

Об условиях отрыва в задаче о движении твердого тела по шероховатой плоскости

А. П. Иванов

Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина
Россия 119991, г. Москва, ул. Малая Калужская, 1
E-mail: apivanov@orc.ru

Получено 21 апреля 2008 г.

Классическая задача механики о движении тяжелого твердого тела по горизонтальной плоскости рассматривается в рамках теории систем с односторонними связями. При общих предположениях о характере трения исследуется вопрос о возможности отрыва тела от плоскости под действием реакции последней и сил инерции. Для систем с качением обнаружены новые сценарии возникновения движений с подпрыгиваниями и ударами. Полученные результаты применяются к исследованию стационарных движений диска. Показано, что

- 1) в отсутствие трения условия отрыва на стационарных движениях не выполняются. Однако при уменьшении угла θ между осью симметрии и вертикалью до нуля движения, близкие к стационарным, необходимо сопровождаются отрывами;
- 2) точно такие же выводы справедливы для тонкого диска, катящегося по опоре без скольжения;
- 3) для диска ненулевой толщины в отсутствие скольжения условия отрыва выполнены на стационарных движениях в некоторой области в пространстве параметров, при этом угол θ не менее 49° . При малых значениях θ в окрестности стационарных движений контакт между телом и плоскостью не прерывается.

Ключевые слова: односторонняя связь, трение, парадоксы Пэнлеве

A. P. Ivanov

On Detachment Conditions in the Problem on the Motion of a Rigid Body on a Rough Plane

The classical mechanical problem about the motion of a heavy rigid body on a horizontal plane is considered within the framework of theory of systems with unilateral constraints. Under general assumptions about the character of friction, we examine the question on the possibility of detachment of the body from the plane under the action of reaction of the plane and forces of inertia. For systems with rolling, we find new scenarios of the appearing of motions with jumps and impacts. The results obtained are applied to the study of stationary motions of a disk. We have showed the following.

1) In the absence of friction, the detachment conditions on stationary motions do not hold. However, if the angle θ between the symmetry axis and the vertical decreases to zero, motions close to stationary motions are necessarily accompanied by detachments. 2) The same conclusion holds for a thin disk that rolls on the support without sliding. 3) For a disk of nonzero thickness in the absence of sliding, the detachment conditions hold on stationary motions in some domain in the space of parameters; in this case, the angle θ is not less than 49 degrees. For small values of θ , the contact between the body and the support does not break in a neighborhood of stationary motions.

Keywords: unilateral constraint, friction, Painlevé paradoxes

Mathematical Subject Classifications: 70E18, 70G60

1. Введение

Твердое тело, движущееся по горизонтальной опоре, — одна из наиболее известных классических проблем механики, сочетающая простоту постановки с невозможностью общего и полного решения. Восходящая к Л. Эйлеру, эта проблема затем стала стимулом для развития аналитических, численных и экспериментальных методов. В ряде частных случаев удалось построить общий интеграл системы или получить качественные выводы о ее динамике (см. [1, 10, 14] и список литературы).

Важным этапом построения математической модели является описание контактного взаимодействия между телом и плоскостью. Гипотеза об абсолютно гладкой плоскости приводит к наибольшим упрощениям, поэтому такой случай исследован наиболее полно. Известны также динамические эффекты, которые можно объяснить лишь наличием трения: искривление траектории камня для кёрлинга [17], перемена направления вращения кельтского камня, визг тормозов, звучание диска Эйлера и пр. Заметим, что при моделировании этих эффектов использовались различные законы трения: вязкое трение [6], кулоновское трение, закон Кулона–Контенсу и другие [9].

Физически плоскость не препятствует подскокам тела, т. е. она реализует неударную геометрическую связь [14]. Один из примеров возникновения виброударных колебаний в звуковом диапазоне (гироскоп Жерва) указан в [1]. Была высказана гипотеза [16] о том, что звучание диска Эйлера также связано с повторяющимися отрывами диска от опоры. Однако данное предположение не получило пока достаточного обоснования.

С математической точки зрения отличие неударной связи от ударной состоит в ограничении возможных значений нормальной реакции числами одного знака. С другой стороны, имеется ряд интегрируемых частных случаев обсуждаемой задачи, в которых возможность отрыва не предусматривается. Традиционный метод исследования системы с односторонней связью состоит в решении (аналитическом или численном) уравнений движения аналогичной системы, но с двусторонней связью с последующей проверкой знака реакции. В случае если знак нормальной реакции во все время движения согласуется с односторонним характером связи, делается вывод о невозможности отрыва.

