

## О затухающем источнике в модели мелкой воды на вращающейся сфере

**А. В. Иванова, А. П. Чупахин**

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
Россия, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15  
E-mails: ivanovaannav@gmail.com, chupakhin@hydro.nsc.ru

*Получено 20 ноября 2007 г.*

В работе рассмотрена система уравнений, описывающая движение мелкой воды на сфере, вращающейся с переменной угловой скоростью. Исследована инвариантная подмодель ранга один, описывающая важный для приложений в океанологии и метеорологии случай затухающего со временем вращения. Исходная система сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, решение которого строится численно. Полученные решения описывают на вращающейся сфере затухающий со временем источник, расположенный вдоль параллели выше экватора. Движение жидкости происходит в сферическом поясе и заканчивается стоком, расположенном на параллели в южном полушарии. Установлено существование сверхкритического и докритического режимов движения. Построенные решения описывают движения воздушных масс из полярных областей планеты, которые оказывают существенное влияние на формирование погоды.

Ключевые слова: мелкая вода на сфере, два режима течения, дифференциальные уравнения

**A. V. Ivanova, A. P. Chupakhin**

### On damping source in model of the shallow water on rotating sphere

We investigate exact shallow water on a rotating sphere. This model is used in oceanology and physics of atmosphere for describing large-scale motions of gas and fluid. We construct and study solution, which describes the damped ring source on the sphere. The motion takes place in a spherical belt. System of equations of shallow water on the sphere has solutions of two types: supercritical (supersonic) and subcritical (subsonic).

Keywords: shallow water on a sphere, two types of motion, differential equation

Mathematical Subject Classifications: 35L60, 35L67, 76N15, 76C15

## 1. Введение

Модель мелкой воды широко используется для описания движений сплошной среды в том случае, когда вертикальный масштаб движения  $H_0$  мал, по сравнению с горизонтальным  $a_0$  [1–3]. Уравнения модели выводятся из задачи со свободной границей для уравнений Эйлера, описывающих движения идеальной несжимаемой жидкости. Предположения о несжимаемости среды оправданы для заведомо дозвуковых скоростей движения, наблюдаемых в атмосфере и Мировом океане. Вязкость оказывает малое влияние на крупномасштабные движения планетарного размера.

При рассмотрении газа в атмосфере и жидкости в Мировом океане на поверхности вращающейся притягивающей сферы определяющими являются эффекты вращения и притяжения. Их взаимодействие уравнивает среду в целом на поверхности сферы. На фоне этого равновесия возникают движения, которые с успехом моделируются уравнениями мелкой воды.

Обычно эта модель применяется в приближении  $\beta$ - или  $f$ -плоскости, когда для описания движения используют проекцию части сферы на касательную плоскость. Подобное приближение правомерно для течений, происходящих в узкой зоне по широте, но не представляется удовлетворительным для движений, в которых как широтные, так и долготные масштабы сопоставимы и достаточно велики. В этом случае эффект сферичности необходимо учитывать в полной мере.

Модель мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере выведена в работе [4]. В данной работе рассматривается модель мелкой воды без учета центробежной силы, но с переменной угловой скоростью вращения. Исследованы инвариантные решения типа простых волн, описывающие затухающие движения газа из кольцевого источника — параллели — по поверхности сферы в сток такого же вида. Доказано существование двух типов движения — сверх- и докритического. Исследована структура звуковых характеристик на данном решении.

## 2. Уравнения модели

Система уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере имеет вид:

$$\begin{aligned} Dv + f_0 h_\theta - w^2 \operatorname{ctg} \theta + r_0 w \cos \theta &= 0, \\ Dw + f_0 (\sin \theta)^{-1} h_\varphi + v w \operatorname{ctg} \theta - r_0 v \cos \theta &= 0, \\ Dh + (\sin \theta)^{-1} h((v \sin \theta)_\theta + w_\varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

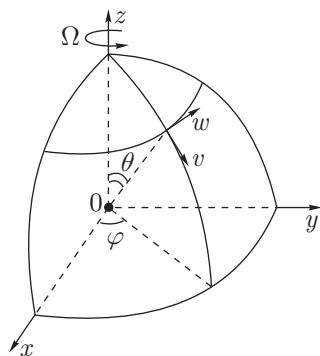


Рис. 1

Уравнения (2.1) записаны в неинерциальной, вращающейся со сферой с угловой скоростью  $\Omega_0$  системе координат. Эффект, обусловленный центробежной силой, считается малым. В (2.1)  $D = \partial_t + v \partial_\theta + (\sin \theta)^{-1} w \partial_\varphi$  — полная производная вдоль поверхности сферы,  $0 < \theta < \pi$  — дополнение до широты,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  — долгота,  $v$  — меридиональная,  $w$  — долготная компоненты скорости,  $h > 0$  — глубина слоя. Положительным считается направление с севера на юг и с запада на восток. Безразмерные параметры  $r_0$  и  $f_0$  связаны с числами Россби  $R_0$  и Фруда  $F$

$$R_0 = \frac{V_0}{2a_0 \Omega_0}, \quad F = \frac{V_0}{\sqrt{gH_0}} \quad (2.2)$$

соотношениями

$$r_0 = (R_0)^{-1}, \quad f_0 = F^{-2}. \quad (2.3)$$

В (2.2) через  $V_0$  и  $H_0$  обозначены характерные масштабы касательной к сфере компоненты скорости и глубины слоя,  $a_0$  — радиус сферы,  $g$  — ускорение свободного падения (рис. 1). Параметр мелкой воды  $\varepsilon = H_0/a_0$  предполагается малым по сравнению с  $r_0$  и  $f_0$ . Для Земли параметры  $r_0$  и  $f_0$  имеют один порядок малости, так что эффекты вращения и гравитации оказывают сопоставимое влияние на движение газа в атмосфере планеты.

