad (2.21)$$

Уравнения (2.17), (2.18), (2.20), (2.21) остаются справедливыми во все время движения. Для их замыкания в [7] добавляются соотношения (2.15). При этом следует помнить, что в равенстве (2.12) при наличии трения (2.19) не обязательно  $U > 0$ . Неравенство  $U \leq 0$  приводит к парадоксальным ситуациям [8].

Описанные универсальные уравнения движения были применены в [3,7] для исследования движения неоднородного диска над абсолютно гладкой плоскостью и в задаче о падении шара на шероховатую горизонтальную плоскость.

### 2.3. Уравнения Гамильтона для систем с идеальной неударивающей связью

Рассмотрим натуральную механическую систему с функцией Лагранжа

$$L(q_0, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_0, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = T - \Pi, \quad (2.22)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n a_{i,j}(q_0, q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \Pi = \Pi(q_0, q_1, \dots, q_n)$$

и с идеальной неударивающей связью вида  $q_0 \geq 0$ . В промежутках между ударами о связь движение описывается уравнениями [13]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} - \frac{\partial L}{\partial q_0} = F_0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.23)$$

где  $F_0$  выражает реакцию напряженной связи;  $F_0 = 0$  при  $q_0 \neq 0$ . Исследование систем с неударивающими связями до недавнего времени проводилось методом припасовывания. В статье [9] предложена негладкая замена обобщенных координат, исключая неударивающую связь и позволяющая получить уравнения движения в форме уравнений Рауса, справедливых на произвольном временном интервале, включающем и моменты удара. При этом новые обобщенные скорости становятся непрерывными, а ускорения, вообще говоря, остаются разрывными. Этот подход в сочетании с методом усреднения дал возможность решить ряд новых задач динамики виброударных систем [10,11].

Сочетание негладкой замены переменных из [9] со специальным выбором обобщенных координат, осуществляемым при помощи «редуцирующей» замены переменных, позволило [12] записать уравнения движения системы с идеальной неударивающей связью в форме уравнений Гамильтона. Такой подход нашел затем применение при исследовании задач об устойчивости движения твердого тела при наличии его соударений с плоскостью и в качественном анализе его движения методами Пуанкаре и КАМ-теории (Колмогорова–Арнольда–Мозера) (см., например, [14–18]).

Сделаем в (2.22) невырожденную замену обобщенных координат («редуцирующую» замену) по формулам

$$q_0 = Q_0, \quad q_k = \varphi_k(Q_0, Q_1, \dots, Q_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.24)$$

где функции  $\varphi_k$  выберем так, чтобы в выражении кинетической энергии в новых координатах отсутствовали члены вида  $\dot{Q}_0 \dot{Q}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Для этого, согласно [12], функции  $\varphi_i$  должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}(Q_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_0} = -a_{0j}(Q_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.25)$$

которая разрешима относительно производных  $\partial \varphi_i / \partial Q_0$ . Полагая

$$\varphi_i|_{Q_0=0} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.26)$$

придем к задаче Коши (2.25), (2.26), в которой  $Q_0$  играет роль независимой переменной, а  $Q_i$  — роль начальных условий.

Будем далее считать, что замена (2.24) в (2.22) уже сделана и  $a_{0m} \equiv 0$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда первое из уравнений (2.23) при  $q_0 = \dot{q}_0 = 0$  имеет вид

$$a_{00} \ddot{q}_0 - \left. \frac{\partial L}{\partial q_0} \right|_{q_0=0} = F_0.$$

Поскольку  $a_{00} > 0$ , то, следуя [13], получим, что

$$F_0 = \max \left\{ 0, - \left. \frac{\partial L}{\partial q_0} \right|_{q_0=0} \right\}. \quad (2.27)$$

Определим вспомогательную систему при помощи функции Лагранжа

$$L^* = L(|q_0|, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_0, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

и обобщенной силы (2.27). Можно проверить, что траектории  $q_0(t), q_1(t), \dots, q_n(t)$  исходной системы и траектории  $q_0^*(t), q_1^*(t), \dots, q_n^*(t)$  вспомогательной системы с одинаковыми начальными условиями связаны простыми соотношениями

$$q_0(t) = |q_0^*(t)|, \quad q_m(t) = q_m^*(t) \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (2.28)$$

У вспомогательной системы неудерживающей связи нет.

Полагая

$$p_j = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad H = \sum_{j=0}^n p_j \dot{q}_j - L^*,$$

уравнения движения вспомогательной системы можно записать в гамильтоновой форме:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (2.29)$$

где, в соответствии с (2.27), надо положить

$$\left. \frac{\partial H}{\partial q_0} \right|_{q_0=0} = \min \left\{ 0, \left. \frac{\partial H}{\partial q_0} \right|_{q_0=+0} \right\}. \quad (2.30)$$

Полученная гамильтонова система однозначно определяет движение исходной системы (с учетом отождествления  $q_0 = |q_0|$ ) на произвольных интервалах времени; в частности, движение при напряженной связи происходит при условии

$$\left. \frac{\partial H}{\partial q_0} \right|_{q_0=0} \geq 0.$$



## 2.4. Методы КАМ-теории в задаче о сохранении движений в системах с неударживающей связью

Полученная в [12] гамильтонова форма уравнений движения систем с идеальной неударживающей связью позволяет поставить вопрос о применении при анализе динамики таких систем известных методов классической и небесной механики. При этом возникают трудности, связанные с тем, что функция Гамильтона, вообще говоря, недифференцируема на гиперповерхности  $q_0 = 0$  фазового пространства вспомогательной системы. В работе [17] указан один из возможных алгоритмов использования теоремы Колмогорова о сохранении движений [19,20] и теоремы Мозера об инвариантных кривых [23] для качественного анализа систем с неаналитическим по одной фазовой переменной гамильтонианом. Основная идея состоит в сведении исследования негладкого гамильтонова фазового потока к рассмотрению симплектического отображения, которое может оказаться даже аналитическим. Рассмотрим отдельно случаи трех и двух степеней свободы.

**Системы с тремя степенями свободы.** Пусть функция Гамильтона близкой к интегрируемой системы с тремя степенями свободы имеет вид

$$H = H_0(x_1, x_2, x_3) + \mu H_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, \mu) \quad (0 < \mu \ll 1). \quad (2.31)$$

Функция (2.31)  $2\pi$  — периодична по координатам  $y_1, y_2, y_3$ , аналитична по переменным  $\mu, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$ , а по  $y_3$  только непрерывна.

При  $\mu = 0$  имеем

$$x_i = x_{i0}, \quad y_i = \omega_i t + y_{i0}, \quad \omega_i = \left. \frac{\partial H_0}{\partial x_i} \right|_{x_i=x_{i0}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.32)$$

Считаем, что невозмущенное движение (2.32) условно-периодично. Как изменяется это движение при  $\mu$  малом, но отличном от нуля? Ввиду неаналитичности функции (2.31) теорема Колмогорова о сохранении условно-периодических движений непосредственно неприменима, но можно воспользоваться ее вариантом для симплектических отображений [21,22].

Для этого введем переменные  $p_i$ , положив  $x_i = x_{i0} + p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). На изоэнергетическом уровне

$$H = H_0(x_{10}, x_{20}, x_{30}) + \mu h \quad (h = \text{const}, h \sim 1) \quad (2.33)$$

движение можно описать при помощи уравнений Уиттекера [1]. Эти уравнения имеют гамильтонову форму с гамильтонианом  $K$ , где  $p_3 = -K$  — корень уравнения (2.33), а роль независимой переменной играет координата  $y_3$ . Функция  $K$  имеет вид

$$K = K_0(p_1, p_2) + \mu K_1(p_1, p_2, y_1, y_2, y_3, \mu, h), \quad (2.34)$$

где  $K_0$  — ряд по степеням  $p_1, p_2$ ,

$$K_0 = \left( \frac{\omega_1}{\omega_3} p_1 + \frac{\omega_2}{\omega_3} p_2 \right) + \frac{1}{2\omega_3^3} (a_{11} p_1^2 + 2a_{12} p_1 p_2 + a_{22} p_2^2) + \dots \quad (2.35)$$

$$a_{ii} = H_{0,ii} \omega_3^2 - 2H_{0,i3} \omega_i \omega_3 + H_{0,33} \omega_i^2 \quad (i = 1, 2),$$

$$a_{12} = H_{0,33} \omega_1 \omega_2 + H_{0,12} \omega_3^2 - H_{0,13} \omega_2 \omega_3 - H_{0,23} \omega_1 \omega_3$$

$$\left( H_{0,ik} = \left. \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_k} \right|_{x_i=x_{i0}} \right).$$



Функция  $K_1$  в (2.34)  $2\pi$  — периодична по  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), аналитична по  $\mu, p_i, y_i$  ( $i = 1, 2$ ) и непрерывна по  $y_3$ .

Пусть  $p'_i, y'_i$  и  $p''_i, y''_i$  — значения переменных  $p_i, y_i$  ( $i = 1, 2$ ) при  $y_3 = 0$  и  $y_3 = 2\pi$  соответственно. Путем интегрирования уравнений Уиттекера при помощи рядов по  $\mu$  получим симплектическое отображение  $p'_i, y'_i \rightarrow p''_i, y''_i$ . Это отображение задается производящей функцией

$$\begin{aligned} S(p''_1, p''_2, y'_1, y'_2, \mu, h) &= S_0 + \mu S_1, \\ S_0 &= \left(y'_1 + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_3}\right) p''_1 + \left(y'_2 + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_3}\right) p''_2 + S_2^* + S_3^* + \dots, \\ S_2^* &= \pi \omega_3^3 (a_{11} p''_1{}^2 + 2a_{12} p''_1 p''_2 + a_{22} p''_2{}^2). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Функция  $S_0$  аналитична в окрестности точки  $p''_1 = p''_2 = 0$ . В (2.36)  $S_k^*$  — форма степени  $k$  относительно  $p''_1, p''_2$ .

Пусть при  $p''_1 = p''_2 = 0$  выполняется условие невырожденности отображения  $p'_i, y'_i \rightarrow p''_i, y''_i$ , т. е. выполняется неравенство

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S_0}{\partial p''_1{}^2} & \frac{\partial^2 S_0}{\partial p''_1 \partial p''_2} \\ \frac{\partial^2 S_0}{\partial p''_1 \partial p''_2} & \frac{\partial^2 S_0}{\partial p''_2{}^2} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.37}$$

Тогда [21,22] у рассматриваемого отображения существуют двумерные инвариантные торы, близкие к «тору»  $p'_1 = p'_2 = 0$  невозмущенного (при  $\mu = 0$ ) отображения, причем мера Лебегга дополнения к их объединению мала вместе с  $\mu$ . Отсюда и из равенства  $p_3 = -K$  следует, что тогда в исходной системе с гамильтонианом (2.31) переменные  $x_1, x_2, x_3$  для большинства начальных условий при всех  $t$  мало отличаются от их начальных значений.

Вычисления показывают, что условие (2.37) невырожденности отображения эквивалентно условию изоэнергетической невырожденности функции  $H_0$  из (2.31). Последнее условие записывается в виде неравенства

$$\begin{vmatrix} H_{0,11} & H_{0,12} & H_{0,13} & \omega_1 \\ H_{0,12} & H_{0,22} & H_{0,23} & \omega_2 \\ H_{0,13} & H_{0,23} & H_{0,33} & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.38}$$

**Системы с двумя степенями свободы.** Пусть функция Гамильтона системы с двумя степенями свободы

$$H = H_0(x_1, x_2) + \mu H_1(x_1, x_2, y_1, y_2, \mu) \quad (0 < \mu \ll 1) \tag{2.39}$$

$2\pi$ -периодична по  $y_1, y_2$ , аналитична по  $\mu, x_1, x_2, y_1$ , а по  $y_2$  непрерывна. Полагая  $x_i = x_{i0} + p_i$  ( $i = 1, 2$ ) и разрешая уравнение  $H = H_0(x_{10}, x_{20}) + \mu h$  относительно  $p_2 = -K$ , придем, как и выше в случае трех степеней свободы, к уравнениям Уиттекера, которые здесь имеют вид

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\partial K}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dy_2} = -\frac{\partial K}{\partial y_1}, \tag{2.40}$$

где  $K = K(p_1, y_1, y_2, \mu, h)$  —  $2\pi$ -периодическая по  $y_1, y_2$  функция, аналитическая относительно  $\mu, p_1, y_1$ . Ее ряд по степеням  $\mu$  имеет следующий вид:

$$K = K_0(p_1) + \mu K_1(p_1, y_1, y_2, h) + \dots \tag{2.41}$$

Здесь  $K_0(p_1)$  — корень уравнения  $H_0(x_{10} + p_1, x_{20} - K_0) = H_0(x_{10}, x_{20})$ ,

$$K_0 = b_1 p_1 + b_2 p_1^2 + \dots, \quad (2.42)$$

$$b_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad b_2 = \frac{1}{2\omega_2^3} (H_{0,11}\omega_2^2 - 2H_{0,12}\omega_1\omega_2 + H_{0,22}\omega_1^2).$$

Функция  $K_1$  имеет вид

$$K_1 = -\frac{H_1(x_1, x_2, y_1, y_2, 0) + h}{\frac{\partial H_0}{\partial x_2}}.$$

Правая часть этого выражения вычисляется при  $x_1 = x_{10} + p_1$ ,  $x_2 = x_{20} - K_0$ .

Уравнения (2.40) задают симплектическое отображение  $y'_1, p'_1 \rightarrow y''_1, p''_1$ :

$$\begin{aligned} y''_1 &= y'_1 + \gamma(p'_1) + \mu f(p'_1, y'_1, \mu, h), \\ p''_1 &= p'_1 + \mu g(p'_1, y'_1, \mu, h), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где  $y'_1, p'_1$  и  $y''_1, p''_1$  — значения величин  $y_1, p_1$  при  $y_2 = 0$  и  $y_2 = 2\pi$  соответственно, функции  $f$  и  $g$  аналитичны относительно своих аргументов,

$$\gamma = 2\pi \frac{\partial K_0(p'_1)}{\partial p'_1}.$$

Если среди коэффициентов  $b_n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) разложения (2.42) есть хотя бы один отличный от нуля, то при достаточно малых  $\mu$  отображение (2.43) будет закручивающим отображением и к нему применима теорема Мозера об инвариантных кривых [23]. Из этой теоремы и равенства  $p_2 = -K$  следует, что при достаточно малых  $\mu$  для любых начальных условий переменные  $x_1, x_2$  при всех  $t$  будут мало отличаться от их начальных значений.

