УДК 517.93

Принцип Гаусса и реализация связей

В. В. Козлов
Математический институт им. В. А. Стелова РАН,
Россия 119991, г. Москва, ул. Губкина, 8
E-mail: kozlov@pran.ru

Получено 19 июля 2008 г.

В работе дано распространение классического принципа Гаусса на системы без связей. Если в качестве внешних сил взять большие анизотропные силы вязкого трения, то в пределе это общее утверждение перейдет в обычный принцип Гаусса для систем со связями.

Ключевые слова: принцип Гаусса, связи, анизотропное трение

V. V. Kozlov

Gauss Principle and Realization of Constraints

The paper generalizes the classical Gauss principle for non-constrained dynamical systems. For large anisotropic external forces of viscous friction our statement transforms into the common Gauss principle for systems with constraints.

Keywords: Gauss principle, constraints, anisotropic friction
Mathematical Subject Classifications: 37J35

1. Введение

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — локальные координаты механической системы с n степенями свободы, на которую действуют обобщенные силы $F = (F_1, \ldots, F_n)$. Как обычно, силы F — известная функция от скорости $\dot{x}$, положения x и времени t. Пусть

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j$$

— кинетическая энергия системы. Уравнения движения имеют вид уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F.$$

Выделим в этих уравнениях слагаемые, зависящие от ускорений:

$$A\ddot{x} = \Phi, \quad A = \|a_{ij}\|. \tag{1.1}$$

Здесь Φ известным образом зависит от $\dot{x}, x$ и t.

Предположим, что на рассматриваемую систему действуют дополнительные силы Q. Тогда уравнение (1.1) будет иметь следующий вид:

$$A\ddot{x} = \Phi + Q. \tag{1.2}$$

Имея в виду аналогию с известным принципом Гаусса, дадим некоторые определения. Выделим момент времени t_0 и будем рассматривать гладкие пути $t \mapsto x(t)$, которые при $t = t_0$ проходят через заданное положение $x = x_0$ с заданной скоростью $\dot{x} = \dot{x}_0$. Такой путь назовем *действительным* (соответственно *освобожденным*) *движением*, если он удовлетворяет уравнению (1.2) (соответственно (1.1)). Путь $x(\cdot)$ назовем *мыслимым* движением, если он в момент времени t_0 удовлетворяет соотношению

$$(Q, \ddot{x} - \ddot{x}_r) = 0, \tag{1.3}$$

где $\ddot{x}_r$ — ускорение действительного движения.

Поскольку положение и скорость системы фиксированы, то при заменах локальных координат разность ускорений $\ddot{x} - \ddot{x}_r$ преобразуется по контрвариантному закону (как вектор). Так как сила — ковектор, то левая часть соотношения (1.3) инвариантна относительно замен переменных: это значение ковектора на векторе (или, наоборот: значение вектора на ковекторе — элементе двойственного пространства). Из (1.3) сразу следует, что действительное движение является одним из мыслимых движений. Условие (1.3) эквивалентно следующему:

$$(Q, \ddot{x}) = (Q, A^{-1}(\Phi + Q)). \tag{1.4}$$

Если $Q = 0$, то ускорение мыслимого движения может быть любым.

Мотивировки этих определений объясняет следующий пример. Рассмотрим динамику системы со связью

$$g(\dot{x}, x, t) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \neq 0. \tag{1.5}$$

Согласно методу множителей Лагранжа, мы можем считать систему «свободной», но при этом действие связи заменить реакцией

$$Q = \lambda \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}.$$

Конечно, условия Коши $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = t_0$ должны удовлетворять (1.5). Множитель λ находится из уравнения (1.2) и соотношения

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}, \ddot{x}\right) = -\frac{\partial g}{\partial t} - \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \dot{x}\right). \tag{1.6}$$

В теории связей мыслимыми движениями называют пути $t \mapsto x(t)$ (с фиксированными данными Коши), которые удовлетворяют уравнению связи (1.5). Их ускорения удовлетворяют соотношению (1.6).

Покажем, что если при $t = t_0$ множитель λ отличен от нуля, то соотношение (1.6) эквивалентно (1.4). Действительно,

$$\lambda = -\left[\frac{\partial g}{\partial t} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \dot{x}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}, A^{-1}\Phi\right)\right]\left(A^{-1}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)^{-1}. \tag{1.7}$$

Подставляя теперь $Q = \lambda\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}$ в (1.4), сокращая на λ и используя формулу (1.7), получаем соотношение (1.6). Если $\lambda = 0$, то в этот момент связь не оказывает никакого влияния на систему.

Отметим еще, что приведенные выше определения действительного и освобожденного движений вполне соответствуют определениям, принятым в теории связей.

2. Обобщенный принцип Гаусса

Ускорения мыслимого и освобожденного движений в момент времени t_0 обозначим соответственно $\ddot{x}_m$ и $\ddot{x}_f$. Как и в подходе Гаусса, введем *принуждение* — меру отклонения мыслимых движений от освобожденного:

$$Z_{m,f} = \frac{1}{2}(A(\ddot{x}_m - \ddot{x}_f), (\ddot{x}_m - \ddot{x}_f)).$$

Следующее утверждение является обобщением вариационного принципа Гаусса.