Как и в случае «плоской» мелкой воды, имеет место газодинамическая аналогия: система (2.1) совпадает с уравнениями динамики политропного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 2$  для специальных движений, которые могут быть названы *сферическими*. Движение газа в них происходит лишь по поверхности сферы, радиальная компонента скорости равна нулю, все искомые функции, кроме того, не зависят от радиуса  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Уравнение состояния имеет вид  $p = (f_0/2)\rho^2$ ,  $\rho = h$ . Скорость распространения звуковых возмущений равна  $c = \sqrt{f_0 h}$ .

Система (2.1) является гиперболической системой на сфере  $S$  с выколотыми полюсами  $\theta = 0, \pi$ . Вектор скорости  $\vec{u} = (v, w)$  касателен к многообразию  $S$ . Как известно, сумма индексов всех изолированных особых точек векторного поля на сфере равна двум (эйлерова характеристика сферы). Простейшие векторные поля, обладающие двумя регулярными особыми точками, — векторные поля, направленные по меридианам или параллелям сферы. Вообще говоря, векторное поле  $\vec{u}$  может иметь и большую степень вырождения — особые многообразия, в виде кривых на сфере.

Заметим, что выбор сферической системы координат, в которой ось вращения проходит через полюса сферы, приводит к появлению особых точек в полюсах. Вопрос о топологической классификации возможных движений жидкости на сфере нуждается в правильной постановке. Вероятно, необходим учет интегральных законов сохранения.

В настоящее время в литературе отсутствуют как аналитические результаты по исследованию корректности начально-краевых задач для системы (2.1), так и простейшие точные решения. Необходимо отметить что первыми работами, посвященными гидродинамике на сфере, были исследования Э. Цермело [5] и И. С. Громеки [6].

Имеется большое число работ, посвященных исследованию вихревых систем на многообразиях, отличных от плоскости (сфера, плоскость Лобачевского) [7]. Отличие данной работы от большинства других состоит в том, что в ней не фиксируется заранее вихревая структура решения, а ищется решение уравнений гидродинамики на сфере, инвариантное относительно некоторой подгруппы симметрии общей группы симметрии уравнений гидродинамики. Требование инвариантности решения определяет его представление и позволяет редуцировать общие уравнения гидродинамики к более простым. Среди работ, посвященных изучению гидродинамики на сфере, наиболее близкими к данной являются [8–10], а также [11].

### 3. Модель с переменной угловой скоростью

Для задач физики атмосферы, не только Земли, но и других планет, представляется интересным исследование модели мелкой воды на сфере, угловая скорость вращения которой зависит от времени. Такой интерес обусловлен вопросом о поведении жидкой или газообразной оболочки планеты при изменении ее параметров (угловой скорости вращения, параметров орбиты) со временем. Такое изменение может быть вызвано воздействием внешнего тела (пролетающий астероид) или изменением состояния звезды, вокруг которой движется планета. В этом случае в системе уравнений (2.1) появляется дополнительный член, пропорциональный  $\vec{x} \times d\Omega/dt$  в правой части уравнений [12]. Будем рассматривать в дальнейшем случай вращения, затухающего по закону

$$\Omega = \Omega_0 t^{-1}$$

В этом случае слагаемым, содержащим производную  $d\Omega/dt$ , можно пренебречь, поскольку оно будет отвечать пренебрежимо малому влиянию на движение.

Система (2.1) принимает тогда следующий вид:

$$\begin{aligned} v_t + vv_\theta + (\sin \theta)^{-1}vw_\varphi + f_0h_\theta - w^2 \operatorname{ctg} \theta + 2a_0t^{-1}w \cos \theta &= 0, \\ w_t + vw_\theta + (\sin \theta)^{-1}ww_\varphi + f_0(\sin \theta)^{-1}h_\varphi + vw \operatorname{ctg} \theta - 2a_0t^{-1}v \cos \theta &= 0, \\ h_t + vh_\theta + (\sin \theta)^{-1}wh_\varphi + (\sin \theta)^{-1}h(w_\varphi + v \sin \theta)_\theta &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $a_0 = \text{const}$ . Уравнения (3.1) и являются объектом дальнейшего исследования. Они допускают двумерную алгебру Ли симметрий, порождаемую операторами

$$L_2 = \langle \partial_\varphi, t\partial_t - v\partial_v - w\partial_w - 2h\partial_h \rangle. \quad (3.2)$$

Инварианты алгебры (3.2) имеют вид  $\theta, t^2h, tv, tw$ . Она порождает инвариантное решение системы (3.1), имеющее представление

$$v = t^{-1}V(\theta), \quad w = t^{-1}W(\theta), \quad h = t^{-2}R(\theta), \quad (3.3)$$