Отметим, что условие  $b_2 \neq 0$  означает изоэнергетическую невырожденность функции  $H_0$  из (2.39).

## 2.5. О периодических движениях Пуанкаре в одном частном случае систем с неударивающей связью

Снова рассмотрим систему с функцией Гамильтона (2.39). Если отношение частот  $\omega_1/\omega_2$  невозмущенной (при  $\mu = 0$ ) — рациональное число  $m/n$ , то ее решение

$$x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad y_1 = \omega_1 t + \lambda, \quad y_2 = \omega_2 t \quad (2.44)$$

будет периодическим с периодом

$$T_0 = \frac{2\pi m}{\omega_1} = \frac{2\pi n}{\omega_2}.$$

В (2.44)  $\lambda = y_{10}$ , а величина  $y_{20}$ , в силу того что  $\omega_2 \neq 0$ , а рассматриваемая система автономна, принята, без ограничения общности, равной нулю.

Пусть величина  $\mu$  мала, но отлична от нуля. Вопрос о существовании и устойчивости периодических движений в системе с неаналитическим по  $y_2$  гамильтонианом (2.39) можно решить, используя изоэнергетическую редукцию уравнений движения исходной системы к уравнениям Уиттекера (2.40). К системе (2.40) применим алгоритм исследования периодических движений

Пуанкаре, изложенный в [24]. Можно установить существование  $2\pi n$ -периодического по  $y_2$  решения  $p_1(y_2, \mu), y_1(y_2, \mu)$ . Оно будет аналитическим по  $\mu$  и при  $\mu = 0$  переходит в решение  $p_1 = 0, y_1 = \frac{m}{n}y_2 + \lambda$ . Этому  $2\pi n$ -периодическому решению системы (2.40) соответствует  $T_\mu$ -периодическое решение исходной системы с функцией Гамильтона (2.39). Период  $T_\mu$  — аналитическая функция  $\mu$ , при  $\mu = 0$  она принимает значение  $T_0$ , равное периоду невозмущенного движения.

По алгоритму из [24] можно также получить условия устойчивости по Ляпунову  $2\pi n$ -периодического решения системы (2.40). В исходной системе они будут условиями орбитальной устойчивости  $T_\mu$ -периодического решения. В результате можно получить [17] следующее утверждение о периодических движениях в системе с функцией Гамильтона (2.39).

Пусть величина  $\mu$  достаточно мала, а  $\bar{H}_1$  — среднее значение функции  $H_1(x_1, x_2, y_1, y_2, 0)$  на невозмущенном движении (2.44), т. е.

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} H_1(x_{10}, x_{20}, \omega_1 t + \lambda, \omega_2 t, 0) dt.$$

Если выполняются условия: 1) при  $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}$  функция  $H_0$  изоэнергетически невырождена, т. е. коэффициент  $b_2$  в разложении (2.42) отличен от нуля, 2) существует  $\lambda_*$  такое, что при  $\lambda = \lambda_*$  справедливы соотношения

$$\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{H}_1}{\partial \lambda^2} \neq 0,$$

то у системы с гамильтонианом (2.39) существует  $T_\mu$ -периодическое решение, которое аналитично по  $\mu$  и при  $\mu = 0$  переходит в  $T_0$ -периодическое решение (2.44) невозмущенной системы

$$x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad y_1 = \omega_1 t + \lambda_*, \quad y_2 = \omega_2 t.$$

При выполнении неравенства

$$b_2 \frac{\partial^2 \bar{H}_1}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=\lambda_*} > 0$$

это периодическое движение неустойчиво, а при одновременном выполнении неравенств

$$b_2 \frac{\partial^2 \bar{H}_1}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=\lambda_*} < 0, \quad 5 \left( \frac{\partial^3 \bar{H}_1}{\partial \lambda^3} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 \bar{H}_1}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^4 \bar{H}_1}{\partial \lambda^4} \Big|_{\lambda=\lambda_*} \neq 0$$

орбитально устойчиво.

## 2.6. Исследование устойчивости периодических движений систем с соударениями при помощи отображений, сохраняющих площадь

Метод поверхностей сечения Пуанкаре [25] является эффективным методом изучения нелинейных колебаний. При помощи этого метода исследование движений, близких к периодическому движению автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, приводится к изучению сохраняющих площадь отображений  $T$  плоскости в себя. Основы теории таких отображений созданы в работах Биркгофа [26–28], Леви-Чивита [29], Зигеля [30], Мозера [23].

**О получении отображения  $T$ . Классификация отображений.** Получение отображения — довольно сложная задача. В случае системы с двумя степенями свободы при наличии одной идеальной неударивающей связи оно может быть найдено следующим образом [31,32]. Пусть  $q_0, \xi$  — обобщенные координаты, а связь задается неравенством  $q_0 \geq 0$ . При ослабленной связи ( $q_0 > 0$ ) движение описывается каноническими уравнениями с гамильтонианом  $H(q_0, \xi, p_0, p_\xi)$ . Пусть при  $q_0 = 0$  (связь напряжена) в системе происходит абсолютно упругий удар без трения. Допустим, что у системы существует периодическое движение с соударениями, для которого  $\xi = p_\xi = 0$ . Обозначим через  $c_0$  значение постоянной интеграла энергии  $H = \text{const}$ , отвечающее этому движению, и будем рассматривать величины  $\xi, p_\xi, q_0$  как прямоугольные координаты в трехмерном пространстве, определяемом изоэнергетическим уровнем  $H(q_0, \xi, p_0, p_\xi) = c_0$ . В качестве поверхности сечения удобно принять плоскость  $q_0 = 0$ . Движение системы изображается в пространстве  $\xi, p_\xi, q_0$  кривой, лежащей в области  $q_0 \geq 0$ . Периодическому движению отвечает ось  $\xi = p_\xi = 0$ . При  $q_0 = 0$  происходят соударения. Отображение  $T$  находится путем рассмотрения двух последовательных соударений (рис. 1). Это отображение сохраняет площадь, так как при соударении величины  $\xi, p_\xi$  остаются неизменными [33], а в промежутках между соударениями на изоэнергетическом уровне  $H = c_0$  движение описывается уравнениями Уиттекера (имеющими форму уравнений Гамильтона) с независимой переменной  $q_0$ , и сохранение площади следует из теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема [1].

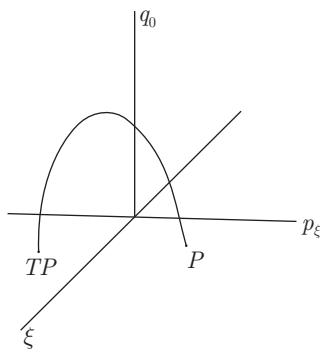


Рис. 1

Задача об орбитальной устойчивости рассматриваемого периодического движения эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки  $\xi = p_\xi = 0$  отображения  $T$ .

Устойчивость неподвижных точек отображений, сохраняющих площадь, исследовалась в [29,30,34,32]. Метод исследования работы [32], результаты которой кратко излагаются ниже, основывается на нормализации (максимально возможном упрощении) отображения при помощи канонических преобразований, теоремах второго метода Ляпунова и теоремы Мозера об инвариантных кривых, примененных к нормализованному отображению.

Далее предполагается, что отображение  $T$  плоскости  $x, y$  в себя аналитично в окрестности неподвижной точки  $x = y = 0$ :

$$x_1 = f(x, y), \quad y_1 = g(x, y), \quad (2.45)$$

$$f(x, y) = ax + by + \dots, \quad g(x, y) = cx + dy + \dots \quad (2.46)$$

Характеристическое уравнение линеаризованного отображения (2.45)

$$x_1 = ax + by, \quad y_1 = cx + dy \quad (2.47)$$

имеет вид

$$\varrho^2 - 2A\varrho + 1 = 0 \quad (2A = a + d). \quad (2.48)$$

Классификация отображений (2.45) определяется видом нормальной формы линейного отображения (2.47). В зависимости от значений величин  $a, b, c, d$  возможны следующие случаи.

$|A| > 1$ . Тогда корни  $\varrho_1, \varrho_2$  уравнения (2.48) вещественны. Обозначим их через  $\varrho$  и  $\frac{1}{\varrho}$ , где  $\varrho = A + \sqrt{A^2 - 1}$ . Нормальная форма отображения (2.47) имеет вид

$$q_1 = \varrho q, \quad p_1 = \frac{1}{\varrho} p. \quad (2.49)$$

$|A| = 1$ . В этом случае  $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$ . Если  $b = c = 0$ , то отображение (2.47) уже имеет нормальную форму

$$x_1 = x, \quad y_1 = y. \quad (2.50)$$

Если же хотя бы одна из величин  $b$  или  $c$  отлична от нуля, то нормализующей заменой переменных  $x, y \rightarrow q, p$  отображение (2.47) можно привести к виду

$$q_1 = q + p, \quad p_1 = p. \quad (2.51)$$

$|A| = -1$ . Здесь  $\varrho_1 = \varrho_2 = -1$ . И если  $b = c = 0$ , то отображение (2.47) уже имеет нормальную форму

$$x_1 = -x, \quad y_1 = -y. \quad (2.52)$$

Если же хотя бы одна из величин  $b$  или  $c$  отлична от нуля, то нормальной формой отображения (2.47) будет отображение

$$q_1 = -q + p, \quad p_1 = -p. \quad (2.53)$$

$|A| < 1$ . В этом случае корни уравнения (2.48) комплексно-сопряженные с модулями, равными единице:

$$\varrho_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad \varrho_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha, .$$

$$\cos \alpha = A, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - A^2}.$$

Нормализованное отображение (2.47) представляет собой поворот на угол  $\alpha$ :

$$q_1 = \cos \alpha q + \sin \alpha p, \quad p_1 = -\sin \alpha q + \cos \alpha p. \quad (2.54)$$

Для всех упомянутых случаев в [32] в явном виде выписана замена переменных  $x, y \rightarrow q, p$ , приводящая отображение (2.47) к его нормальной форме. Далее считаем, что нормализация линейного отображения уже осуществлена. И, применяя для новых переменных  $q, p$  старые обозначения, будем рассматривать отличающиеся один от другого шесть случаев  $1^0 - 6^0$  отображения (2.45). Эти случаи отличаются матрицами нормализованной линейной части отображения:

$$\begin{array}{lll} 1^0. & \left\| \begin{array}{cc} \varrho & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho} \end{array} \right\|, & 2^0. & \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, & 3^0. & \left\| \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|, \\ 4^0. & \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, & 5^0. & \left\| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|, & 6^0. & \left\| \begin{array}{cc} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right\|. \end{array}$$

В случае  $1^0$  величина  $\varrho$  вещественна,  $\varrho \neq \pm 1$ , а в случае  $6^0$  число  $\frac{\alpha}{\pi}$  не является целым.

### Условия устойчивости неподвижной точки отображения

Случай  $1^0$ . Отображение (2.45) имеет вид

$$x_1 = \varrho x + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \quad y_1 = \frac{1}{\varrho} y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn} x^m y^n \quad (\varrho \neq \pm 1). \quad (2.55)$$

Неподвижная точка отображения  $x = y = 0$  неустойчива при любых значениях коэффициентов  $a_{mn}, b_{mn}$  в нелинейных относительно  $x, y$  членах в правых частях равенств (2.55).

Случай 2<sup>0</sup>. Имеем отображение

$$x_1 = x + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn}x^m y^n, \quad y_1 = y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn}x^m y^n. \quad (2.56)$$

Если правая часть хотя бы одного из равенств (2.56) действительно содержит члены второй степени относительно  $x, y$ , то неподвижная точка  $x = y = 0$  отображения неустойчива.

Пусть теперь правые части равенств (2.56) не содержат членов второй степени. Положим

$$G(\varphi) = b_0 + a_2 \sin 2\varphi + b_2 \cos 2\varphi + a_4 \sin 4\varphi + b_4 \cos 4\varphi,$$

$$b_0 = \frac{1}{8}(3a_{03} + 2a_{21} - 3b_{30}), \quad a_2 = a_{30} - b_{03}, \quad b_2 = \frac{1}{2}(a_{03} + b_{30}),$$

$$a_4 = -\frac{1}{2}(a_{30} + b_{03}), \quad b_4 = \frac{1}{8}(a_{03} - 2a_{21} - b_{30}).$$

Если уравнение  $G(\varphi) = 0$  не имеет вещественных корней, то неподвижная точка  $x = y = 0$  отображения устойчива, если же существует такое значение  $\varphi = \varphi_*$ , что  $G(\varphi_*) = 0$ , а  $\frac{dG(\varphi_*)}{d\varphi_*} \neq 0$ , то неподвижная точка неустойчива.

Случай 3<sup>0</sup>. Отображение (2.47) записывается в виде

$$x_1 = -x + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn}x^m y^n, \quad y_1 = -y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn}x^m y^n. \quad (2.57)$$

Условия устойчивости и неустойчивости формулируются точно так же, как в случае 2<sup>0</sup>, когда правые части равенств (2.56) не содержат членов второй степени. Только при вычислении функции  $G(\varphi)$  величины  $a_{mn}, b_{mn}$  надо заменить на величины  $a'_{mn}, b'_{mn}$ , определяемые по формулам

$$a'_{30} = -2a_{30} - 2a_{20}^2 + 2b_{20}b_{02}, \quad a'_{21} = -2a_{21} + 2a_{20}b_{02} - 2a_{02}b_{20},$$

$$a'_{12} = -2a_{12} + 2a_{20}a_{02} - 2b_{02}^2, \quad a'_{03} = -2a_{03},$$

$$b'_{30} = -2b_{30}, \quad b'_{21} = -2b_{21} - 2a_{20}^2 + 2b_{20}b_{02},$$

$$b'_{12} = -2b_{12} + 2a_{20}b_{02} - 2a_{02}b_{20}, \quad b'_{03} = -2b_{03} + 2a_{20}a_{02} - 2b_{02}^2.$$

Случай 4<sup>0</sup>. Имеем отображение

$$x_1 = x + y + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn}x^m y^n, \quad y_1 = y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn}x^m y^n. \quad (2.58)$$

Если  $b_{20} \neq 0$ , то неподвижная точка  $x = y = 0$  отображения неустойчива. Если же  $b_{20} = 0$ , то при выполнении неравенства  $2b_{30} + b_{11}^2 < 0$  имеет место устойчивость, а при  $2b_{30} + b_{11}^2 > 0$  — неустойчивость.