Теорема 2.1. *Действительным является то из мыслимых движений, которое наименее всего отклоняется от освобожденного движения.*

Действительно,

$$\begin{aligned} Z_{m,f} = \frac{1}{2}(A[(\ddot{x}_m - \ddot{x}_r) + (\ddot{x}_r - \ddot{x}_f)], (\ddot{x}_m - \ddot{x}_r) + (\ddot{x}_r - \ddot{x}_f)) = \\ Z_{m,r} + Z_{r,f} + (A(\ddot{x}_m - \ddot{x}_r), (\ddot{x}_r - \ddot{x}_f)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Однако последнее слагаемое равно нулю, поскольку

$$(\ddot{x}_m - \ddot{x}_r, A(\ddot{x}_r - \ddot{x}_f)) = (Q, \ddot{x}_m - \ddot{x}_r) = 0$$

ввиду условия (1.3). Следовательно, согласно (2.1),

$$Z_{r,f} \leqslant Z_{m,f},$$

поскольку $Z_{m,r} \geqslant 0$ ввиду положительной определенности оператора A. Что и требовалось.

Замечание 1. Только что доказанная теорема, очевидно, справедлива и при $Q = 0$. В частности, она содержит как частный случай классический принцип Гаусса для систем со связями.

Приведем поучительный пример, раскрывающий общее определение мыслимых движений. Рассмотрим движение в потенциальном поле:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Здесь V — потенциальная энергия системы. Это уравнение имеет первый интеграл

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = h = \mathrm{const},$$

который можно рассматривать как нелинейную по скорости связь. Освобожденные движения пусть удовлетворяют уравнению $\ddot{x} = 0$; они совпадают с движениями по инерции. Так что уравнение (2.2) совпадает с уравнением (1.2), где $Q = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$, а A — единичный оператор. Аналог уравнения (1.6) — это уравнение

$$(\ddot{x}, \dot{x}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \dot{x}\right). \tag{2.3}$$

Если это соотношение положить в основу определения мыслимых движений, то обобщенный принцип Гаусса даст нам уравнение

$$\ddot{x} = -\frac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dot{x}\right)}{(\dot{x}, \dot{x})}\dot{x},$$

которое также допускает интеграл энергии, но отличается от исходного уравнения (2.2).

На самом деле, согласно (1.4), уравнение для мыслимых ускорений (2.3) надо заменить следующим уравнением:

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \ddot{x}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

После этого наша общая теорема приводит к правильному уравнению (2.2).

3. Принцип Гаусса и реализация неголономных связей

Теорема из п. 2 вообще не зависит от наличия или отсутствия связей. С другой стороны, неголономные связи можно реализовать большими силами анизотропного вязкого трения (см. [1, 2]). Покажем, что при таком предельном переходе теорема п. 2 переходит как раз в классический принцип Гаусса.

Пусть

$$\Phi_N = \frac{N}{2}(a, \dot{x})^2$$

— диссипативная функция Релея. Здесь $a(x)$ —гладкое ковекторное поле, N — большой параметр, который затем будет устремлен к бесконечности. С учетом диссипативных сил уравнение «свободного» движения (1.1) надо заменить уравнением

$$A\ddot{x} = \Phi - \frac{\partial \Phi_N}{\partial \dot{x}} = \Phi - N(a, \dot{x})a. \tag{3.1}$$

Пусть $t \mapsto x_N(t)$ — решение этого уравнения с начальными условиями

$$x_N(0) = x_0, \quad \dot{x}_N(0) = \dot{x}_0,$$

причем

$$(a(x_0), \dot{x}_0) = 0.$$

Тогда, как доказано в [1, 2], на каждом конечном промежутке времени $[t_0, t_0 + \tau]$ существуют

$$\lim_{N\to\infty} x_N(t) = \hat{x}(t), \quad \lim_{N\to\infty} \dot{x}_N(t) = \hat{x}^{\cdot}(t),$$

причем $\hat{x}(0) = x_0, \quad \hat{x}^{\cdot}(0) = \dot{x}_0$ и

$$N(a(x), \dot{x})\Big|_{x_N(t)} \to -\lambda(t),$$

где λ — множитель Лагранжа.

Предельная функция $\hat{x}(\cdot)$ — решение уравнения движения со связью

$$A\ddot{x} = \Phi + \lambda a, \quad (a, \dot{x}) = 0. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.1) имеет, конечно, вид (1.2), причем

$$Q = -N(a, \dot{x})a.$$

Освобожденные движения (как и для систем со связями) задаются уравнением (1.1). Нам осталось показать, что уравнение (1.4) для мыслимых движений (точнее, ускорений) при $N \to \infty$ переходит в уравнение вида (1.6):

$$(a, \ddot{x}) = -\left(\frac{\partial a}{\partial x}\dot{x}, \dot{x}\right).$$

Но это почти очевидно. Для этого надо в вычислениях примера из п. 1 положить $g = (a, \dot{x})$ и воспользоваться соображением непрерывности.

Таким образом, обычный принцип Гаусса для систем с неголономными связями выводится из более общего утверждения для систем без связей (теорема п. 2) с помощью естественного предельного перехода.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (08-01-00025-а) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ–691.2008.1).

Список литературы

[1] Карапетян, А.В., О реализации неголономных связей и устойчивости кельтских камней, *Прикл. мат. мех.*, 1981, т. 45, вып. 1, с. 45–51.

[2] Бренделев, В.Н., О реализации связей в неголономной механике, *Прикл. мат. мех.*, 1981, т. 45, вып. 3, с. 481–487.