где  $V, W, R$  — искомые функции широты  $\theta$ , удовлетворяющие фактор-системе

$$\begin{aligned} VV' + f_0R' - W^2 \operatorname{ctg} \theta - V + 2a_0W \cos \theta &= 0, \\ VW' + VW \operatorname{ctg} \theta - W - 2a_0V \cos \theta &= 0, \\ VR' + R(V' + V \operatorname{ctg} \theta - 2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В (3.4) штрих обозначает производную по переменной  $\theta$ . Разрешая систему (3.4) относительно всех искомых функций, получим

$$\begin{aligned} V' &= 1 + (f_0R' - V(f_0R + W^2) \operatorname{ctg} \theta + 2a_0VW \cos \theta)\Delta^{-1}, \\ W' &= \frac{W}{V} + W \operatorname{ctg} \theta + 2a_0V \cos \theta, \\ R' &= R((V^2 + W^2) \operatorname{ctg} \theta - V - 2a_0W \cos \theta)\Delta^{-1}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\Delta = f_0R - V^2. \quad (3.6)$$

Система (3.5) вырождается на многообразии  $\Delta = 0$ . В физическом пространстве это уравнение определяет звуковую характеристику, задаваемую некоторой параллелью  $\theta = \text{const}$  на сфере. Тем самым возможны два типа решений системы (3.5): сверхкритические, в которых  $\Delta < 0$ , и докритические, для которых  $\Delta > 0$ .

## 4. Звуковые характеристики

Система (1) является системой гиперболического типа. Важнейшим свойством таких математических моделей является факт конечной скорости распространения звуковых возмущений в среде, описываемой данной моделью. В силу газодинамической аналогии системы (1) и уравнений газовой динамики фронт звуковых возмущений, задаваемых поверхностью  $\chi(t, \theta, \varphi) = \text{const}$  распространяется так, что относительная нормальная к этой поверхности скорость  $u_n$  частиц среды совпадает со скоростью распространения звука  $c$  в среде:  $|u_n| = c$ . Это общее определение звуковой характеристики [13]. В газовой динамике о движениях среды со скоростью, большей скорости звука, говорят как о сверхзвуковых, в противном случае — дозвуковых. В теории волн приняты термины сверх- и докритические скорости среды.

Найдем представление и для более широкого класса звуковых характеристик системы (3.1) на решениях, задаваемых формулами (3.3). Воспользуемся газодинамической аналогией, тогда семейство поверхностей  $\chi(t, \theta, \varphi) = \text{const}$  задает характеристики системы (4), если  $\chi$  является решением уравнения [13]

$$\chi_t + t^{-1}Vf_\theta + (\sin \theta)^{-1}t^{-1}Wf_\varphi = \varepsilon t^{-1}RN, \tag{4.1}$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $N = ((\chi_\theta)^2 + (\sin \theta)^{-2}(\chi_\varphi)^2)^{1/2}$ . Будем искать функцию  $\chi$  в виде  $\chi \equiv \ln t + F(\theta, \varphi)$ . Тогда в уравнении (4.1) происходит разделение переменных и оно редуцируется к уравнению для функции  $F$ :

$$VF_\theta + (\sin \theta)^{-1}WF_\varphi + 1 = \varepsilon RN. \tag{4.2}$$

Опишем характеристики, для которых  $F = \varphi + g(\theta)$ . Тогда (4.2) превращается в неявное относительно производной  $g'(\theta)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Vg' + (\sin \theta)^{-1}W + 1 = \varepsilon R\sqrt{g'^2 + (\sin \theta)^{-2}}, \tag{4.3}$$

где штрих обозначает производную по  $\theta$ . Возведя (4.3) в квадрат и группируя слагаемые, приходим к уравнению характеристик в следующем виде:

$$(V^2 + W^2)g'^2 + 2V(1 + (\sin \theta)^{-1}W)g' + (1 + (\sin \theta)^{-1}W)^2 - R^2(\sin \theta)^{-2} = 0. \tag{4.4}$$

Неявные уравнения вида (4.4) — квадратичные по производной искомой функции — возникали в газовой динамике при изучении характеристик трансзвуковых течений [14]. Современный обзор теории неявных уравнений сделан в работе [15].

Таким образом, характеристики, задаваемые уравнением  $\Delta = 0$ , задают на сфере пояс, в котором уравнение (4.4) имеет два вещественных решения, описывающих пару звуковых характеристик. Они исходят из каждой точки одной граничной параллели и заканчиваются на другой, образуя особенность типа клювика, задаваемого полукубической параболой Нейля. Такое поведение является следствием общей теоремы Чибрарио [15].

## 5. Описание решения: численный эксперимент

Таким образом, существует два режима движения, описываемых решением (3.3): сверхкритическое (сверхзвуковое) при  $\Delta = f_0R - V^2 < 0$  и докритическое (дозвуковое)  $\Delta > 0$ .

Такие решения описывают на вращающейся сфере источник, распределенный вдоль некоторой параллели  $\theta = \theta_0$ , затухающий со временем согласно формулам (3.3) и заканчивающийся стоком, распределенным вдоль параллели  $\theta = \theta_1 > \theta_0$ . Движение происходит в сферическом поясе между этими параллелями.