Случай 5<sup>0</sup>. Отображение (2.47) будет таким:

$$x_1 = -x + y + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn}x^m y^n, \quad y_1 = -y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn}x^m y^n. \quad (2.59)$$

При выполнении неравенства  $2b_{30} - b_{20}^2 < 0$  неподвижная точка отображения устойчива, если же  $2b_{30} - b_{20}^2 > 0$ , то имеет место неустойчивость.

Случай  $6^0$ . Отображение (2.47) записывается в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \alpha x + \sin \alpha y + \sum_{m+n=2}^{\infty} a_{mn} x^m y^n, \\ y_1 &= -\sin \alpha x + \cos \alpha y + \sum_{m+n=2}^{\infty} b_{mn} x^m y^n. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mu_{20} &= \frac{1}{4}(a_{20} - a_{02} + b_{11}), & \nu_{20} &= \frac{1}{4}(a_{11} - b_{20} + b_{02}), \\ \mu_{02} &= \frac{1}{4}(a_{20} - a_{02} - b_{11}), & \nu_{02} &= -\frac{1}{4}(a_{11} + b_{20} - b_{02}), \\ \mu_{21} &= \frac{1}{8}(3a_{30} + a_{12} + b_{21} + 3b_{03}), & \nu_{21} &= \frac{1}{8}(a_{21} + 3a_{03} - 3b_{30} - b_{12}), \\ \mu_{03} &= \frac{1}{8}(a_{30} - a_{12} - b_{21} + b_{03}), & \nu_{03} &= -\frac{1}{8}(a_{21} - a_{03} + b_{30} - b_{12}). \end{aligned} \tag{2.61}$$

Если  $3\alpha = 2\pi l$  ( $l$  — целое число), т. е. имеет место резонанс третьего порядка, и хотя бы одна из величин  $\mu_{20}$  или  $\nu_{20}$  отлична от нуля, то неподвижная точка  $x = y = 0$  отображения (2.60) неустойчива.

Пусть теперь отсутствует резонанс третьего порядка, но есть резонанс четвертого порядка, т. е.  $2\alpha = \pi l$  ( $l$  — целое число). Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mu_{21}^* &= \mu_{21} + 3(\mu_{20}^2 + \nu_{20}^2) - (\mu_{02}^2 + \nu_{02}^2), \\ \mu_{03}^* &= \mu_{03} - 2(\mu_{20}\mu_{02} + \nu_{20}\nu_{02}), \\ \nu_{03}^* &= \nu_{03} - 2(\mu_{20}\nu_{02} - \mu_{02}\nu_{20}). \end{aligned} \tag{2.62}$$

Тогда при выполнении неравенства  $\mu_{21}^{*2} > \mu_{03}^{*2} + \nu_{03}^{*2}$  неподвижная точка  $x = y = 0$  отображения (2.60) устойчива. Если же  $\mu_{21}^{*2} < \mu_{03}^{*2} + \nu_{03}^{*2}$ , то имеет место неустойчивость.

Пусть теперь отсутствуют резонансы как третьего, так и четвертого порядков. Положим

$$\begin{aligned} \mu_{21}^{**} &= \mu_{21} + (3 + 4 \cos \alpha)(\mu_{20}^2 + \nu_{20}^2) - \frac{(\mu_{02}^2 + \nu_{02}^2)}{1 + 2 \cos \alpha}, \\ \nu_{21}^{**} &= \nu_{21} + \frac{\sin \alpha (1 - 4 \cos \alpha)(\mu_{20}^2 + \nu_{20}^2)}{1 - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha (\mu_{02}^2 + \nu_{02}^2)}{(1 + 2 \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Если хотя бы одна из величин  $\mu_{21}^{**}$  или  $\nu_{21}^{**}$  отлична от нуля, то неподвижная точка  $x = y = 0$  отображения (2.60) устойчива.

### 3. Обзор результатов анализа динамики твердого тела при наличии соударений

#### 3.1. Об устойчивости перманентных вращений твердого тела вокруг вертикали при наличии его соударений с горизонтальной плоскостью

Рассмотрим движение твердого тела в однородном поле тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью. Плоскость считаем абсолютно гладкой, а соударения тела с плоскостью — абсолютно упругими. Свободное движение тела описывается уравнениями (2.1), (2.3),





(2.6), (2.7). Чтобы получить уравнения, описывающие движение тела на промежутке времени, включающем в себя и моменты соударения тела с плоскостью, эти уравнения надо дополнить соотношениями, вытекающими из общей теории удара без трения [1,36]. Обозначая, как обычно, знаками минус и плюс кинематические характеристики движения тела до и после удара соответственно, имеем

$$\dot{x}^+ = \dot{x}^-, \quad \dot{y}^+ = \dot{y}^-, \quad \dot{z}^+ = \dot{z}^- + \frac{1}{m}I, \quad (3.1)$$

$$p^+ = p^- + \frac{\gamma_3\eta - \gamma_2\zeta}{A}I, \quad q^+ = q^- + \frac{\gamma_1\zeta - \gamma_3\xi}{B}I, \quad r^+ = r^- + \frac{\gamma_2\xi - \gamma_1\eta}{C}I. \quad (3.2)$$

Здесь приняты обозначения из раздела 2.1; через  $I$  обозначен ударный импульс

$$I = -\frac{2}{k}[\dot{z}^- + p^-(\gamma_3\eta - \gamma_2\zeta) + q^-(\gamma_1\zeta - \gamma_3\xi) + r^-(\gamma_2\xi - \gamma_1\eta)],$$

$$k = \frac{1}{m} + \frac{(\gamma_3\eta - \gamma_2\zeta)^2}{A} + \frac{(\gamma_1\zeta - \gamma_3\xi)^2}{B} + \frac{(\gamma_2\xi - \gamma_1\eta)^2}{C},$$

величины  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  не отмечены знаками минус и плюс, так как они во время удара не изменяются.

Пусть в точке  $M_0$  пересечения поверхности тела и оси  $G\eta$  при отрицательных  $\eta$  касательная плоскость к поверхности тела перпендикулярна  $G\eta$ . Тогда тело может совершать такое движение, в котором

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \quad p = 0, \quad q = \dot{\psi} = \omega = \text{const}, \quad r = 0, \quad (3.3)$$

$$\dot{x} = \text{const}, \quad \dot{y} = \text{const}, \quad \dot{z}^+ = \dot{z}^- = \sqrt{2gh} = \text{const}.$$

В этом движении ось  $G\eta$  вертикальна, а тело вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . При этом в результате соударений тело периодически подсакивает над плоскостью; наибольшее расстояние наинизшей точки  $M_0$  поверхности тела от плоскости равно  $h$ . Движение имеет период  $\tau = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$ , равный промежутку времени между двумя последовательными соударениями тела и плоскости. В промежутках между соударениями центр тяжести тела движется либо по параболе, либо по заданной вертикальной прямой в зависимости от того, отлична от нуля или равна нулю постоянная величина  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ . Не ограничивая общности, будем считать, что  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0$ .

В статье [35] при помощи метода припасовывания исследована устойчивость в первом приближении этого движения по отношению к возмущениям углов  $\theta$ ,  $\varphi$ , проекций угловой скорости  $p$ ,  $q$ ,  $r$  и высоты подскока  $h$ . Опишем некоторые из полученных в [35] результатов.

Линеаризация уравнений движения показала, что в первом приближении высота подскока  $h$  и угловая скорость  $\dot{\psi}$  вращения тела вокруг вертикали постоянны. Если положить  $\theta = \pi/2 + x_1$ ,  $\varphi = x_2$ ,  $p = x_3$ ,  $r = x_4$ , то имеем такую систему дифференциальных уравнений первого приближения, описывающую возмущенное движение тела в промежутках между соударениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega x_2 + x_3, & \dot{x}_2 &= \omega x_1 + x_4, \\ \dot{x}_3 &= \frac{B-C}{A}\omega x_4, & \dot{x}_4 &= -\frac{B-A}{C}\omega x_3, \end{aligned} \quad (3.4)$$

а соотношения, связывающие кинематические характеристики движения тела до и после удара, имеют в первом приближении такой вид:

$$x_3^+ = x_3^- + \frac{mg\tau}{A}[(d_0 - l_2)x_1 - lx_2]^- , \quad x_4^+ = x_4^- - \frac{mg\tau}{C}[lx_1 - (d_0 - l_1)x_2]^- , \quad (3.5)$$

$$l_1 = r_1 \sin^2 \alpha + r_2 \cos^2 \alpha, \quad l_2 = r_1 \cos^2 \alpha + r_2 \sin^2 \alpha, \quad l = (r_2 - r_1) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Здесь  $d_0$  — расстояние от центра тяжести тела до точки  $M_0$ , в которой происходят соударения тела и плоскости в невозмущенном движении (3.3),  $r_1$  и  $r_2$  — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке  $M_0$ ,  $\alpha$  — угол между осью  $G\zeta$  и линией кривизны, соответствующей  $r_1$ ; он отсчитывается от оси  $G\zeta$  против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной полуоси  $G\eta$ , занимающей вертикальное положение в невозмущенном движении.

Пусть  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Имеет место равенство  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{Y}\mathbf{x}^-$ , где матрица  $\mathbf{Y}$  определяется соотношениями (3.5) с учетом того, что  $x_1$  и  $x_2$  при ударе не изменяются. Пусть  $\mathbf{X}(t)$  — фундаментальная матрица решений системы (3.4), удовлетворяющая условию  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$ . Если через  $\mathbf{x}^0$  обозначить значение вектора  $\mathbf{x}$  перед первым соударением, то его значение  $\mathbf{x}^1$  перед вторым соударением вычисляется по формуле  $\mathbf{x}^1 = \mathbf{Z}\mathbf{x}^0$ , где  $\mathbf{Z} = \mathbf{X}(\tau)\mathbf{Y}$ , а  $\mathbf{X}(\tau)$  — значение матрицы  $\mathbf{X}(t)$  в момент времени, равный периоду рассматриваемого движения (3.3). Перед  $(k + 1)$ -м соударением  $\mathbf{x}^k = \mathbf{Z}^k\mathbf{x}^0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Для устойчивости движения (3.3) необходимо, чтобы характеристическое уравнение матрицы  $\mathbf{Z}$  не имело корней с модулями, большими единицы. При отсутствии таких, но при наличии корней с модулями, равными единице, необходимо, чтобы в жордановой форме матрицы  $\mathbf{Z}$  соответствующие этим корням клетки имели первый порядок.

Как показали вычисления [35], характеристическое уравнение матрицы  $\mathbf{Z}$  будет возвратным и имеет вид

$$\begin{aligned} \varrho^4 - a_1\varrho^3 + a_2\varrho^2 - a_1\varrho + 1 &= 0, \tag{3.6} \\ a_1 &= 2(\cos \omega\tau + \cos \Omega\tau) + \frac{mg\tau}{B\omega} \left[ (d - l_1)(\sin \omega\tau + \frac{1}{\kappa} \sin \Omega\tau) + (d - l_2)(\sin \omega\tau + \kappa \sin \Omega\tau) \right], \\ a_2 &= 2 + 4 \cos \omega\tau \cos \Omega\tau + \left( \frac{mg\tau}{B\omega} \right)^2 \left[ 2(1 - \cos \omega\tau \cos \Omega\tau) + (\kappa + \frac{1}{\kappa}) \sin \omega\tau \sin \Omega\tau \right] + \\ &+ 2 \frac{mg\tau}{B\omega} \left[ (d - l_1)(\sin \omega\tau \cos \Omega\tau + \frac{1}{\kappa} \cos \omega\tau \sin \Omega\tau) + (d - l_2)(\sin \omega\tau \cos \Omega\tau + \kappa \cos \omega\tau \sin \Omega\tau) \right], \\ \kappa^2 &= \frac{C(B - A)}{A(B - C)}, \quad \Omega^2 = \frac{(B - A)(B - C)}{AC} \omega^2. \end{aligned}$$

Область устойчивости движения (3.3) в первом приближении задается системой неравенств [37]

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < \frac{1}{4}(a_2 + 2)^2. \tag{3.7}$$

Анализ областей устойчивости (3.7) в зависимости от параметров задачи в общем случае сложен. В [35] рассмотрено несколько важных частных случаев. Рассмотрим здесь один из них. Другой частный случай будет рассмотрен в разделе 3.3.

Пусть  $\omega = 0$ , т. е. в движении (3.3) твердое тело не вращается вокруг оси  $G\eta$ , совершая движение по заданной вертикали. В [35] показано, что если исключить три случая: 1)  $r_1 = r_2$ ,  $A = C$ , 2)  $\alpha = 0$ ,  $\frac{d_0 - r_1}{A} = \frac{d_0 - r_2}{C}$ , 3)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{d_0 - r_1}{C} = \frac{d_0 - r_2}{A}$ , которые отвечают границе  $a_1^2 = 4(a_2 - 2)$  области устойчивости, то условия (3.7) эквивалентны системе следующих трех неравенств:

$$d_0 < r_1, \quad d_0 < r_2, \quad h < h_*, \tag{3.8}$$

где

$$h_* = \frac{A(l_1 - d_0) + C(l_2 - d_0) - \sqrt{[A(l_1 - d_0) - C(l_2 - d_0)]^2 + 4ACl^2}}{4m(r_1 - d_0)(r_2 - d_0)}.$$

Таким образом, рассматриваемое движение будет неустойчиво, если центр тяжести в невозмущенном движении лежит выше хотя бы одного из центров кривизны поверхности тела в точке  $M_0$  или высота  $h$  подскока тела над плоскостью превосходит критическое значение  $h_*$ .