Данный подход, основанный на интуитивно верном принципе детерминированности, кажется безупречным. Тем не менее имеются контрпримеры, показывающие его несостоятельность. Для случая сухого (кулонова) трения эти примеры известны более столетия как парадоксы Пэнлеве [12]: наряду с безотрывным движением (скольжением или качением) при тех же значениях координат и скоростей возможен и отрыв тела от опоры [18]. Впоследствии примеры такого рода были построены и для систем без трения [19].

Цель данной работы состоит в получении условий отрыва тела от плоскости при различных законах трения. Статья организована следующим образом. Во втором параграфе проведен анализ системы с неидеальной односторонней связью, проведена классификация законов трения и выведены соответствующие условия отрыва. Показано, что при качении тела без скольжения возможно два особых случая, аналогичных парадоксам Пэнлеве несуществования и неединственности; в каждом из этих случаев возможен отрыв тела от опоры. В третьем параграфе полученные результаты применяются для исследования регулярных прецессий тела вращения на гладкой или абсолютно шероховатой плоскости. Найдены такие значения параметров, для которых наряду со стационарным движением возможно прекращение контакта. В четвертом параграфе обсуждаются малые колебания диска вблизи стационарных движений и делаются выводы о возможности отрывов в зависимости от характера трения и динамических параметров. Завершает работу обсуждение полученных результатов.

2. Условия отрыва для различных законов трения

Рассмотрим механическую систему, подчиненную неудерживающей неидеальной геометрической связи

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + R, \quad T = \frac{1}{2} \dot{q} \tilde{T}(q) \dot{q}, \quad (2.1)$$

$$\Lambda(q) \geq 0, \quad (2.2)$$

где $q \in \mathbb{R}^2$ — обобщенные координаты, T — кинетическая энергия, \tilde{T} — ее матрица, $Q \in \mathbb{R}^n$ — обобщенные силы, R — реакция связи. Последнюю можно разложить на составляющую Nn , $N \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}^n$, нормальную поверхности $\Lambda(q) = 0$ в кинетической метрике Якоби, и касательную составляющую $F = R - Nn$.

Вычислим вторую производную по времени от функции (2.2) при учете уравнений (2.1):

$$\ddot{\Lambda} = U + VN + (W, F),$$

$$U = \kappa \left(n, \tilde{T}^{-1} (Q + \dot{q}^T \text{grad } \tilde{T}(q) \dot{q}) \right) + \dot{q}^T \tilde{\Lambda}(q) \dot{q}, \quad (2.3)$$

$$V = \kappa \left(n, \tilde{T}^{-1} n \right), \quad W = \kappa \tilde{T}^{-1} n, \quad \kappa = \|\text{grad } \Lambda(q)\|, \quad n = \kappa^{-1} \text{grad } \Lambda(q),$$

где $\tilde{\Lambda}$ — матрица Гессе для функции связи. При определенных требованиях гладкости к характеристикам системы функции U , V и W будут непрерывно дифференцируемыми.

Если $\Lambda > 0$, то связь (2.2) ослаблена, при этом $R = 0$ и в формуле (2.3) $\ddot{\Lambda} = U$. В случае $N > 0$ связь напряжена т. е. $\Lambda = 0$. Такая взаимосвязь между переменными N и Λ называется условием дополненности.

Из соотношения (2.3) можно определить, когда контакт между телом и плоскостью прерывается. Для этого надо исследовать знаки величин N и $\ddot{\Lambda}$, основываясь на том или ином законе трения

$$F = F(q, \dot{q}, N).$$

Будем считать зависимость силы трения от нормальной нагрузки линейной:

$$F = \alpha(q, \dot{q}) + \beta(q, \dot{q})N, \quad (2.4)$$

где α, β — векторы, лежащие в касательной плоскости.

Подставляя выражение (2.4) в формулу (2.3), получим при учете условия дополненности

$$\ddot{\Lambda} = \begin{cases} U, & \text{если } N = 0, \\ U^* + V^*N, & \text{если } N > 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$U^* = U + (W, \alpha), \quad V^* = V + (W, \beta).$$

Вывод о сохранении контакта или отрыве делается в зависимости от знаков коэффициентов U , U^* и V^* в формуле (2.5). Результаты этого анализа представлены на рис. 1 и сведены в таблице 1.