Траектории частицы жидкости на сфере задаются уравнениями

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{t}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{W}{t \sin \theta} \tag{5.1}$$

и начальными данными

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0. \tag{5.2}$$

Движение жидкой частицы по сфере определяется уравнением:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{W(\theta)d\theta}{V(\theta) \sin \theta}. \tag{5.3}$$

Скорость движения частицы по кривой (5.3) — линии тока — определяется из уравнений (5.1). Движение является вращательно-симметричным: любая линия тока получается из одной, например соответствующей  $\varphi_0 = 0$ , поворотом на определенный угол по долготе.

Система (3.5) исследовалась численно. Была проведена серия расчетов для определения искомых величин  $V, W, R$  при различных значениях параметров, определяющих стартовое положение и скорость частицы.

### 5.1. Численный эксперимент в случае покоящейся сферы

Рассмотрим вначале случай сферы без вращения  $a_0 = 0$ . На рис. 2, 3, 4 изображены графики компонент скорости  $V, W$  и глубины  $R$  для до- и сверхкритических режимов движения.

В экспериментах меняются стартовые значения компонент скорости и глубины  $V_0, W_0, R_0$ . При  $\Delta_0 = R_0 - V_0^2 > 0$  (рис. 2а–4а) профиль глубины жидкости, является кривой выпуклой вверх, широтная компонента скорости  $V$  возрастает. Пояс, в котором определено решение, несимметричен относительно экватора, и движение заканчивается достаточно близко к экватору  $\theta = \pi/2$  градиентной катастрофой. При  $\Delta < 0$  (рис. 2б–4б) глубина жидкости  $R$  и долготная компонента  $W$  скорости характеризуются кривыми, выпуклыми вниз. График радиальной компоненты скорости  $V$  является выпуклым вверх. Имеет место симметрия кривых относительно экватора, функции  $V, W, R$  достигают своего минимума или максимума вблизи экватора  $\theta = \pi/2$ . Рассмотрим искомые движения при различном положении источника  $\theta_0$  на сфере. По мере уменьшения величины  $\theta_0$ , т. е. при приближении параллели, на которой распределен источник к северному полюсу сферы, при  $\Delta > 0$  (рис. 2а–4а) максимальная глубина жидкости увеличивается (профиль глубины выпуклый вверх). Максимальные значения компонент скорости  $V, W$  также увеличиваются при  $\theta_0$ , приближающемся к северному полюсу. При сверхкритическом режиме движения  $\Delta < 0$  (рис. 2б–4б) минимальная глубина жидкости  $R$  уменьшается (профиль глубины выпуклый вниз), а максимальная величина широтной компоненты скорости возрастает. Движение заканчивается градиентной катастрофой: производные искомых функций становятся неограниченными.

Рассмотрим траектории частиц жидкости на сфере в случае отсутствия вращения  $a_0 = 0$ . На рис. 5, 6, 7, в развертке на плоскость  $(\theta, \varphi)$ , представлены траектории типичной частицы жидкости для до- (рис. 5а–7а) и сверхкритического (рис. 5б–7б) режимов движения. При  $\theta_0 = \pi/3$  (рис. 5) частица жидкости в докритическом режиме завершает свое движение почти сразу после прохождения экватора  $\theta = \pi/2$  (рис. 5а), а в сверхкритическом режиме движется по широте  $\theta$  почти в два раза дальше (рис. 5б). При  $\theta_0 = \pi/6$  различие между интервалами существования разных режимов движения уменьшается. Но при  $\Delta_0 > 0$  жидкая частица совершает на сфере большее число оборотов, чем при  $\Delta_0 < 0$  (рис. 6). При  $\theta_0 = \pi/20$  для докритического движения линия тока продолжается по долготе  $\varphi$  до значения  $\varphi_{max} \sim 100$ . Это означает, что траектория частицы жидкости обматывает сферу много раз (рис. 7а), а для сверхкритического — число оборотов существенно меньше (рис. 7б).

### 5.2. Численный эксперимент в случае вращающейся сферы

Рассмотрим теперь поведение искомых величин  $V, W, R$  и траектории частицы жидкости при вращении сферы  $a_0 \neq 0$  (рис. 8, 9, 10, 11). В том случае, когда стартовые значения угловой и окружной скоростей имеют одинаковые знаки  $a_0 W_0 > 0$ , картина течения качественно подобна той, которая имела место для покоящейся сферы (пункт 5.1). Поэтому сосредоточим внимание на случае с разными знаками скоростей  $a_0 W_0 < 0$ , когда в движении обнаруживаются новые эффекты.