Пусть, например, тело представляет собой однородный эллипсоид, поверхность которого в системе координат  $G\xi\eta\zeta$  задается уравнением

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

Тогда при  $\omega = 0$  движение (3.3) эллипсоида будет устойчивым (в первом приближении), если по вертикали направлена наименьшая из полуосей эллипсоида, а высота его подскока над плоскостью не превосходит величину

$$h_* = \frac{b(a^2 + b^2)}{10(a^2 - b^2)},$$

если  $a \geq c$ , или величину

$$h_* = \frac{b(c^2 + b^2)}{10(c^2 - b^2)},$$

если  $a < c$ .

Отметим, что при фиксированных величинах  $m, d_0, A, C, r_1, r_2$  критическая высота подскока  $h_*$  тела будет функцией угла  $\alpha$ . Она будет максимальной, если  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , т. е. когда линии кривизны поверхности тела в точке  $M_0$  параллельны главным осям инерции  $G\zeta$  и  $G\xi$ , занимающим в невозмущенном движении (3.3) тела горизонтальное положение.

### 3.2. Об орбитальной устойчивости поступательного движения симметричного тела вдоль вертикали

В статье [38] проведено полное строгое (нелинейное) исследование задачи об орбитальной устойчивости периодического движения твердого тела над неподвижной горизонтальной плоскостью в однородном поле тяжести. Тело ограничено поверхностью вращения и является динамически симметричным, центр тяжести тела лежит на оси симметрии  $G\zeta$ . Плоскость считается абсолютно гладкой, соударения тела и плоскости — абсолютно упругими. В невозмущенном движении ось симметрии тела вертикальна, а тело движется поступательно, периодически соударяясь с плоскостью.

Пусть  $M_0$  — точка пересечения оси симметрии тела с его поверхностью в области отрицательных значений  $\zeta$ . Расстояние от центра тяжести до точки  $M_0$  равно  $d_0$ . Плоскость, касательную к поверхности тела в точке  $M_0$ , считаем перпендикулярной оси  $G\zeta$  и зададим уравнение поверхности тела в виде

$$\begin{aligned} \zeta &= \chi(\varrho) - d_0, & \varrho &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ \chi(\varrho) &= a_2\varrho^2 + a_3\varrho^3 + a_4\varrho^4 + \dots & (a_2 > 0). \end{aligned}$$

Пусть  $M$  — ближайшая к неподвижной плоскости  $Oxy$  точка поверхности тела, а  $d$  — расстояние от центра тяжести до горизонтальной плоскости, проходящей через эту точку. Ясно, что  $d$  — функция угла нутации  $\theta$  (угла между осью симметрии тела и вертикалью). При малых  $\theta$  имеет место следующее разложение  $d$  в степенной ряд:

$$\begin{aligned} d(\theta) &= d_0 + d_2\theta^2 + d_3\theta^3 + d_4\theta^4 + \dots, \\ d_2 &= \frac{1}{4a_2} - \frac{d_0}{2}, & d_3 &= -\frac{a_3}{8a_2^3}, & d_4 &= \frac{d_0}{24} + \frac{1}{24a_2} + \frac{9a_3^2}{64a_2^5} - \frac{a_4}{16a_2^4}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отметим, что

$$d_2 = \frac{1}{2}(R - d_0), \quad (3.10)$$

где  $R$  — радиус кривизны поверхности тела в точке  $M_0$ .

В статье [38] задача об орбитальной устойчивости рассматриваемого поступательного периодического движения тела вдоль вертикали сведена, при помощи метода поверхностей сечения Пуанкаре, к задаче об устойчивости неподвижной точки отображения, сохраняющего площадь. Затем при помощи результатов статьи [32] (см. раздел 2.6 данного обзора) получено решение задачи об устойчивости периодического движения тела для всех физически допустимых значений параметров задачи  $d_i, R, h, m, A$ . Величины  $d_i$ , согласно (3.9), задают форму поверхности тела,  $h$  — высота подскока наименьшей точки  $M_0$  поверхности тела над плоскостью в невозмущенном движении,  $m$  — масса тела,  $A$  — его момент инерции относительно оси, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через центр тяжести (от момента инерции  $C$  тела относительно оси симметрии условия устойчивости не зависят. Оказалось, что:

- 1<sup>0</sup> если  $R < d_0$ , то имеет место неустойчивость, т. е. рассматриваемое движение тела неустойчиво, если радиус кривизны его поверхности в точке  $M_0$  меньше расстояния от центра тяжести до этой точки;
- 2<sup>0</sup> если  $R = d_0$ , то при  $d_3 \neq 0$  движение неустойчиво; если же  $d_3 = 0$ , то при  $d_4 > 0$  имеет место устойчивость, а при  $d_4 < 0$  — неустойчивость;
- 3<sup>0</sup> если  $R > d_0$  и  $h = h_4 = \frac{A}{4m(R - d_0)}$ , то при выполнении одного из неравенств

$$d_4 < \frac{5m(R - d_0)^3}{8A} \quad \text{или} \quad d_4 > \frac{9d_3^2}{2(R - d_0)} + \frac{5m(R - d)^3}{4A}$$

периодическое движение тела орбитально устойчиво, а если выполняются неравенства

$$\frac{5m(R - d_0)^3}{8A} < d_4 < \frac{9d_3^2}{2(R - d_0)} + \frac{5m(R - d)^3}{4A},$$

то движение устойчиво;

- 4<sup>0</sup> если  $R > d_0$  и  $h = h_3 = \frac{3A}{8m(R - d_0)}$ , то при  $d_3 \neq 0$  имеет место неустойчивость; если же  $d_3 = 0$ , но при этом  $d_4 \neq \frac{11m(R - d_0)^3}{18A}$ , то движение орбитально устойчиво;
- 5<sup>0</sup> если  $R > d_0, 0 < h < h_* = \frac{A}{2m(R - d_0)}, h \neq h_3, h \neq h_4$  и

$$h_4 \neq \frac{[A + mh(R - d_0)](R - d)^2}{6Ah} + \frac{3[5A - 16mh(R - d_0)]d_3^2}{2[3A - 8mh(R - d_0)](R - d_0)},$$

то периодическое движение тела орбитально устойчиво;

- 6<sup>0</sup> если  $R > d_0, h = h_*$  и выполняется неравенство

$$d_4 < \frac{m(R - d_0)^3}{2A} + \frac{9d_3^2}{2(R - d_0)},$$

то имеет место орбитальная устойчивость; если же последнее неравенство выполняется с противоположным знаком, то движение неустойчиво.

- 7<sup>0</sup> если  $R > d_0$  и  $h > h_*$ , то движение неустойчиво.

Пусть тело представляет собой эллипсоид вращения, поверхность которого в системе координат  $G\xi\eta\zeta$  задается уравнением

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

В невозмущенном движении эллипсоид имеет нулевую угловую скорость и периодически соударяется с плоскостью концом оси симметрии  $G\zeta$ .

Очевидно, что при  $a = c$  имеет место неустойчивость, так как в этом случае эллипсоид вырождается в шар, ударный импульс не создает момента относительно центра шара и в возмущенном движении угол между осью  $G\zeta$  и вертикалью может монотонно возрастать. Если эллипсоид вытянут вдоль оси симметрии ( $a < c$ ), то периодическое движение неустойчиво. Если же эллипсоид сплюснут ( $a > c$ ), то при условии

$$h > \frac{c(a^2 + c^2)}{10(a^2 - c^2)}$$

имеет место неустойчивость, а при выполнении неравенств

$$0 < h \leq \frac{c(a^2 + c^2)}{10(a^2 - c^2)}$$

рассматриваемое периодическое движение эллипсоида орбитально устойчиво.

### 3.3. О «квантованности» областей устойчивости и неустойчивости вращающегося тела

Вернемся снова к рассмотренной в разделе 3.1 задаче об устойчивости перманентного вращения тела вокруг вертикали при наличии соударений с неподвижной абсолютно гладкой плоскостью. Пусть  $\omega \neq 0$ , а тело динамически и геометрически симметрично, т. е.  $A = C$ ,  $r_1 = r_2$ . В [35] показано, что в этом случае условия устойчивости в первом приближении сводятся, как правило, к одному неравенству

$$f(\tau) < 0 \tag{3.11}$$

$$f(\tau) = \left[ \frac{mg(r - d_0)\tau}{B\omega} + \operatorname{tg}\left(\frac{B\omega\tau}{4A}\right) \right] \left[ \frac{mg(r - d_0)\tau}{B\omega} - \operatorname{ctg}\left(\frac{B\omega\tau}{4A}\right) \right].$$

Если неравенство (3.11) выполняется с противоположным знаком, то рассматриваемое движение неустойчиво. Области устойчивости и неустойчивости представлены на рис. 2 в плоскости параметров

$$\sigma = \frac{B\omega\tau}{4A}, \quad \delta = \frac{4Amg(r - d_0)}{(B\omega)^2}.$$

Так как условия устойчивости не зависят от знака  $\omega$ , то  $\sigma$  считается неотрицательной величиной. Сплошными линиями показаны кривые  $\delta = -\frac{\operatorname{tg}\sigma}{\sigma}$ , а штриховыми — кривые  $\delta = \frac{\operatorname{ctg}\sigma}{\sigma}$ . Области устойчивости заштрихованы.

Имеет место своеобразная «квантованность» областей устойчивости и неустойчивости по высоте подскока  $h$  тела в невозмущенном движении. Существует счетное множество чередующихся интервалов устойчивости и неустойчивости, которые простираются неограниченно вверх. Как бы ни была велика высота подскока тела, упомянутое множество интервалов устойчивости и неустойчивости обязательно существует при большей высоте.

Остановимся подробнее на результатах анализа неравенства (3.11). Пусть  $r > d_0$ , т. е. в невозмущенном движении центр тяжести расположен ниже центра сферического участка поверхности тела, содержащего точку  $M_0$ , которой тело ударяется о плоскость. Области неустойчивости задаются неравенствами

$$\frac{g\tau_n^2}{8} < h < \frac{g}{2} \left( \frac{n\pi A}{\omega B} \right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.12)$$

где  $\tau_n$  — занумерованные в порядке возрастания корни уравнения  $f(\tau) = 0$ . С увеличением  $n$  интервалы неустойчивости становятся шире. При росте  $\omega$  области неустойчивости сужаются и сосредотачиваются вблизи высот  $h_k = \frac{gk^2\pi^2 A^2}{2\omega^2 B^2}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Отметим, что при  $r > d_0$  для любого  $\omega$  существует интервал устойчивости по высоте  $h$ , начинающийся у плоскости отскока. Он задается неравенствами

$$0 < h < h' = \frac{g\tau'^2}{8} \quad \left( \frac{mg(r - d_0)\tau'}{B\omega} = \text{ctg} \left( \frac{B\omega\tau'}{4A} \right) \right). \quad (3.13)$$

Пусть теперь  $r < d_0$ . Если выполняется неравенство  $\delta > -1$ , т. е.  $B^2\omega^2 + 4Amg(r - d_0) > 0$  (условие, аналогичное условию Маиевского), то существует интервал устойчивости по высоте, начинающийся у плоскости отскока

$$0 < h < \frac{g}{2} \left( \frac{\pi A}{\omega B} \right)^2, \quad (3.14)$$

а интервалы неустойчивости задаются неравенствами

$$\frac{g}{2} \left( \frac{n\pi A}{\omega B} \right)^2 < h < \frac{g\tau_n^2}{8} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.15)$$

Если условие типа Маиевского не выполнено, то у плоскости отскока начинается интервал неустойчивости. Вообще, при  $r < d_0$  и при невыполнении условия типа Маиевского интервалы неустойчивости задаются неравенствами

$$\frac{g}{2} \left[ \frac{(n-1)\pi A}{\omega B} \right]^2 < h < \frac{g\tau_n^2}{8} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.16)$$

Причина возникновения странной на первый взгляд «квантованности» интервалов устойчивости и неустойчивости состоит в том, что при  $\omega \neq 0$  в возмущенном движении ось симметрии тела в промежутках между соударениями совершает колебания, что и приводит к чередованию областей устойчивости и неустойчивости по высоте подскока тела над плоскостью. Можно показать [35], что области неустойчивости — это области параметрического резонанса.

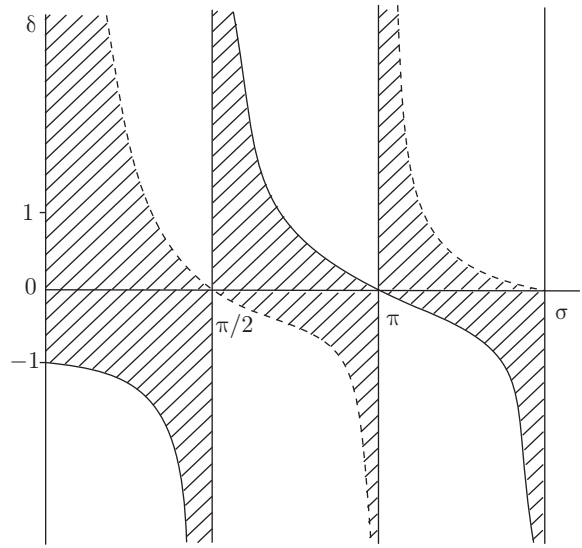


Рис. 2

Как видно из раздела 3.2, в случае  $\omega = 0$  «квантованность» интервалов устойчивости и неустойчивости отсутствует, так как в промежутках между соударениями движение тела не будет колебательным; возмущения  $x_1, x_2$  при  $\omega = 0$  линейно возрастают со временем.

Отсутствует «квантованность» и в одном частном случае, когда  $\omega \neq 0$ , но при этом  $r = d_0$ , т. е. когда радиус кривизны поверхности тела в точке  $M_0$  равен расстоянию от центра тяжести до этой точки. Полное нелинейное исследование этого случая проведено в статье [18] при помощи метода работы [12] (см. раздел 2.3 обзора). Условия устойчивости и неустойчивости представлены аналитически в виде выражений, зависящих от параметров задачи.

### 3.4. Об устойчивости периодического движения твердого тела, соударяющегося с вибрирующей плоскостью

Здесь предполагается [39], что горизонтальная абсолютно гладкая плоскость, с которой соударяется твердое тело во время движения, не является неподвижной, как это было в разделе 3.1, а совершает заданные гармонические колебания вдоль вертикали. В неподвижной системе координат  $Oxyz$  аппликата  $z^*$ , определяющая положение вибрирующей плоскости, над которой движется тело, задается равенством

$$z^* = b \sin(\sigma t + \beta), \quad (3.17)$$

где  $b, \sigma, \beta$  — постоянные величины. Коэффициент восстановления при ударе равен  $\kappa$ .