На плоскости переменных N и $\ddot{\Lambda}$ в силу условия дополненности допустимыми будут лишь точки, лежащие на положительных координатных полуосях (так называемый в англоязычной литературе *corner law*). График функции (2.5) состоит из полупрямой, соответствующей контакту, и изолированной точки, соответствующей отрыву. Движениям системы соответствуют точки пересечения этого разрывного графика с координатными полуосями. Отрыв возможен, если $U > 0$, а

Таблица 1. Типы движения в системе с односторонней связью в зависимости от коэффициентов уравнений (2.3), (2.5): \uparrow отрыв, \leftrightarrow сохранение контакта, $\uparrow \leftrightarrow$ возможны оба этих типа, \emptyset невозможен ни один из этих типов

			U^*, V^*			
			1	2	3	4
			++	-+	+-	--
U	A	+	\uparrow	$\uparrow \leftrightarrow$	$\uparrow \leftrightarrow$	\uparrow
	B	-	\emptyset	\leftrightarrow	\leftrightarrow	\emptyset

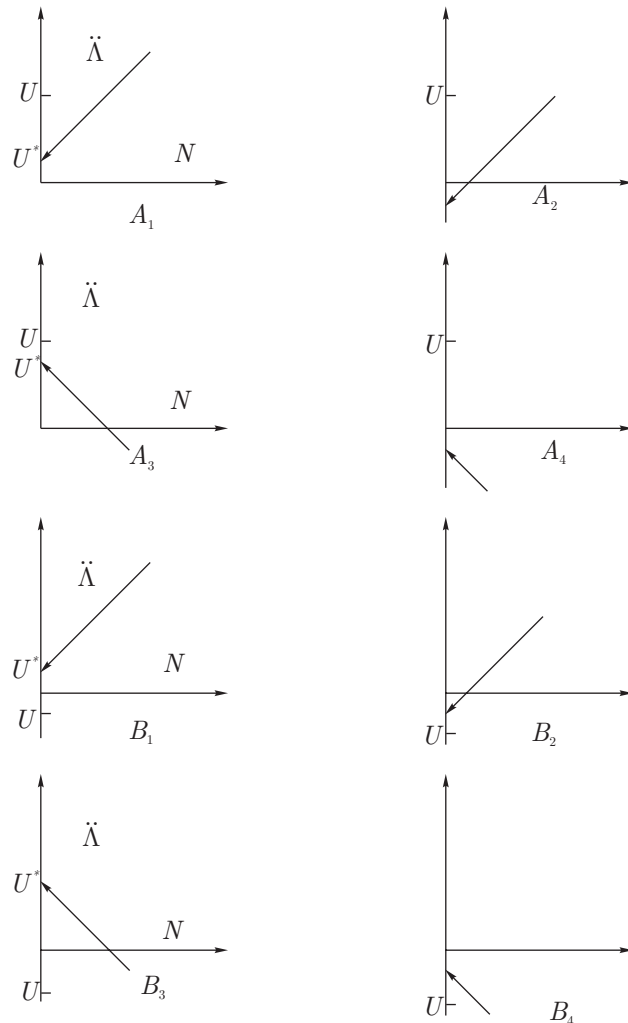


Рис. 1. Варианты решения уравнения (2.5)

для сохранения контакта полупрямая должна пересекать горизонтальную полуось, что эквивалентно неравенству $U^*V^* < 0$. Из восьми возможных комбинаций знаков лишь четыре приводят к однозначному выводу, в двух случаях возможен как отрыв, так и сохранение контакта, а в оставшихся двух случаях невозможен ни один из этих типов движения.

Заметим, что многообразие представленных вариантов обусловлено неравенством $U^* \neq U$.



В случае равенства $U^* = U$ зависимость (2.5) непрерывна, и решение сводится к отысканию точек пересечения прямой линии с координатным углом. Такая точка будет единственна, если $V^* > 0$, а в противоположном случае имеется две точки пересечения (если $U > 0$) или ни одной (если $U < 0$).

Ниже рассматриваются наиболее употребительные законы трения и обсуждается их связь с данными вариантами.