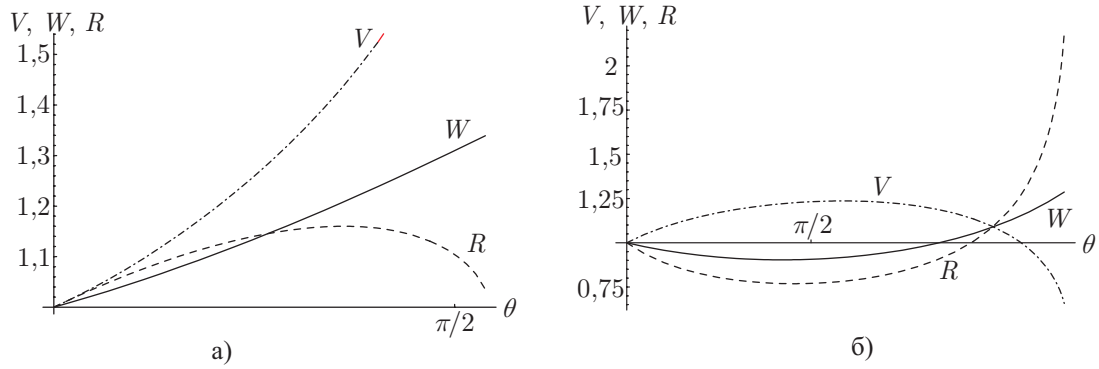


Рис. 2. ( $\theta_0 = \pi/3$ )

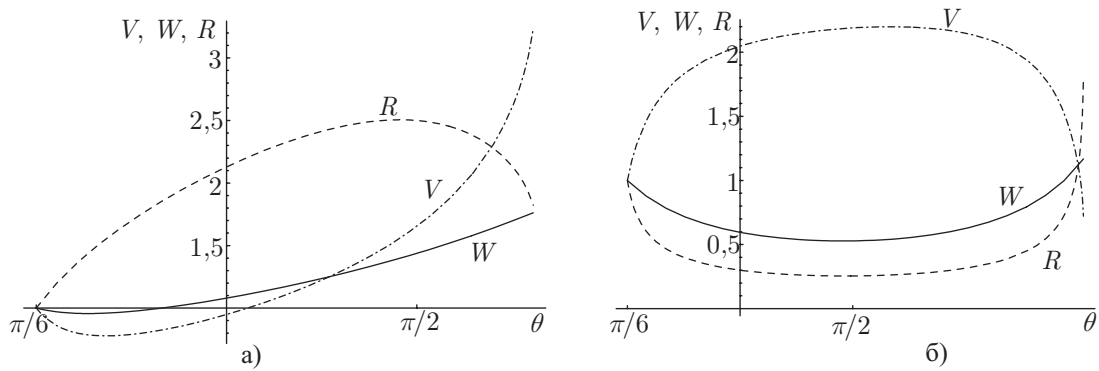


Рис. 3. ( $\theta_0 = \pi/6$ )

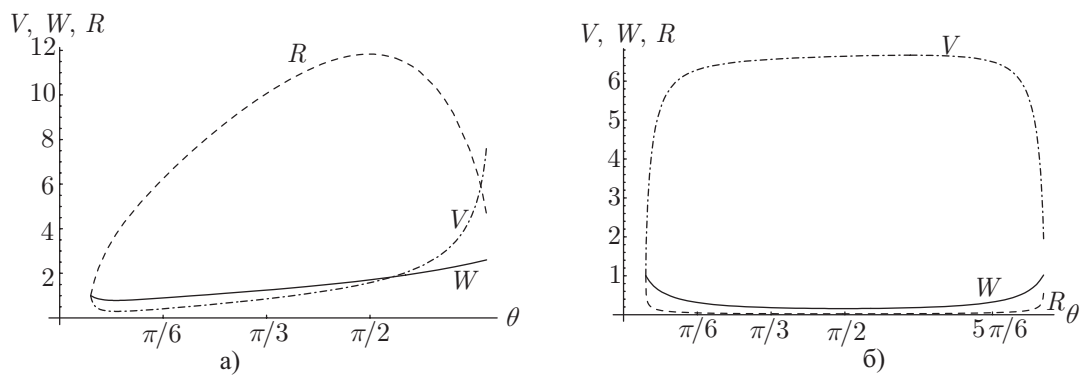
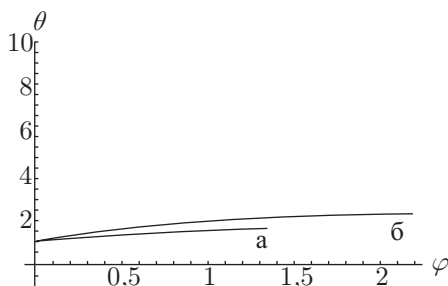
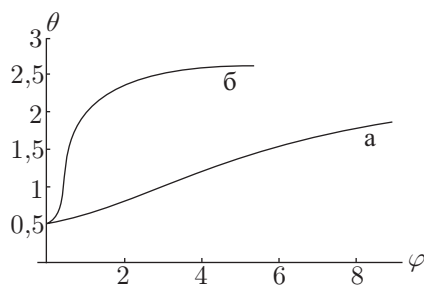
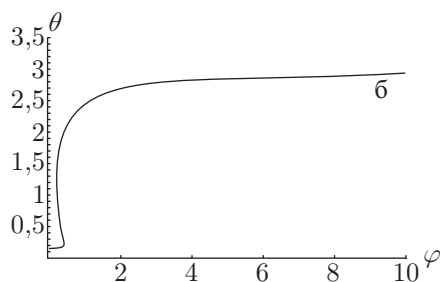
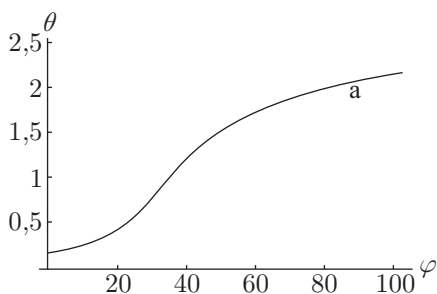


Рис. 4. ( $\theta_0 = \pi/20$ )

Рис. 5. ( $\theta_0 = \pi/3$ )Рис. 6. ( $\theta_0 = \pi/6$ )Рис. 7. ( $\theta_0 = \pi/20$ )

В экспериментах теперь меняются не только стартовые значения компонент скорости, но и угловая скорость вращения сферы. Источник расположен на параллели  $\theta_0 = \pi/6$ .