В статье [39] среди всех возможных движений тела выделено периодическое движение, при котором: тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикали, проходящей через центр тяжести; соударения происходят на одной и той же высоте и перед каждым соударением скорость центра тяжести одна и та же; за время между двумя последовательными соударениями тела и плоскости последняя совершает заданное число  $j$  колебаний, т. е. период рассматриваемого движения

$$\tau = \frac{2\pi}{\sigma} j \quad (3.18)$$

В работе [39] также исследована устойчивость в первом приближении такого периодического движения тела. Опишем кратко результаты этой работы. В промежутках между соударениями движение тела описывается дифференциальными уравнениями (2.1), (2.3), (2.6), (2.7). Связь кинематических величин, характеризующих движение тела до и после удара, определяется равенствами (3.1), (3.2), в которых ударный импульс вычисляется по формуле

$$I = -\frac{1+\kappa}{k} [\dot{z}^- - b\sigma \cos(\sigma t_* + \beta) + p^-(\gamma_3\eta - \gamma_2\zeta) + q^-(\gamma_1\zeta - \gamma_3\xi) + r^-(\gamma_2\xi - \gamma_1\eta)].$$

Условия существования описанного выше периодического движения тела налагают ограничения на начальную фазу  $\beta$ , частоту  $\sigma$  и амплитуду  $b$  колебаний плоскости:

$$\cos \beta = \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \frac{\pi g}{b\sigma^2} j \quad (3.19)$$

Отсюда, в частности, следует, что частота вибраций плоскости должна превышать некоторую критическую величину, определяемую неравенством

$$\sigma^2 \geq \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \frac{\pi g}{b} j. \quad (3.20)$$



Отметим, что если  $\kappa = 1$  (абсолютно упругий удар), то периодическое движение существует, либо когда вибрация плоскости отсутствует ( $b = 0$ ), либо когда  $\cos \beta = 0$ , т. е. когда в момент удара плоскость находится в крайнем верхнем или крайнем нижнем положении (в этих положениях скорость плоскости равна нулю).

Оказалось [39], что линеаризованные уравнения возмущенного движения не зависят от коэффициента восстановления  $\kappa$  и величин  $b, \sigma, \beta$ , задающих характер вибрации плоскости, и полностью совпадают с уравнениями (3.4), (3.5). Только в этих уравнениях величина  $\tau = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$  и может быть произвольной, а в рассматриваемой задаче  $\tau$  определяется частотой вибраций плоскости и числом  $j$  полных колебаний плоскости между двумя последовательными соударениями. Приведем результаты анализа областей устойчивости для двух случаев. Используем обозначения раздела 3.1.

а) Пусть  $\omega = 0$ , т. е. в изучаемом периодическом движении твердое тело не вращается. Если исключить три частных случая:

- 1)  $r_1 = r_2, A = C$ ;
- 2)  $\alpha = 0, \frac{d_0 - r_1}{A} = \frac{d_0 - r_2}{C}$ ;
- 3)  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{d_0 - r_1}{C} = \frac{d_0 - r_2}{A}$ ,

то область устойчивости задается неравенствами

$$d_0 < r_1, \quad d_0 < r_2 \quad \sigma > \sigma_* = \pi j \sqrt{\frac{g}{2h_*}}, \quad (3.21)$$

где  $h_*$  — величина, определенная в соотношениях (3.8). Таким образом, для устойчивости периодического движения при  $\omega = 0$  необходимо, чтобы в невозмущенном движении центр тяжести тела лежал ниже обоих центров кривизны поверхности тела в точке  $M_0$ , а частота вибраций превосходила критическое значение  $\sigma_*$ .

б) Пусть  $\omega \neq 0$ , но  $A = C$  и  $r_1 = r_2 = r$ . Тогда условия устойчивости записываются в виде неравенства (3.11).

Более подробный анализ условия устойчивости показывает, что при  $r > d_0$ , т. е. когда в невозмущенном движении центр тяжести тела лежит ниже центра кривизны поверхности тела в точке  $M_0$ , области неустойчивости задаются неравенствами

$$\frac{\omega B}{nA} j < \sigma < \frac{2\pi}{\tau_n} j \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.22)$$

где  $\tau_n$  — занумерованные в порядке возрастания корни уравнения  $f(\tau) = 0$ . Таким образом, если  $\sigma > \frac{2\pi}{\tau_1} j$ , то периодическое движение устойчиво (в первом приближении). В промежутке  $0 < \sigma < \frac{2\pi}{\tau_1} j$  расположено счетное множество интервалов неустойчивости, определяемых неравенствами (3.22); эти интервалы не пересекаются и чередуются с интервалами устойчивости.

Пусть теперь  $r < d_0$ . Если выполняется неравенство  $B^2\omega^2 + 4Amg(r - d_0) > 0$  (условие типа условия Маиевского), то при  $\sigma > \frac{B\omega}{A} j$  периодическое движение тела устойчиво, а в интервале  $0 < \sigma < \frac{B\omega}{A} j$  существуют счетные множества чередующихся интервалов устойчивости

и неустойчивости, причем интервалы неустойчивости задаются неравенствами

$$\frac{2\pi}{\tau_n} j < \sigma < \frac{B\omega}{nA} j \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если условие типа условия Маиевского не выполнено, то при  $\sigma > \frac{2\pi}{\tau_1} j$  периодическое движение неустойчиво, а в интервале  $0 < \sigma < \frac{2\pi}{\tau_1} j$  существуют счетные множества интервалов устойчивости и неустойчивости; интервалы неустойчивости задаются неравенствами

$$\frac{2\pi}{\tau_n} j < \sigma < \frac{B\omega}{(n-1)A} j \quad (n = 2, 3, \dots).$$

### 3.5. О движении диска над плоскостью

В статьях [40,41] изучалось движение твердого тела, имеющего форму кругового диска, над неподвижной горизонтальной плоскостью в однородном поле тяжести. Плоскость предполагалась абсолютно гладкой, диск — тонким однородным, а соударения диска с плоскостью — абсолютно упругими. Изложим основные результаты статей [40,41].

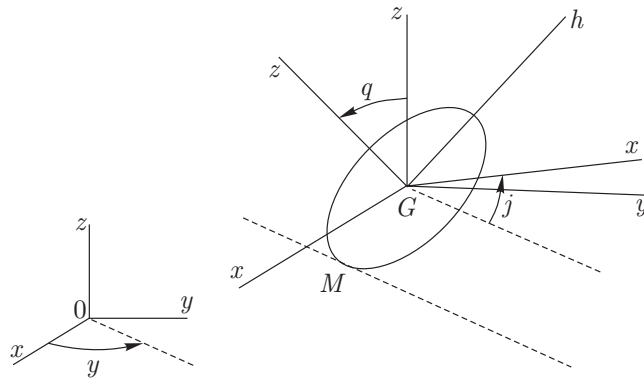


Рис. 3

Движение отнесем к неподвижной системе координат  $Oxyz$  с началом в произвольной точке  $O$  плоскости, над которой движется диск, и вертикальной осью  $Oz$  (рис. 3). Пусть  $O\xi\eta\zeta$  — жестко связанная с диском система координат,  $G$  — центр тяжести диска, ось  $G\zeta$  перпендикулярна плоскости диска, а  $G\xi$  и  $G\eta$  лежат в плоскости диска. Положение диска задается координатами  $x, y, z$  его центра тяжести и углами Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ . Ближайшая к плоскости  $Oxy$  точка  $M$  диска во все время движения находится над этой плоскостью или лежит в ней. Поэтому  $z \geq R \sin \theta$ , где  $R$  — радиус диска. Если положить  $q_0 = z - R \sin \theta$ , то неудерживающая связь запишется в виде неравенства  $q_0 \geq 0$ . При  $q_0 > 0$  диск совершает свободный полет над плоскостью, при  $q_0 = 0$  происходит удар. При этом  $\dot{q}_0^+ = -\dot{q}_0^-$ . Во все время движения имеют место циклические интегралы:

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x} = c_x, & p_y &= m\dot{y} = c_y, \\ p_\varphi &= \frac{1}{2}mR^2(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = c_\varphi, \\ p_\psi &= \frac{1}{4}mR^2[\sin^2 \theta \dot{\psi} + 2(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \theta] = c_\psi \end{aligned} \quad (3.23)$$

где  $c_x, c_y, c_\varphi, c_\psi$  — постоянные,  $m$  — масса диска. Считаем, что  $c_x = c_y = 0$ . Это означает, что центр тяжести диска движется вдоль фиксированной вертикали.

Существуют такие движения, когда плоскость диска вертикальна, а сам диск вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной или горизонтальной оси. В первом случае

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\psi} = \omega_1, \quad \dot{\varphi} = 0 \quad \left( c_\varphi = 0, c_\psi = \frac{1}{4}mR^2\omega_1 \right), \quad (3.24)$$

а во втором —

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\psi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega_2, \quad \left( c_\varphi = \frac{1}{2}mR^2\omega_2, c_\psi = 0 \right). \quad (3.25)$$

В обоих случаях центр тяжести движется вдоль заданной вертикали, а диск периодически соударяется с плоскостью. Период равен  $2\sqrt{\frac{2h}{g}}$ , где  $h$  — высота подскока ближайшей к плоскости точки диска.

В предположении о том, что постоянные циклических интегралов (3.23) являются невозмущаемыми, в [40,41] исследована орбитальная устойчивость упомянутых периодических движений диска. Рассмотрим случай (3.24) вращения вокруг вертикальной оси. Введем два безразмерных параметра

$$a = 2\omega_1\sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad b = \frac{2g}{\omega_1^2 R}. \quad (3.26)$$

Области орбитальной устойчивости в первом приближении задаются неравенствами

$$-\operatorname{ctg} \frac{a}{2} < ab < \operatorname{tg} \frac{a}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} < ab < -\operatorname{ctg} \frac{a}{2}. \quad (3.27)$$

В плоскости параметров  $a, b$  области устойчивости в первом приближении и области неустойчивости чередуются. На рис. 4 области неустойчивости заштрихованы, а области устойчивости занумерованы числами 1, 2, 3, ...; область с номером  $l$  ограничена снизу отрезком оси  $b = 0$ , на котором  $\pi(l - 1) < a < \pi l$ , правой ее границей служит прямая  $a = \pi l$ , а криво-

линейной границей является кривая  $b = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{a}$  при нечетном  $l$  и кривая  $b = -\frac{\operatorname{ctg} \frac{a}{2}}{a}$  при четном  $l$ ,

в самих областях соответственно  $b < \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{a}$  и  $b < -\frac{\operatorname{ctg} \frac{a}{2}}{a}$ . Для строгого решения задачи об орбитальной устойчивости исследуемого движения диска внутри областей (3.27) и на их границах был проведен нелинейный анализ.

На прямолинейной границе  $l$ -й области при

$$b < \frac{2}{\pi l} \quad (3.28)$$

имеет место устойчивость, а при обратном знаке в неравенстве (3.28) — неустойчивость.

На криволинейной границе области с нечетным номером  $l$  условие устойчивости записывается в виде неравенства

$$2\frac{5 \cos a + 3}{\cos a + 1} + \frac{\sin a(\cos^2 a - 14 \cos a - 19)}{a(\cos a + 1)} + \frac{\sin^2 a}{a^2} < 0, \quad (3.29)$$

а для областей с четным номером  $l$ :

$$2\frac{5 \cos a - 3}{\cos a - 1} + \frac{\sin a(\cos^2 a + 14 \cos a - 19)}{a(\cos a - 1)} + \frac{\sin^2 a}{a^2} < 0. \quad (3.30)$$

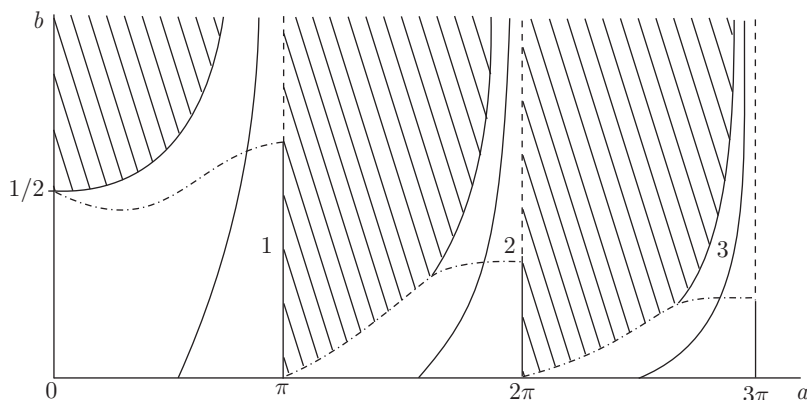


Рис. 4

При обратных знаках в неравенствах (3.29) или (3.30) имеет место неустойчивость. Участки границ областей (3.27), на которых движение (3.24) орбитально устойчиво, обозначены на рис. 4 сплошной линией, а участки неустойчивости — штриховой.

Внутри областей (3.27) могут иметь место резонансы третьего или четвертого порядков, когда  $\varrho^3 = 1$  или  $\varrho^4 = 1$ , где  $\varrho = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ,  $\alpha = \arccos(\cos a + ab \sin a)$ . Если этих резонансов нет, то условие устойчивости выглядит так:

$$\begin{aligned} \Gamma(a, b) \equiv & 2a^3b^4[-a(2\cos^2 a + 1) + 3\sin a \cos a] + a^2b^3 \sin a(8a \cos a - \\ & - 25 \sin a) + 4b^2[a^2(5\cos^2 a + 1) + 4a \sin a \cos a + 6\sin^2 a] - \\ & - 32b \sin a[a \cos a + \sin a] + 16\sin^2 a \neq 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

На рис. 4 кривая  $\Gamma(a, b) = 0$  изображена штрихпунктирной линией. На границах областей устойчивости кривая  $\Gamma(a, b) = 0$  разделяет интервалы устойчивости и неустойчивости.

Резонанс третьего порядка в данной задаче оказался несущественным. Резонанс четвертого порядка имеет место на ветвях кривой  $b = -\frac{\operatorname{ctg} a}{a}$ . На рис. 4 эти ветви показаны внутри областей (3.27) сплошными линиями.