2.1. Случай абсолютно гладкой плоскости

Допустим вначале, что плоскость абсолютно гладкая, тогда $F \equiv 0$, и в формуле (2.5) получаем

$$U^* = U, \quad V^* = V > 0.$$

Вывод о знаке величины V следует из положительности матрицы \tilde{T}^{-1} в формуле (2.3).

Следовательно, из представленных в таблице вариантов реализуются лишь два: А1 и В2. Типичный сценарий ослабления неустойчивающей связи таков. Пусть на интервале времени $t \in (t_0, t_1)$ выполнено неравенство $U < 0$, причем

$$U(t_1) = 0, \quad U(t_1 + 0) > 0, \tag{2.6}$$

тогда тело отрывается от опоры с последующим перелетом и ударом. В общем случае, когда в момент столкновения тела с опорой $\dot{\Lambda} < 0$, удар приводит к скачкообразному изменению обобщенных скоростей. В силу диссипации энергии, удары затухают за конечное время. Если в дальнейшем для момента $t_2 > t_1$ выполняются соотношения, аналогичные (2.6), то серия ударов повторяется.

Возможна и более экзотическая ситуация, когда в любом интервале $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ функция $U(t)$ принимает значения обоих знаков. Очевидно, что в этом случае при $t > t_1$ ни один из основных видов движения (непрерывный контакт и отрыв) не реализуется; пример такого рода содержится в [7]. Следовательно, движение в этом интервале должно включать в себя последовательность перелетов и ударов. Для построения такого движения можно воспользоваться методом, предложенным в [13, 15] и представленным в дополнении.

2.2. Однородные законы трения

Пусть теперь в формуле (2.4) $\alpha \equiv 0$, т. е.

$$F = \beta(q, \dot{q})N. \tag{2.7}$$

К такому типу относятся законы Амонтона–Кулона и Кулона–Контенсу (второй закон отличается от первого наличием зависимости силы трения от скорости скольжения и угловой скорости верчения). При подстановке формулы (2.7) в (2.5) получим

$$U^* = U, \quad V^* \neq V. \tag{2.8}$$

Следовательно, для трения вида (2.7) из восьми представленных в таблице вариантов реализуются четыре (для которых знаки U и U^* совпадают), включая случаи В4 несуществования и А3 неединственности — так называемые парадоксы Пэнлеве [12]. Однако если в начальный момент времени выполнены неравенства $U < 0$, $V^* > 0$, то, как показывает несложный анализ формулы (2.5), в процессе непрерывного движения знак величины V^* измениться не может (исключение составляет случай, когда U и V^* одновременно проходят через ноль). Поэтому можно сделать вывод, что и в случае трения кулоновского типа (2.7) типичный сценарий отрыва тела от опоры также описывается формулами (2.6).



2.3. Двучленные законы трения

Вторая группа законов трения характеризуется соотношением

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow U^* \neq U. \quad (2.9)$$

Формула (2.9) включает в себя случаи вязкого трения (при этом $\beta = 0$), двучленный закон Кулона, реакцию абсолютно шероховатой плоскости, а также реакцию неабсолютно шероховатой плоскости (закон Амонтона—Кулона) при отсутствии скольжения. Для этих законов возможны все восемь вариантов, представленных в таблице.

Как отмечалось в предыдущем разделе, ситуации, в которых $V^* < 0$, реализуются лишь при особых начальных условиях. При этом происходит скачкообразное изменение скоростей — так называемый удар трением — после чего величина V^* становится положительной. В случае $V^* > 0$ отрыв возможен в двух вариантах А1 и А2, для которых $U > 0$, различающихся знаком величины U^* . В первом из этих вариантов $U^* > 0$, и в формуле (2.5) $\ddot{\Lambda} > 0$. Во втором варианте $U^* < 0$, и равенство (2.5) выполняется в двух случаях: $\ddot{\Lambda} > 0$ (отрыв) и $\ddot{\Lambda} = 0$ (сохранение контакта).

Кроме того, имеется вариант В1, для которого равенство (2.5) не выполнено ни при отрыве, ни при условии сохранения контакта [5]. В этом случае можно построить решение с бесконечной серией отрывов и ударов, воспользовавшись методом работ [13, 15] (см. дополнение).