Рассмотрим докритический режим движения (рис. 8, 9). При умеренном вращении сферы (рис. 8) график долготной компоненты скорости  $W$  становится выпуклым вниз, а графики широтной компоненты  $V$  и глубины жидкости  $R$  не меняют своего характерного поведения (см. рис. 3а). Частица жидкости при этом движется от источника к стоку следующим образом: сначала от источника  $\theta_0 = \pi/6$  до экватора  $\theta = \pi/2$  оборачивает сферу, т. е. движется вдоль долготы  $\varphi$ , а затем в районе экватора почти вертикально опускается вниз и завершает свое движение. Увеличим угловую скорость вращения (рис. 9). При этом долготная компонента скорости  $W$ , достигая определенной параллели, меняет знак, а глубина жидкости на этой параллели достигает своего максимума и затем начинает снижаться. Самое интересное происходит с частицей жидкости. Она, проходя через параллель, на которой компонента скорости  $W$  обращается в нуль, меняет свое направление на противоположное, т. е. возникают точки возврата.

При  $\Delta_0 < 0$  (рис. 10, 11), когда сфера вращается с умеренной скоростью (рис. 10), долготная компонента скорости  $W$  также характеризуется кривой, выпуклой вниз. Частица жидкости недолго движется вдоль параллели, огибая сферу, затем в районе экватора резко опускается вниз и вновь продолжает движение вдоль параллели. Имеет место симметрия искомых величин относительно экватора  $\theta = \pi/2$ .

При «быстром» вращении сферы в сверхкритическом режиме движения (рис. 11) наблюдается совсем другая картина поведения искомых функций. Профиль глубины жидкости теперь имеет две точки локального минимума и одну точку максимума. Широтная компонента скорости  $V$ , наоборот, имеет одну точку минимума и две точки локального максимума. График долготной компоненты скорости  $W$  является выпуклым вниз и дважды меняет знак. Глубина жидкости  $R$  достигает своего максимального значения вблизи экватора, там же достигают своих ми-