Анализ показал, что в каждой из областей устойчивости в линейном приближении на резонансных кривых четвертого порядка имеется небольшой участок неустойчивости, который пересекает кривая  $\Gamma(a, b) = 0$ . В первых трех областях устойчивости эти участки таковы:

$$0.5909 < b < 0.6338; \quad 0.3081 < b < 0.3183; \quad 0.2079 < b < 0.2123.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Все выводы, полученные для периодического движения диска (3.24), в котором он вращается вокруг вертикали, переносятся на случай движения (3.25), в котором вращение происходит вокруг горизонтальной оси. Надо только при определении параметров  $a$  и  $b$  по формулам (3.26) величину  $\omega_1$  заменить на  $2\omega_2$ .

### 3.6. Сохранение условно-периодических движений твердого тела, поверхность которого мало отличается от сферы

Следуя [16,17], рассмотрим задачу о движении твердого тела при наличии его абсолютно упругих соударений с неподвижной абсолютно гладкой плоскостью в предположении о том, что поверхность тела задается аналитической функцией и мало (вместе с малым параметром  $\mu$ ) отличается от сферы радиуса  $R$ .

**Невозмущенное движение. Переменные действие-угол.** При  $\mu = 0$  тело будет шаром; центр тяжести шара совпадает с его геометрическим центром; в общем случае шар не является однородным и имеет произвольный центральный эллипсоид инерции. Функция Лагранжа  $L_0$  представляется в виде двух слагаемых

$$L_0 = L_0^{(1)} + L_0^{(2)}, \tag{3.32}$$

где  $L_0^{(1)}$  — лагранжиан задачи Эйлера–Пуансо, а  $L_0^{(2)}$  описывает движение центра тяжести шара ( $q_0 = z - R$ ; применяются обозначения из разделов 2.1–2.3):

$$L_0^{(2)} = \frac{1}{2}m\dot{q}_0^2 - mgq_0 \quad (q_0 \geq 0). \tag{3.33}$$

Вспомогательная система  $M_0^*$  с функцией Лагранжа  $L_0^*$  имеет (см. раздел 2.3) функцию Гамильтона  $H_0 = H_0^{(1)} + H_0^{(2)}$ , где  $H_0^{(1)}$  — гамильтониан задачи Эйлера–Пуансо, а

$$H_0^{(2)} = \frac{1}{2m}p_0^2 + mg|q_0|. \tag{3.34}$$

Движение Эйлера–Пуансо хорошо известно. Поэтому здесь рассмотрим только движение центра тяжести в системе  $M_0^*$ . Оно описывается гамильтонианом (3.34).

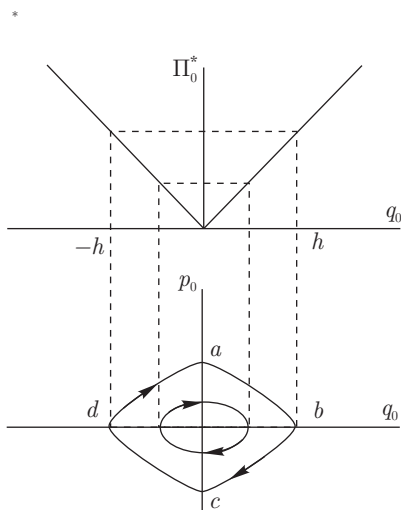


Рис. 5

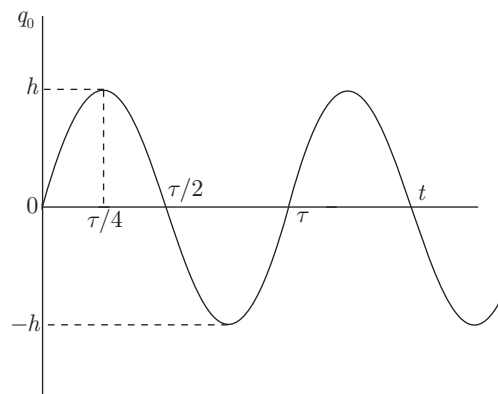


Рис. 6

На рис. 5 представлен график потенциальной энергии  $\Pi_0^*$  вспомогательной системы  $M_0^*$  и траектории на фазовой плоскости  $q_0, p_0$ . Каждая фазовая траектория образована дугами параболы, симметричными относительно оси  $q_0 = 0$ . Все движения в системе  $M_0^*$  периодические с периодом  $\tau^*$ , равным  $4\sqrt{\frac{2h}{g}}$ , где  $h$  — максимальная высота подскока шара над плоскостью. Величина  $\tau^*$  равна промежутку времени между  $k$ -м и  $(k + 2)$ -м соударениями шара и плоскости.

Зависимость величины  $q_0$  от времени в системе  $M_0^*$  показана на рис. 6. График функции  $q_0(t)$  состоит из кусков парабол. Реальное движение центра тяжести, описываемое функцией Лагранжа (3.33), будет иметь период  $\tau = \frac{1}{2}\tau^*$ , равный промежутку времени между двумя последовательными соударениями шара с плоскостью. Для реального движения график функции  $q_0(t)$

получается из графика, представленного на рис. 6, зеркальным отражением его части, находящейся ниже оси времени, относительно этой оси. Фазовый портрет реального движения получается из фазового портрета рис. 5, если в последнем взять только те участки траекторий, на которых  $q_0 \geq 0$  и дополнить их до замкнутых кривых соответствующими отрезками оси  $q_0 = 0$ . Переход из нижних концов этих отрезков в их верхние концы происходит скачком, что соответствует соударению шара с плоскостью.

Приведем функцию (3.34) к переменным действие-угол  $I, w$ . Для этого сделаем  $2\pi$ -периодическую по  $w$  каноническую унивалентную замену переменных  $q_0, p_0 \rightarrow I, w$ :

$$\begin{aligned} q_0 &= \begin{cases} \frac{4h}{\pi^2} w(\pi - w), & 0 \leq w \leq \pi, \\ -\frac{4h}{\pi^2} (w - \pi)(2\pi - w), & \pi \leq w \leq 2\pi; \end{cases} \\ p_0 &= \begin{cases} \frac{2m\sqrt{2gh}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - w\right), & 0 \leq w \leq \pi, \\ -\frac{2m\sqrt{2gh}}{\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - w\right), & \pi \leq w \leq 2\pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Гамильтониан (3.34) в переменных  $I, w$  примет вид

$$H_0^{(2)} = \left( \frac{9m\pi^2 g^2}{32} \right)^{\frac{1}{3}} I^{\frac{2}{3}}. \quad (3.36)$$

Высота подскока  $h$  связана с величиной  $I$  равенством

$$I = \frac{4m}{3\pi} \sqrt{2gh}^{\frac{3}{2}}, \quad (3.37)$$

Частота  $\omega$  периодического движения центра тяжести в вспомогательной системе  $M_0^*$  вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial I} = \frac{2}{3} \left( \frac{9m\pi^2 g^2}{32I} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2\pi}{\tau^*} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{g}{2h} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.38)$$

Таким образом, при  $\mu = 0$  движение вспомогательной системы представляет собой движение Эйлера–Пуансо тела относительно центра тяжести и периодическое движение центра тяжести с частотой  $\omega$  из (3.38). Реальное движение отличается от этого движения только тем, что в нем  $q_0 \geq 0$  и периодическое движение центра тяжести по вертикали происходит с частотой, равной  $2\omega$ .

**Возмущенное движение. Случай отсутствия динамической симметрии.** Пусть  $\mu \neq 0$ . Обозначим через  $I_1, I_2, I_3, w_1, w_2, w_3$  переменные действие-угол в задаче Эйлера–Пуансо [42,43]. Здесь  $I_3$  — проекция кинетического момента тела относительно центра тяжести на вертикаль,  $I_2$  — модуль кинетического момента. Угловая переменная  $w_3$  будет циклической, поэтому  $I_3 = \text{const}$ ; будем считать  $I_3$  одним из параметров задачи. Гамильтониан запишется в виде

$$H = H_0(I_1, I_2, I) + \mu H_1(I_1, I_2, I, w_1, w_2, w, \mu), \quad (3.39)$$

$$H_0 = H_0^{(1)}(I_1, I_2) + H_0^{(2)}(I),$$

где  $H_0^{(1)}$  — гамильтониан для движения Эйлера–Пуансо, а  $H_0^{(2)}$  определен равенством (3.36).

В невозмущенном движении  $I_i = I_{i0}$  ( $i = 1, 2$ ),  $I = I_0$ . Считаем, что  $I_0 \neq 0$  (т. е. в невозмущенном движении высота подскока тела над плоскостью не равна нулю), а движение условно-периодическое.

Гамильтониан (3.39)  $2\pi$ -периодичен по  $w_1, w_2, w$  и в достаточной близости от невозмущенного движения аналитичен относительно  $I_1, I_2, I, w_1, w_2$ ; по переменной  $w$  функция (3.39) непрерывна, но неаналитична.

Для решения вопроса о сохранении условно-периодических движений при малых  $\mu$  воспользуемся КАМ-теорией (см. раздел 2.4 обзора). Определитель (2.38) можно записать [17] в виде

$$\Delta = \omega^2 \delta_2 \left( \frac{H_0^{(1)}}{mgh} - 1 \right),$$

где  $\delta_2$  — гессиан функции  $H_0^{(1)}$ . В [44] показано, что  $\delta_2 \neq 0$ . Поэтому  $\Delta$  может обратиться в нуль только когда  $mgh = H_0^{(1)}$ , т. е.  $\Delta$  не обращается в нуль тождественно, и условие изоэнергетической невырожденности  $H_0$  выполнено. Следовательно, при достаточно малых  $\mu$  для большинства начальных условий величины  $I_1, I_2, I$  в возмущенном движении тела при всех  $t$  близки к их начальным значениям.

Это означает, что (для большинства начальных условий) на бесконечном интервале времени движение тела, форма которого достаточно близка к сфере, таково, что величина его кинетического момента и угол между вектором кинетического момента и вертикалью мало отличаются от их начальных значений; высота подскока  $h$  тела над плоскостью мало изменится по сравнению с ее значением в невозмущенном движении и, следовательно, мало изменится промежуток времени между двумя последовательными соударениями тела с плоскостью.

**Возмущенное движение. Случай симметричного тела.** Пусть тело будет динамически и геометрически симметричным с осью симметрии  $G\zeta$ . Проекция кинетического момента на ось  $G\zeta$  будет тогда первым интегралом и ее можно отнести к параметрам задачи. Поэтому исследование движения тела сводится к рассмотрению системы с двумя степенями свободы, причем

$$H = H_0 + \mu H_1(I_2, I, w_2, w, \mu), \tag{3.40}$$

$$H_0 = \frac{I_2^2}{2A} + \left( \frac{9m\pi^2 g^2}{32} \right)^{\frac{1}{3}} I^{\frac{2}{3}}, \quad \left( A = \frac{2}{5} mR^2 \right).$$

При  $\mu = 0$  движение твердого тела относительно центра тяжести будет регулярной прецессией; в исключительных случаях эта прецессия вырождается в стационарные вращения тела вокруг главных центральных осей инерции.

При  $\mu \neq 0$  к системе с гамильтонианом (3.40) можно применить алгоритм исследования из раздела 2.4 обзора. Для величины  $b_2$  из (2.42) получаем следующее выражение:

$$b_2 = \frac{1}{2A\omega} \left( 1 - \frac{I_2^2}{2Amgh} \right).$$

Величина  $b_2$  обращается в нуль только тогда, когда  $mgh = \frac{I_2^2}{2A}$ . Но если  $b_2 = 0$ , то

$$b_3 = -\frac{2I_2^3}{27A^3\omega^3 I^2} \neq 0.$$

Поэтому выводы о сохранении движений при малых  $\mu$  справедливы и здесь. Но так как здесь мы имеем дело не с тремя, а с двумя степенями свободы, то  $I_2, I$  близки при всех  $t$  к своим начальным значениям не для большинства, а для всех начальных условий.



### 3.7. Периодические движения эллипсоида вращения

В [16,17] методами, изложенными в разделах 2.3 и 2.5 обзора, исследована задача о существовании и устойчивости периодических движений однородного эллипсоида вращения, мало отличающегося от шара, при наличии соударений с неподвижной горизонтальной плоскостью. В системе координат  $G\xi\eta\zeta$ , образованной главными центральными осями инерции, уравнение поверхности эллипсоида имеет вид

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1, \quad c - a = \mu(c - \acute{a}); \quad 0 < \mu \ll 1.$$

«Редуцирующая» замена переменных была получена в виде ряда по  $\mu$ . Затем, согласно алгоритму из [12], был осуществлен переход к вспомогательной системе, уравнения движения которой были записаны в гамильтоновой форме. За переменные, описывающие движение тела относительно центра тяжести, были приняты переменные Андуайе [43], а за переменные, описывающие движение центра тяжести, — переменные  $I, w$ , введенные в разделе 3.6. Функция Гамильтона имеет вид

$$H = H_0 + \mu H_1(I_2, I, \varphi_2, w, \mu),$$

где

$$H_0 = \frac{I_2^2}{2A} + \left( \frac{9m\pi^2 g^2}{32} \right)^{\frac{1}{3}} I^{\frac{2}{3}}, \quad \left( A = \frac{2}{5} m a^2 \right),$$

$$\begin{aligned} H_1(I_1, I_2, \varphi_2, w, 0) &= 2m(\acute{c} - \acute{a}) \sin \delta_1 \sin \delta_2 \frac{I_2^2}{A^2} |q_0(I, w)| (\sin \delta_1 \sin \delta_2 \cos 2\varphi_2 - \\ &- \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \varphi_2) + mg(\acute{c} - \acute{a}) \cos^2 Q_1, \\ \cos Q_1 &= \cos \delta_1 \cos \delta_2 - \sin \delta_1 \sin \delta_2 \cos \varphi_2, \\ \cos \delta_1 &= \frac{I_3}{I_2}, \quad \cos \delta_2 = \frac{L}{I_2}. \end{aligned}$$

Здесь  $I_3$  и  $L$  — проекции вектора кинетического момента на вертикаль и ось симметрии; они являются первыми интегралами и содержатся в функции  $H_1$  в качестве параметров. Функция  $|q_0(I, w)|$  определена равенствами (3.35) и (3.37), она представима рядом Фурье

$$|q_0(I, w)| = \frac{g}{4\omega^2} \left( \frac{\pi^2}{3} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nw}{n^2} \right).$$

Здесь величина  $\omega$  определена равенством (3.38).