Подведем итог. Пусть в начальный момент времени выполнены условия

$$U(t_0) < 0, \quad U^*(t_0) < 0, \quad V^*(t_0) > 0$$

(случай В2 в таблице), гарантирующие сохранение непрерывного контакта тела с плоскостью на некотором интервале времени. При решении (аналитическом или численном) системы (2.1), (2.2) условия отрыва в момент t_1 могут быть выполнены в следующих случаях:

$$U(t_1) < 0, \quad U^*(t_1) = 0, \quad U^*(t_1 + 0) > 0 \quad (2.10)$$

или

$$U(t_1) = 0, \quad U^*(t_1 + 0) > 0, \quad U^*(t_1) < 0. \quad (2.11)$$

Важно то обстоятельство, что в случае (2.11) изменение знака величины U при сохранении знаков U^* и V^* свидетельствует о рождении движения нового типа (т. е. отрыва от опоры) с сохранением возможности продолжения движения в контакте с опорой. В случае сохранения контакта нормальная реакция $N = -U^*/V^*$ не стремится к нулю, поэтому отношение $|F/N|$ остается ограниченным. Таким образом, отмеченная неоднозначность проявляется не только в случае абсолютно шероховатой опоры, но и в системах с кулоновым трением.

Поясним данную ситуацию модельным примером.

ПРИМЕР 1. Уравнение первого порядка

$$\dot{x} = 2\sqrt{x}, \quad x(0) = 0$$

допускает наряду с тривиальным решением семейство решений вида

$$x = \begin{cases} 0, & t \leq C, \\ (t - C)^2, & t > C, \end{cases}$$

где $C \geq 0$. Следовательно, связь $x \geq 0$ может как сохраниться, так и ослабнуть в любой момент времени.

Следующая система рассматривалась в [8] при наличии трения скольжения в процессе дискуссии о парадоксах Пэнлеве, а впоследствии в [5] в предположении абсолютной шероховатости опоры.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим круглый неоднородный диск радиуса r , катящийся по опоре без проскальзывания в плоскости XOZ . Уравнения движения имеют вид (массу тела считаем единичной)

$$\ddot{x} = F, \quad \ddot{z} = N - g, \quad A\ddot{\varphi} = -Nh'(\varphi) + Fh(\varphi), \quad (2.12)$$

где A — момент инерции диска относительно оси GY , φ — угол между вектором, идущим из геометрического центра диска в его центр масс G , и осью абсцисс, $h(\varphi)$ — расстояние от точки G до опоры.

Неудерживающая связь (2.2) описывается неравенством

$$\Lambda = z - h(\varphi) \geq 0, \quad h(\varphi) = r + \delta \sin \varphi, \quad (2.13)$$

где δ — расстояние от центра масс диска до его геометрического центра. Компоненты скорости точки контакта выражаются соотношениями

$$\dot{x}_c = \dot{x} + h(\varphi)\dot{\varphi}, \quad \dot{z}_c = \dot{z} - h'(\varphi)\dot{\varphi}, \quad (2.14)$$

причем $\dot{x}_c = 0$ при $\Lambda = 0$. Дифференцируя первое равенство (2.14), получим при учете уравнений (2.12) и равенства $\ddot{x}_c = 0$

$$F = \frac{hh'}{A + h^2}N - \frac{h'A}{A + h^2}\dot{\varphi}^2, \quad (2.15)$$

что является частным случаем закона (2.9).

Дважды дифференцируя равенство (2.13), получим

$$\ddot{\Lambda} = N - g - h''\dot{\varphi}^2 + \frac{h'}{A}(h'N - hF). \quad (2.16)$$

Величину U в формуле (2.3) найдем, полагая в (2.16) $F = N = 0$:

$$U = -g - h''\dot{\varphi}^2. \quad (2.17)$$

Для определения U^* подставим выражение (2.15) в формулу (2.16):

$$U^* = U + \frac{hh'^2\dot{\varphi}^2}{A + h^2}, \quad V = \frac{h'^2}{A + h^2}.$$

Поскольку $h > 0$, имеем $V \geq 0, U^* \geq U$, и при движении диска могут оказаться выполненными соотношения (2.10), что приводит к возникновению движений с ударами. Отметим, что при этом $N \rightarrow 0$, а величина F не является бесконечно малой, поэтому данная ситуация возможна лишь в случае абсолютно шероховатой опоры.