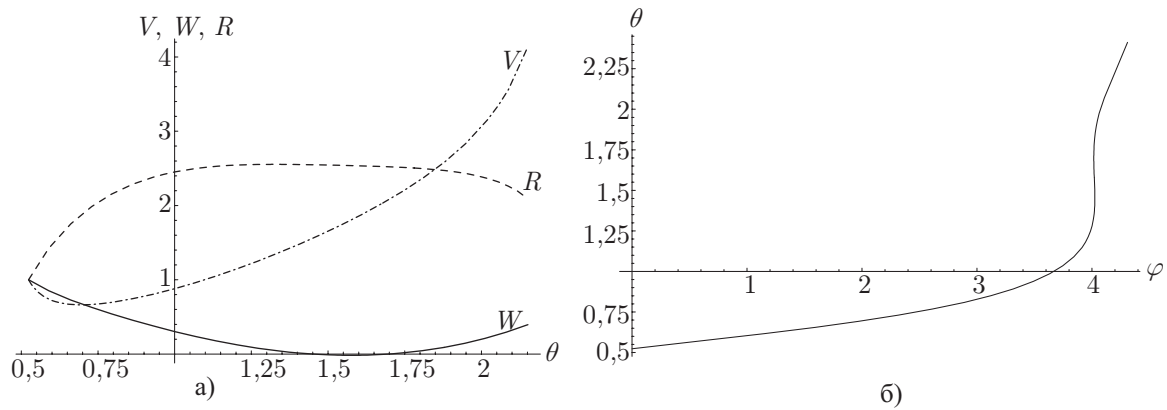


Рис. 8.  $\Delta_0 > 0$ , «умеренное» вращение сферы

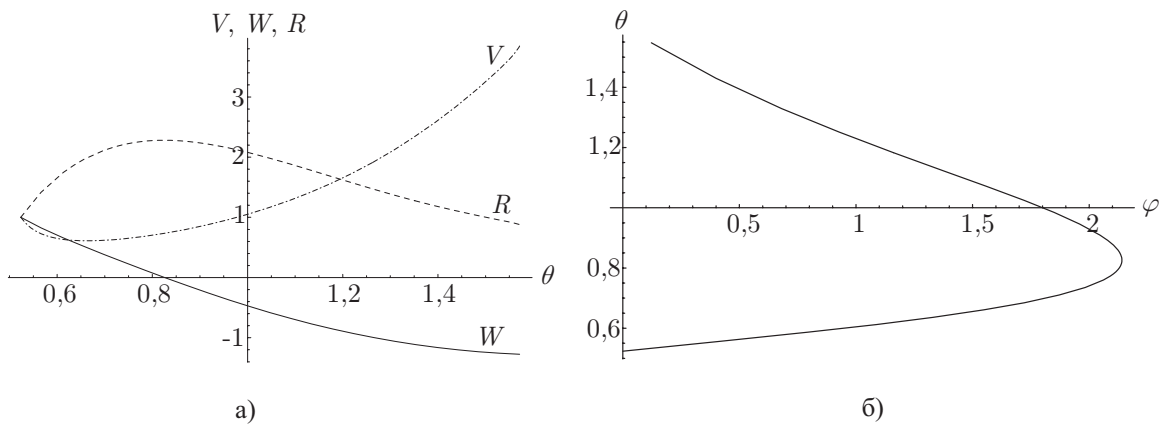


Рис. 9.  $\Delta_0 > 0$ , «быстрое» вращение сферы

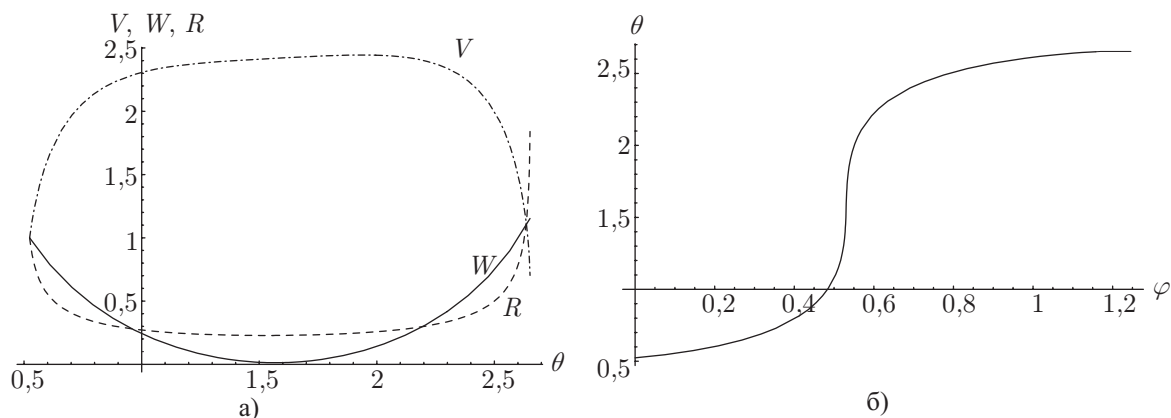
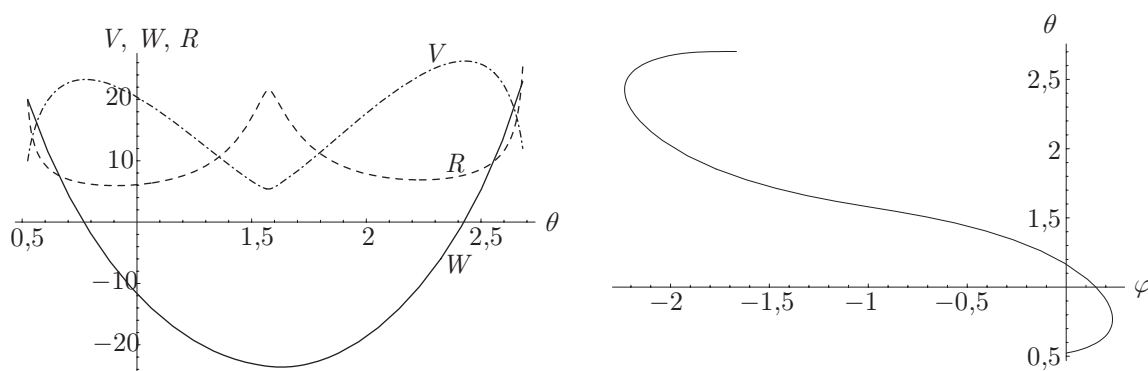
нимумов обе компоненты скорости  $V, W$ . Частица жидкости при движении от источника к стоку меняет свое направление дважды.

## 6. Выводы

Наличие в движении источников и стоков является следствием лишь симметрии решения относительно группы (5). Оно не предписывается решению заранее, что отличает задачу от тех, в которых рассматриваются системы вихрей на сфере. Особенности такого типа — источники и стоки, распределенные вдоль параллелей, — можно трактовать как границы циркуляционных ячеек или движения воздушных масс с полярных шапок планеты.

При одном и том же положении источника  $\theta = \theta_0$  сферический пояс, в котором определено решение, для сверхкритического режима движения  $\Delta_0 < 0$  заметно шире, чем для докритического  $\Delta_0 > 0$ .

При приближении параллели, на которой распределен источник, к северному полюсу сферы линия тока обматывает сферу много раз для докритического движения, а для сверхкритического — число оборотов существенно меньше.

Рис. 10.  $\Delta_0 < 0$ , «умеренное» вращение сферыРис. 11.  $\Delta_0 < 0$ , «быстрое» вращение сферы

Показано, как влияет сферичность на поведение искомых функций, и исследовано совокупное влияние сферичности и вращения.

При увеличении скорости вращения планеты окружная компонента скорости меняет знак, на траектории частиц возникают точки возврата (после прохождения параллели, на которой  $W$  равна нулю). Таких точек может быть и две.