При  $\mu = 0$  движение описывается формулами

$$I_2 = I_{20}, \quad I = I_0, \quad \varphi_2 = \omega_2 t, \quad w = \omega t + \lambda \quad \left( \omega_2 = \frac{I_{20}}{A}, \quad \lambda = \text{const} \right)$$

и представляет собой равномерное вращение эллипсоида с угловой скоростью  $\omega_2$  вокруг постоянного вектора кинетического момента. При этом эллипсоид периодически ударяется о плоскость; время между двумя последовательными ударами равно  $\frac{\pi}{\omega}$ . Если отношение  $\omega_2 : \omega$  будет рациональным числом, то это движение будет периодическим с некоторым периодом  $T$ . При  $\mu$  отличном от нуля, но достаточно малом существование периодических движений можно установить по алгоритму из раздела 2.5 обзора.

Показано [16,17], что в первом приближении по  $\mu$  обнаруживаются периодические движения, для которых частота  $\omega_2$  невозмущенного движения кратна частоте  $\omega$  :  $\omega_2 = k\omega$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Для таких движений эллипсоид за время между двумя последовательными соударениями с плоскостью поворачивается вокруг вектора кинетического момента на угол  $k\pi$ .

Достаточным условием существования периодических движений является выполнение следующих требований: 1) невозмущенное периодическое движение не должно быть вращением тела вокруг вертикали или вокруг оси симметрии; 2)  $mgh \neq \frac{I_{20}^2}{2A}$ .

Период построенных периодических движений будет аналитической функцией параметра  $\mu$ , принимающей при  $\mu = 0$  значение

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi A}{I_2} k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

В [16,17] получены также условия орбитальной устойчивости этих периодических движений эллипсоида.

### 3.8. О движении шара над цилиндрической поверхностью

**Постановка задачи.** Рассмотрим однородный шар, движущийся в однородном поле тяжести над неподвижным абсолютно гладким желобом с цилиндрической поверхностью, образующая которой горизонтальна. Движение отнесем к неподвижной системе координат  $O\xi\eta\zeta$ , ось  $O\eta$  которой вертикальна, а ось  $O\xi$  направлена вдоль образующей желоба. Поверхность желоба задается уравнением  $\eta = \varphi(\xi)$ .

При движении шар время от времени соударяется с поверхностью желоба. Удар считаем абсолютно упругим. Проекция скорости центра тяжести шара на ось  $O\xi$  постоянна. Без ограничения общности примем ее равной нулю, и если пренебречь размерами шара, то приходим к задаче о движении тяжелой материальной точки в плоскости  $\zeta = 0$  над кривой  $\eta = \varphi(\xi)$  (рис. 7).

Будем предполагать, что кривая  $\eta = \varphi(\xi)$  в начале координат  $\xi = \eta = 0$  касается оси  $O\xi$ , а функция  $\varphi(\xi)$  аналитична при достаточно малых  $|\xi|$ .

Существует периодическое движение точки, когда ее траектория лежит на вертикальной оси  $O\eta$ , а сама точка в результате соударений с кривой  $\eta = \varphi(\xi)$  в начале координат  $\xi = \eta = 0$  периодически подсакивает на некоторую высоту  $h$ .

Обозначим через  $a_k$  значение  $k$ -й производной функции  $\varphi(\xi)$  при  $\xi = 0$  и введем обозначения  $\kappa_0 = a_2 h$ ,  $\kappa_1 = a_3 h^2$ ,  $\kappa_2 = a_4 h^3, \dots$  Тогда функция  $\varphi(\xi)$  запишется в виде такого степенного ряда:

$$\varphi(\xi) = \frac{\kappa_0}{2h} \xi^2 + \frac{\kappa_1}{6h^2} \xi^3 + \frac{\kappa_2}{24h^3} \xi^4 + \dots \quad (3.41)$$

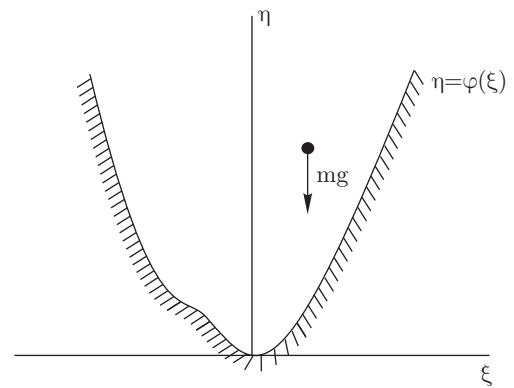


Рис. 7

В статье [32] получены условия орбитальной устойчивости упомянутого периодического движения точки вдоль вертикали в зависимости от высоты подскока  $h$  и от формы кривой  $\eta = \varphi(\xi)$  в окрестности начала координат (т. е. от безразмерных параметров  $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots$ ). Некоторые частные результаты решения этой задачи получены также в [12,31].

**Результаты исследования устойчивости.** Если  $\kappa_0 > \frac{1}{2}$ , то имеет место неустойчивость. Это означает, что для орбитальной неустойчивости периодического движения точки вдоль вертикали достаточно, чтобы высота подскока точки была больше половины радиуса кривизны кривой (в начале координат, где происходят соударения в невозмущенном движении). При выполнении неравенства

$$0 < \kappa_0 < \frac{1}{2} \quad (3.42)$$

имеет место устойчивость, а при  $\kappa_0 = 0$  и  $\kappa_0 = \frac{1}{2}$  — неустойчивость в линейном приближении.

Для  $\kappa_0$  из отрезка  $[0, \frac{1}{2}]$  линейного анализа недостаточно. Строгое исследование орбитальной устойчивости потребовало [32] рассмотрения нелинейного анализа. Перечислим полученные результаты.

Пусть  $\kappa_0 = 0$  (при этом кривизна кривой  $\eta = \varphi(\xi)$  в начале координат равна нулю). Тогда при  $\kappa_1 \neq 0$  имеем неустойчивость; если же  $\kappa_1 = 0$ , то при  $\kappa_2 < 0$  имеет место неустойчивость, а при  $\kappa_2 > 0$  — устойчивость (независимо от высоты подскока точки в невозмущенном движении).

Если  $\kappa_0 = \frac{1}{2}$ , то при выполнении неравенства  $\kappa_2 < 6\kappa_1^2 + \frac{3}{2}$  будет устойчивость, а при противоположном знаке в последнем неравенстве — неустойчивость.

Для значений  $\kappa_0$  из области (3.42) результаты нелинейного анализа орбитальной устойчивости периодического движения точки вдоль вертикали таковы. Если  $\kappa_0 \neq \frac{3}{8}$  (нет резонанса третьего порядка) и  $\kappa_0 \neq \frac{1}{4}$  (нет резонанса четвертого порядка) и выполняется неравенство

$$\kappa_2 \neq 4\kappa_0^2(\kappa_0 + 1) + \frac{\kappa_1^2(5 - 16\kappa_0)}{\kappa_0(3 - 8\kappa_0)},$$

то имеет место орбитальная устойчивость.

Если  $\kappa_0 = \frac{3}{8}$ , а  $\kappa_1 \neq 0$ , то движение неустойчиво. Если же при  $\kappa_0 = \frac{3}{8}$  имеем  $\kappa_1 = 0$ , но при этом  $\kappa_2 \neq \frac{99}{128}$ , то движение орбитально устойчиво.

Если  $\kappa_0 = \frac{1}{4}$  и либо  $\kappa_2 > 12\kappa_1^2 + \frac{15}{32}$ , либо  $\kappa_2 < \frac{15}{64}$ , то имеет место орбитальная устойчивость; если же  $\frac{15}{64} < \kappa_2 < 12\kappa_1^2 + \frac{15}{32}$ , то движение точки орбитально неустойчиво.

**Примеры.** В [32] рассмотрено приложение сформулированных выше общих выводов об устойчивости к ряду случаев движения материальной точки над конкретно заданной кривой. Рассмотрим некоторые из них.

1<sup>0</sup>. Дуга окружности  $\xi^2 + (\eta - R)^2 = R^2$ . Вертикальное периодическое движение точки орбитально устойчиво при  $0 < h \leq \frac{1}{2}R$  и неустойчиво при  $h > \frac{1}{2}R$ .

2<sup>0</sup>. Парабола  $\varphi(\xi) = \frac{\xi^2}{2p}$ . Если высота подскока больше расстояния от вершины параболы до ее фокуса ( $h > \frac{1}{2}p$ ), то периодическое движение точки орбитально неустойчиво; если же  $0 < h \leq \frac{1}{2}p$ , то устойчиво.

3<sup>0</sup>. Дуга циклоиды  $\xi = R(\tau + \sin \tau)$ ,  $\eta = R(1 - \cos \tau)$ . Если  $0 < h \leq 2R$ , то имеет место орбитальная устойчивость, а при  $h > 2R$  — неустойчивость.

4<sup>0</sup>. Дуга эллипса

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{(\eta - b)^2}{b^2} = 1.$$

Здесь задача об устойчивости оказалась более сложной. Она решена в работах [32,45,46]. При этом потребовалось в уравнениях возмущенного движения учесть члены до пятой степени включительно (а не до третьей, как в примерах 1<sup>0</sup> – 3<sup>0</sup>). Результаты исследования удобно представить графически в плоскости безразмерных параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  (рис. 8):

$$\alpha = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \quad \beta = \frac{h}{b}.$$

Если  $\beta > \frac{1}{2}\alpha$ , то движение орбитально неустойчиво. На рис. 8 прямая  $\beta = \frac{1}{2}\alpha$  обозначена через  $l_2$ , а область неустойчивости заштрихована. На граничной прямой  $l_2$  будет устойчивость при  $0 < \alpha \leq 4$ , на остальной части этой прямой (при  $\alpha > 4$ ) — неустойчивость. Точка  $A(4, 2)$  разделяет  $l_2$  на участки устойчивости и неустойчивости, в самой точке  $A$  — устойчивость.

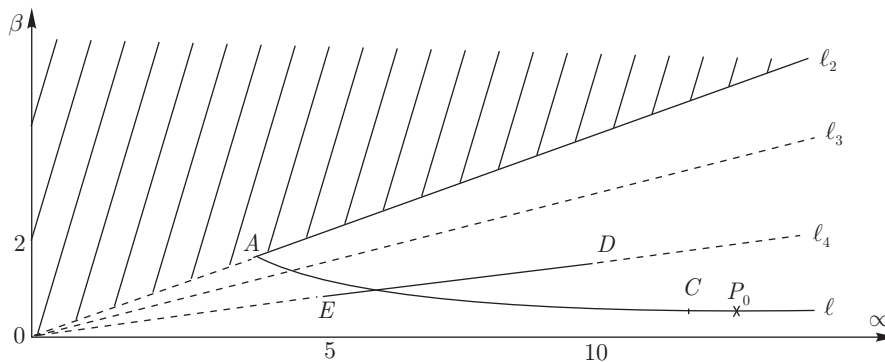


Рис. 8

При  $\beta < \frac{1}{2}\alpha$  выполнены условия орбитальной устойчивости в первом приближении. Нелинейный анализ показал, что в этой области на прямой  $\beta = \frac{3}{8}\alpha$  (резонанс третьего порядка), обозначенной на рис. 8 через  $l_3$ , периодическое движение шара орбитально устойчиво. На прямой  $l_4$  резонанса четвертого порядка ( $\beta = \frac{1}{4}\alpha$ ) будет всюду орбитальная устойчивость, кроме полуинтервала  $5 < \alpha \leq 10$ , на котором движение неустойчиво. Граничными точками указанного полуинтервала являются точки  $E(5, \frac{5}{4})$ ,  $D(10, \frac{5}{2})$ .

Внутри области  $\beta < \frac{1}{2}\alpha$  устойчивости в линейном приближении вне прямых  $l_3$  и  $l_4$  резонансов третьего и четвертого порядков исследование проводилось для  $\alpha < 200$ . Оказалось, что всюду будет устойчивость, кроме точек  $P_0$  и  $C$ , лежащих на кривой  $l$ , задаваемой

уравнением  $\beta = \frac{4\alpha}{3\alpha - 4}$ . На этой кривой гамильтониан задачи изоэнергетически вырожден в членах четвертой степени относительно возмущений. В точке  $P_0(12.8148, 1.4882)$  гамильтониан вырождается и в членах шестой степени; вопрос об устойчивости в этой точке остался открытым. В точке  $C(12, \frac{3}{2})$  реализуется резонанс шестого порядка; в этой точке периодическое движение шара оказалось орбитально неустойчивым.

### 3.9. О других задачах динамики систем с неудерживающей связью

**Неголономные системы с неудерживающей связью.** В работе [47] в регулярной форме получены уравнения движения механической системы с одной неудерживающей и одной или несколькими дифференциальными неинтегрируемыми связями. Предполагается, что дифференциальным связям подчинены либо все движения системы, либо лишь такие, для которых неудерживающая связь напряжена. На основании полученных уравнений исследовано влияние ударов о плоскость на устойчивость перманентных вращений вокруг оси симметрии тяжелого твердого тела, движущегося над неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскостью. В частности, показано, что устойчивые вращения тела на плоскости могут быть дестабилизированы за счет подскоков на сколь угодно малую высоту.

**Бильярдные задачи. Твердое тело с двусторонним ограничителем.** Начиная с работ Дж. Биркгофа, задачи бильярдного типа являются популярным объектом исследования в теории динамических систем [28,48,49]. Эти задачи интересны еще и тем, что они естественно возникают в ряде важных задач механики, физики и техники, например, в теории и практике виброударных систем [4], при изучении дифракции коротких волн [55], при построении динамических моделей идеального газа [61] и др. [56,62].

Задача о бильярде Биркгофа [28,48,49] состоит в изучении движения материальной точки в области, ограниченной замкнутой выпуклой гладкой кривой на плоскости. Внутри области точка движется прямолинейно, а отскок от кривой происходит по закону «угол падения равен углу отражения». Вопросы интегрируемости задачи о бильярде Биркгофа обсуждаются в монографии [49] (см. также статью [52]). Задача о существовании и устойчивости периодических движений исследовалась в работах [34,50,51,55].