3. Стационарные движения тела вращения

Пусть поверхность тела строго выпукла, тогда при любой его ориентации точка контакта P определена однозначно. Введем инерциальную систему $OXYZ$ с началом на опорной плоскости



и осью аппликата, направленной вертикально вверх, а также связанную с телом $GX'Y'Z'$ с началом в его центре тяжести и осями, совпадающими с главными осями инерции. За обобщенные координаты примем координаты (x, y, z) точки G , а также углы Эйлера θ, ψ, φ . Будем считать, что рассматриваемое тело обладает геометрической и динамической симметрией относительно оси GZ' .

Кинетическая энергия тела выражается формулой [14]

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2, \quad (3.1)$$

где A и C — экваториальный и осевой моменты инерции.

В формуле (2.2)

$$\Lambda = z - h(\varphi),$$

где $h(\varphi)$ — расстояние от точки G до опорной плоскости, измеренное при касании. Следовательно, но,

$$\ddot{\Lambda} = \ddot{z} - h''(\theta)\dot{\theta}^2 - h'(\theta)\ddot{\theta}. \quad (3.2)$$

При учете (2.1), (3.1) выражение (3.2) принимает вид

$$\ddot{\Lambda} = \frac{N}{m} - \frac{f'(\theta)}{A}M_l - g - h''(\theta)\dot{\theta}^2 - \frac{h'(\theta)}{A}\dot{\psi} \sin \theta \left((A - C)\dot{\psi} \cos \theta - C\dot{\varphi} \right), \quad (3.3)$$

где M_l — момент реакции относительно прямой l , параллельной опорной плоскости и проходящей через точку G перпендикулярно оси тела (рис. 2). В формуле (3.3) первые два слагаемых зависят от реакции плоскости, а остальные члены составляют величину U в формуле (2.5). Таким образом,

$$U = -g - h''(\theta)\dot{\theta}^2 - \frac{h'(\theta)}{A}\tau(A\tau \cot \theta - Cn), \quad (3.4)$$

$$\tau = \dot{\psi} \sin \theta, \quad n = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.$$

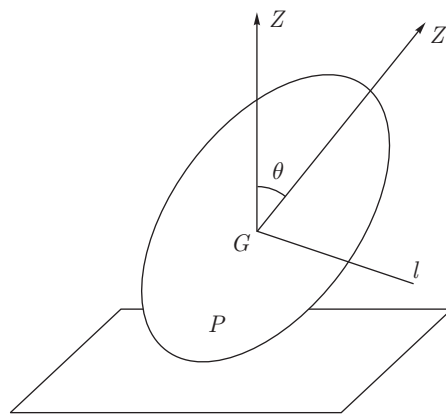


Рис. 2. Тело вращения на горизонтальной плоскости

Как известно [14], тело вращения на плоскости может совершать стационарные движения, для которых угол нутации сохраняет постоянное значение: $\theta = \theta_0$ — так называемые регулярные прецессии. Поскольку на таких движениях полная механическая энергия тела сохраняется, они

возможны в двух случаях: либо плоскость абсолютно гладкая, либо тело катится по плоскости без скольжения (случаи абсолютной шероховатости или закона Амонтона–Кулона для трения покоя).

1. В случае абсолютно гладкой плоскости угловые скорости вращения связаны с углом наклона тела соотношением [1, 6, 10]

$$A\tau_0^2 \cot \theta_0 - C\tau_0 n_0 = mgh_1, \quad (3.5)$$

$$h_0 = h(\theta_0), \quad h_1 = h'(\theta_0), \quad \tau_0 = \dot{\psi}_0 \sin \theta_0, \quad n_0 = \dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0.$$

Выразив величину n_0 из формулы (3.5), получим в результате подстановки в (3.4)

$$U = U^* = -g(1 + mA^{-1}h_1^2) < 0.$$

Следовательно, в данном случае отрывы от плоскости невозможны.

2. В отсутствие скольжения тела по плоскости скорость точки контакта P равна нулю:

$$\nu + \omega \times r_P = 0, \quad \nu = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \quad (3.6)$$

Условия существования стационарных движений в случае отсутствия скольжения имеют вид [6, 10]

$$\left(A - \frac{m\zeta_0}{\cos \theta_0} h_0 \right) \tau_0^2 \cot \theta_0 - \left(C - \frac{m\xi_0}{\sin \theta_0} h_0 \right) \tau_0 n_0 = mgh_1, \quad (3.7)$$

$$\xi_0 = -h_0 \sin \theta - h_1 \cos \theta, \quad \zeta_0 = h_1 \sin \theta - h_0 \cos \theta.$$