Со временем (при  $t \rightarrow +\infty$ ) скорости и глубина жидкости стремятся к нулю, угловая скорость вращения сферы также уменьшается. Таким образом, исследован затухающий источник на сфере с замедляющимся вращением.

## 7. Заключение

В данной работе рассмотрена система уравнений, описывающая движение мелкой воды на притягивающей сфере, вращающейся с переменной угловой скоростью. Исследована инвариантная подмодель ранга один, описывающая важный для приложений в океанологии и метеорологии случай затухающего со временем вращения. Решение ключевой системы строится численно. Полученные решения описывают на вращающейся сфере затухающий со временем источник,

расположенный вдоль параллели выше экватора. Движение жидкости происходит в сферическом поясе и заканчивается стоком, расположенном на параллели в южном полушарии. Установлено существование сверхкритического и докритического режимов движения. Построенные решения описывают движения воздушных масс из полярных областей планеты, которые оказывают существенное влияние на формирование погоды (рис. 12 из [16]).

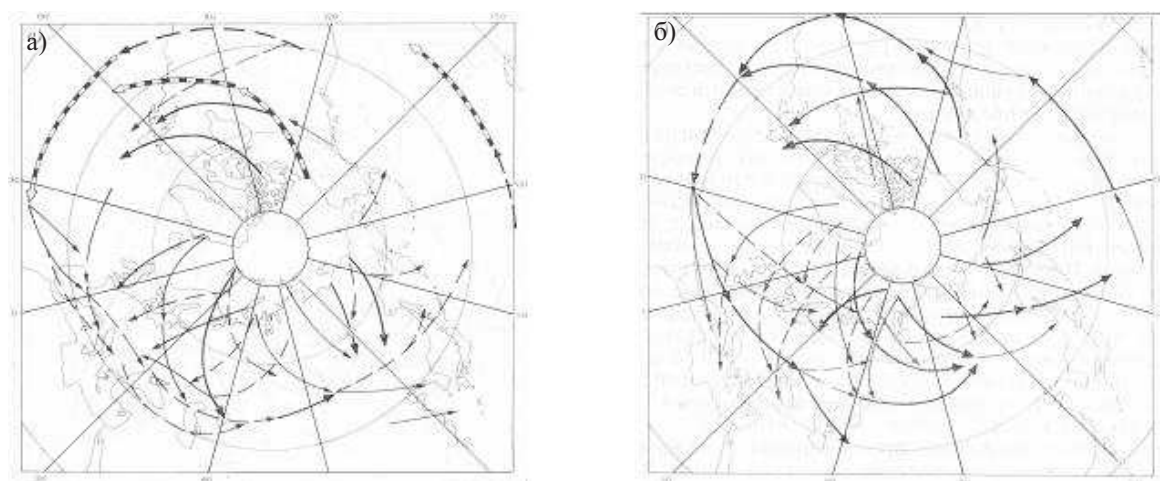


Рис. 12. Главные пути антициклонов в Северном полушарии; а) январь, б) июль

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00047а; СО РАН, интеграционный проект № 2.15 и Программы поддержки ведущих научных школ, проект № НШ-2826.2008.1.

## Список литературы

- [1] Кибель И. А. *Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды*, М.: ГИТТЛ, 1957.
- [2] Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*, Т. I, II, М.: Мир, 1984.
- [3] Гилл А. *Динамика атмосферы и океана*, М.: Мир, 1986.
- [4] Черевко А. А., Чупахин А. П. Модель мелкой воды на сфере и ее подмодели, *Тез. докл. Межд. конф. «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике»*, 27–31 мая 2005 г., Новосибирск, ИГиЛ СО РАН, с. 87–88.
- [5] Zermelo E. Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche, *Z. Math. Phys.*, 1902, 47, pp. 201–237. Пер. на рус.: Цермело Э., Гидродинамические исследования вихревых движений на поверхности сферы, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, №1, с. 81–109.
- [6] Громека И. С. О вихревых движениях жидкости на сфере, *Собр. протоколов заседания секции физ.-мат. общ-ва естествоиспытателей при Казанском ун-те*, в кн.: Громека И. С. *Собр. соч.*, М.: АН СССР, 1952.
- [7] *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей*, Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколовский М. А. (ред.), Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003, 704 с.
- [8] Богомолов В. А. Динамика завихренности на сфере, *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1977, №6, с. 57–65.

- [9] Богомолов В. А., О двумерной гидродинамике на сфере, *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1979, т. 15, №1, с. 29–35.
- [10] Stuart J. T. On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers, *J. Fluid. Mech.*, 1967, vol. 29, pp. 417–440.
- [11] Crowdy D. G. Stuart vortices on a sphere, *J. Fluid. Mech.*, 2004, vol. 498, pp. 381–402.
- [12] Марчук Г. И., Дымников В. П., Залесный В. Б. *Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации*, Л.: Гидрометеиздат, 1987.
- [13] Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*, М.: Наука, 1981.
- [14] Кузьмин А. Г. *Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике*, Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
- [15] Арнольд В. И. *Волновые фронты и топология кривых*, М.: Фазис, 2002.
- [16] Хргиан А. Х. *Физика атмосферы*, Т. 1,2, Л.: Гидрометеиздат, 1978.