Устойчивость двухзвенных периодических траекторий бильярда Биркгофа на двумерных поверхностях постоянной кривизны рассмотрена в статье [53].

Устойчивость периодических движений материальной точки в трехмерном пространстве между двумя выпуклыми стенками с упругими отражениями изучена в работе [54].

В монографии [56] исследовано движение материальной точки в однородном поле тяжести внутри абсолютно гладкой окружности, плоскость которой вертикальна. В [57] решена задача об устойчивости вертикального периодического движения точки в этом «динамическом бильярде».

В статье [58] методом усреднения исследована динамика материальной точки на гладкой поверхности, совершающей быстрые вибрации в поле потенциальных сил. Изучен общий случай твердой вибрирующей поверхности, а также случай эллипсоида с пульсирующими осями.

К бильярдным задачам тесно примыкает задача о движении твердого тела между двумя стенками (подвижными или неподвижными). Такое обобщение важно для построения моделей взаимодействия идеального газа со стенками содержащего его сосуда при учете формы молекул газа. Эта обобщенная бильярдная задача в плоском случае исследовалась в статье [59]. Пространственная задача рассмотрена в работе [60].

**О безударных движениях.** В системах с неудерживающими связями движение вовсе не обязательно сопровождается ударами, возможны и безударные движения. С практической точки

зрения безударные движения интересны тем, что они дают возможность совершать «перелеты» между участками напряжения связи без нежелательных эффектов, присущих ударам: перегрузок, вибраций, энергетических потерь и т. п. [63]. В статье [64] получены условия существования безударных движений и установлены их притягивающие свойства: при некоторых условиях они аналогичны свойствам полуустойчивых предельных циклов. В качестве примеров в [64] рассмотрено «тело на упругой ноге» [63] и связка тел (двух спутников) на круговой орбите [65].

В статьях [66,67] исследовалась задача о безударных движениях неоднородного диска над неподвижной горизонтальной плоскостью. Показано, что в случае абсолютно гладкой плоскости существует счетное множество периодических движений диска с безударными перелетами. Каждое из таких движений обладает притягивающими свойствами. В случае абсолютно шероховатой плоскости безударный отрыв диска от плоскости невозможен. Для плоскости с кулоновским трением безударные подскоки возможны, но периодических движений с перелетами нет.

**О конструктивных методах обоснования динамики систем с соударениями** В работе [68] предложен конструктивный метод обоснования основных принципов динамики систем с неударивающими связями. В основе метода лежит анализ физических способов реализации связи (жесткие системы, анизотропная вязкость, присоединенные массы). Такой подход позволяет просто записать уравнения движения, пригодные на всем интервале времени и более точно учитывающие реальную динамику. Этим методом в [68] решен ряд задач механики виброударных систем. В частности, найдены условия устойчивости периодических колебаний и исследована эволюция движения с неупругими ударами при коэффициенте восстановления, близком к единице. Установлена полная интегрируемость и дан качественный анализ задачи о параболическом бильярде в однородном силовом поле.

В статье [69] для описания соударения шероховатых тел предложена модель, основанная на задании ударных сил как некоторой функции деформаций. При этом коэффициенты трения и восстановления заранее не задаются, что дает возможность исследовать их зависимость от начальных условий. Такой подход более физичен, чем принятый в классической стереомеханической теории удара. В качестве одного из примеров в [69] исследована устойчивость движения материальной точки, периодически подсакивающей вдоль оси симметрии шероховатой поверхности вращения, совершающей гармонические колебания вдоль вертикали.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (02-01-07006).

## Список литературы

- [1] Маркеев А.П. *Теоретическая механика*, Москва—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007, 591 с.
- [2] Маркеев А.П. *Динамика твердого тела, соприкасающегося с твердой поверхностью*, М.: Наука, 1992., 335 с.
- [3] Иванов А.П. *Динамика систем с механическими соударениями*, М.: Международная программа образования, 1997, 336 с.
- [4] Кобринский А.Е., Кобринский А.А. *Виброударные системы*, М.: Наука, 1973, 591 с.
- [5] Нагаев Р.Ф. *Механические процессы с повторными затухающими соударениями*, М.: Наука, 1978, 200 с.
- [6] Иванов А.П. Аналитические методы в теории виброударных систем *ПММ*, 1993, т. 57, вып. 2, с. 5–21.



- [7] Иванов А.П. Единая форма уравнений движения тяжелого твердого тела на горизонтальной опоре *Изв. РАН. МТТ*, 1993, № 3, с. 73–79.
- [8] Пэнлеве П. *Лекции о трении*, М.: Гостехиздат, 1954, 316 с.
- [9] Журавлев В.Ф. Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями, *ПММ*, 1978, т. 42, вып. 5, с. 781–788.
- [10] Журавлев В.Ф., Привалов Е.А. Исследование методом усреднения вынужденных колебаний гироскопа с ударным поглотителем, *Изв. АН СССР. МТТ*, 1976, №3, с. 18–22.
- [11] Журавлев В.Ф. Исследование некоторых виброударных систем методом негладких преобразований *Изв. АН СССР. МТТ*, 1977, №6, с. 24–28.
- [12] Иванов А.П., Маркеев А.П. О динамике систем с односторонними связями, *ПММ*, 1984, т. 48, вып. 4, с. 632–636.
- [13] Суслов Г.К. *Теоретическая механика*, М.; Л: Гостехиздат, 1946, 655 с.
- [14] Иванов А.П. Об устойчивости в системах с неустойчивыми связями, *ПММ*, 1984, т. 48, вып. 5, с. 725–732.
- [15] Иванов А.П. О периодических движениях тяжелого твердого тела с ударами о горизонтальную плоскость, *Изв. АН СССР. МТТ*, 1985, №. 2, с. 30–35.
- [16] Маркеев А.П. О движении твердого тела с идеальной неустойчивой связью, *ПММ*, 1985, т. 49, вып. 5, с. 707–716.
- [17] Маркеев А.П. О качественном анализе систем с идеальной неустойчивой связью, *ПММ*, 1989, т. 53, вып. 6, с. 867–872.
- [18] Маркеев А.А. Об устойчивости перманентного вращения тела с неустойчивой связью, *Вестн. МГУ. Математика, механика*, 1992, №. 3, с. 48–54.
- [19] Колмогоров А.Н. О сохранении условно - периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, *Докл. АН СССР*, 1954, т. 98, №4, с. 527–530.
- [20] Арнольд В.И. Доказательство теоремы А.Н.Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, *Успехи мат. наук.*, 1963, т. 18, вып. 5, с. 13–40.
- [21] Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1974, 431 с.
- [22] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. *Математические аспекты классической и небесной механики*, М.: Эдиториал УРСС, 2002, 416 с.
- [23] Мозер Ю. *Лекции о гамильтоновых системах*, М.: Мир, 1973, 168 с.
- [24] Маркеев А.П., Чуркина Н.И. О периодических решениях Пуанкаре канонической системы с одной степенью свободы, *Письма в Астрон. журн.*, 1985, т. 11, №8, с. 634–639.
- [25] Пуанкаре А. *Избр. тр. Т. 2. Новые методы небесной механики*, М.: Наука, 1972, 999с.
- [26] Birkhoff G.D. Dynamical systems with two degrees of freedom, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1917, vol. 18, April. pp. 199–300.
- [27] Birkhoff G.D. Surface transformations and their dynamical applications, *Acta Mathematica*, 1922, vol. 43, March, pp. 1–119.
- [28] Биркгоф Дж. Д. *Динамические системы*, М.—Л.: Гостехиздат, 1941, 320 с.
- [29] Levi-Civita T. Sopra alcuni criteri di instabilita, *Annali di Matematica. Ser.3*, 1901, vol. 5, pp. 221–307.
- [30] Зигель К.Л. *Лекции по небесной механике*, М.: Изд-во иностр. лит., 1959, 301 с.



- [31] Маркеев А.П. О колебаниях материальной точки, подвешенной на идеальной нити, *ПММ*, 1996, т. 60, вып. 2, с. 240–249.
- [32] Маркеев А.П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями, *Изв. РАН. МТТ*, 1996, №2, с. 37–54.
- [33] Аппель П. *Теоретическая механика. Т.2*, М.: Физматгиз, 1960, 487 с.
- [34] Markeev A.A. The Method of Pointwise Mappings in the Stability Problem of Two - Segment Trajectories of the Birkhoff Billiards. Dynamical Systems in Classical Mechanics. Advances in the Mathematical Sciences, *Amer. Math. Soc. Ser. 2*, vol. 168, 1995, pp. 211–226.
- [35] Маркеев А.П. Об устойчивости вращения твердого тела вокруг вертикали при наличии соударений с горизонтальной плоскостью, *ПММ*, 1984, т. 48, вып. 3, с. 363–369.
- [36] Леви-Чивита Т., Амальди У. *Курс теоретической механики. Т. 2. ч. 2*, М.: Изд-во иностр. лит., 1951, 555 с.
- [37] Ляпунов А.М. *Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч. Т.1*, М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1954, с.327–401.
- [38] Маркеев А.П. Об устойчивости движения твердого тела при наличии соударений с горизонтальной плоскостью, *Изв. РАН. МТТ*, 1997, №5. с. 32–40.
- [39] Маркеев А.П., Холостова О.В. *Об устойчивости движения твердого тела при наличии соударений с вибрирующей горизонтальной плоскостью. Некоторые задачи и методы исследования динамики механических систем*, М.: Изд-во МАИ, 1985, с. 34–40.
- [40] Маркеев А.П. Исследование устойчивости периодического движения твердого тела при наличии соударений с горизонтальной плоскостью, *ПММ*, 1994, т. 58, вып. 3, с. 71–81.
- [41] Алехин А.К., Маркеев А.П. Об устойчивости периодического движения диска над горизонтальной плоскостью, *Изв. РАН. МТТ*, 2000, №4, с. 16–22.
- [42] Садов Ю.А. Переменные действие–угол в задаче Эйлера–Пуансо, *ПММ*, 1970, т. 34, вып. 5, с. 962–964.
- [43] Архангельский Ю.А. *Аналитическая динамика твердого тела*, М.: Наука, 1977, 328 с.
- [44] Козлов В.В. *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*, М.: Изд-во МГУ, 1980, 230 с.
- [45] Маркеев А.П. О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы, *ПММ*, 1997, т.61, вып. 3, с. 369–376 .
- [46] Маркеев А.П., Чеховская Т.Н. *Об устойчивости периодического движения шара над поверхностью эллиптического цилиндра, XII симпозиум «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем». Тезисы докладов*, Москва; Звенигород. 1998.
- [47] Иванов А.П. Об уравнениях движения неголономной системы с неустойчивающей связью, *ПММ*, 1985, т. 49, вып. 5, с. 717–723.
- [48] Birkhoff G.D. On the periodic motions of dynamical systems, *Acta. math.*, 1927, vol. 50, pp. 359–379.
- [49] Козлов В.В., Трещев Д.В. *Бильярды. Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991, 168 с.
- [50] Трещев Д.В. К вопросу о периодических траекториях бильярда Биркгофа, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, 1987, №5, с. 72–75.
- [51] Трещев Д.В. К вопросу об устойчивости периодических траекторий бильярда Биркгофа, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, 1988, №2, с. 44–50.

- [52] Ramani A., Kalliterakis A., Grammaticos B., Dorizzi B. Integrable curvilinear billiards, *Phys. Lett. A.*, 1986, vol. 115, №1–2, pp. 25–28.
- [53] Абдрахманов А.М. Об устойчивости двухзвенных периодических траекторий Биркгофа на двумерных поверхностях постоянной кривизны, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Матем. Механ.*, 1991, №4, с. 88–90.
- [54] Козлов В. В., Чигур И.И. Об устойчивости периодических траекторий пространственного бильярда, *ПММ*, 1991, т. 55, вып. 5, с. 713–717.
- [55] Бабич В.М., Булдырев В.М. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, М.: Наука, 1972, 456 с.
- [56] Beletsky V.V. *Regulare und Chotische Bewegung starre Korper*, Stuttgart: Teunber–Verlag, 1995.
- [57] Холостова О.В. *Об устойчивости двухзвенной периодической траектории тяжелой материальной точки внутри окружности. Второй симпозиум по классической и небесной механике. Август 1996. Великие Луки: Тезисы докладов*, Москва–Великие Луки. 1966. с. 88–89.
- [58] Юдович В.И. Динамика материальной частицы на вибрирующей гладкой поверхности, *ПММ*, 1998, т. 62, вып. 6, с. 968–976.
- [59] Маркеев А.А. Об устойчивости плоского периодического движения твердого тела между параллельными стенками, *Изв. РАН. МТТ*, 1995, №1, с. 22–24.
- [60] Иванов А.П., Переверзев В.И. О периодических движениях твердого тела, упруго соударяющегося с параллельными стенками, *Изв. РАН. МТТ*, 2001, №2, с. 20–23.
- [61] Иванов А.П., Переверзев В.И. Исследование двухмассовой виброударной системы с упругой связью, *Изв. РАН. МТТ*, 2001, №4, с. 40–48.
- [62] Лихтенберг А., Либерман М. *Регулярная и стохастическая динамика*, М.: Мир, 1984, 528 с.
- [63] Schiehlen W., Gao J. Simulation des Stossfreien Hupfens, *ZAMM*, 1989, Bd. 69, H. 5, S. 302–303.
- [64] Иванов А.П. О безударных движениях в системах с неудерживающими связями, *ПММ*, 1992, т. 56, вып. 1, с. 3–15.
- [65] Белецкий В.В. Об относительном движении связки двух тел на орбите, *Космич. исследования*, 1969, т. 7, №6, с. 827–840.
- [66] Иванов А.П. О безударных прыжках неоднородного колеса. 1. Случай гладкой опоры, *Изв. РАН. МТТ*, 1992, №1, с. 25–31.
- [67] Иванов А.П. О безударных прыжках неоднородного колеса. 2. Шероховатая опора, *Изв. РАН. МТТ*, 1993, №1, с. 61–64.
- [68] Козлов В.В. Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями, *ПММ*, 1988, т. 52, вып. 6, с. 883–894.
- [69] Иванов А.П. Конструктивная модель удара с трением, *ПММ*, 1988, т. 52, вып. 6, с. 895–901.