Каждое стационарное движение характеризуется параметрами θ_0, τ_0, n_0 ; при учете формулы (3.7) лишь два параметра независимы. Выберем произвольным образом θ_0 и τ_0 , тогда эта формула представляет собой линейное уравнение относительно n_0 . Решив это уравнение и подставив результат в формулу (3.4), придем после упрощений к такому выражению:

$$U = \kappa_0 + \kappa_1 \tau^2, \quad (3.8)$$

$$\kappa_0 = -g - \frac{mgCh_1^2 \sin \theta_0}{A(C \sin \theta_0 - m\xi_0 h_0)}, \quad \kappa_1 = \frac{mh_0 h_1}{A \sin \theta_0} \frac{A\xi_0 \cos \theta_0 - C\zeta_0 \sin \theta_0}{C \sin \theta_0 - m\xi_0 h_0}.$$

В формуле (3.8) $\kappa_0 < 0$, а величина κ_1 может принимать значения обоих знаков. В случае $\kappa_1 \leq 0$ имеем $U < 0$ для всех τ , т. е. условия отрыва (2.11) не выполняются. Если же $\kappa_1 > 0$, то для значений $\tau > \sqrt{-\kappa_0/\kappa_1}$ получаем $U > 0$. Это означает, что если опорная плоскость внезапно исчезнет, то нижняя точка тела начнет двигаться не вниз, а вверх. Присутствие опорной плоскости не может воспрепятствовать этому движению ввиду одностороннего характера ее связи с телом. Разумеется, через некоторое время под действием силы тяжести это движение развернется, т. е. после подскока и перелета тело вернется на опору (с ударом). Отметим, что рассмотренная возможность отрыва аналогична примеру 1 из раздела 2 и свидетельствует о неустойчивости стационарного движения в области $U > 0$.

Для определения знака величин U^* и V^* необходимо сначала из условия (3.6) вычислить коэффициенты α и β в формуле (2.4), а затем подставить их в выражение (3.3). Опуская громоздкие выкладки, приведем лишь результат для рассматриваемого случая стационарного движения (3.7):

$$F = \gamma \left(A \cot \theta_0 - C \frac{\zeta_0}{\xi_0} \right) \tau_0^2 - \gamma h_1 N, \quad \gamma = \frac{m\xi_0}{m\xi_0 h_0 \sin \theta_0 - C},$$

откуда

$$U^* = U - \kappa_1 \tau_0^2 = \kappa_0 < 0, \quad V^* = \frac{1}{m} + \frac{h_1^2}{A} + \gamma, \quad (3.9)$$

где коэффициенты κ_0 и κ_1 определены формулами (3.8). Поскольку точка контакта лежит ниже центра тяжести, то $\xi_0 < 0$, откуда $V^* > 0$.

Следовательно, в зависимости от знака величины U в формуле (3.8) мы получим один из двух вариантов А2 или В2.

ПРИМЕР 3. Для тонкого диска радиуса a имеем

$$C = 2A, \quad h = a \sin \theta, \quad h' = a \cos \theta, \quad \xi_0 = -a, \quad \zeta_0 = 0.$$

Подставляя данные соотношения в формулы (3.8), получим

$$\kappa_1 = -\frac{m a^3 \cos^2 \theta_0}{\sin \theta_0 C + m a^2} < 0 \Rightarrow U < 0. \quad (3.10)$$

Поскольку $\theta \in (0, \pi/2)$, можно сделать вывод: для регулярных прецессий тонкого диска условия отрыва не выполняются.

ПРИМЕР 4. Пусть диск имеет радиус a и толщину $2b$, тогда

$$h(\theta) = a \sin \theta + b \cos \theta, \quad h'(\theta) = a \cos \theta - b \sin \theta, \quad \zeta_0 = -b, \quad \xi_0 = -a.$$

При учете данных выражений коэффициент в формуле (3.9) принимает вид

$$\kappa_1 = \frac{m h_0}{A \sin^2 \theta_0} \frac{(a \cos \theta_0 - b \sin \theta_0)(C b \sin \theta_0 - A a \cos \theta_0)}{C + m a^2 + m b \cot \theta_0}. \quad (3.11)$$

В зависимости от соотношения высоты и радиуса диска и распределения масс, величина (3.11) может быть как положительной, так и отрицательной. В частности, если диск однороден, то

$$C = \frac{1}{2} m a^2, \quad A = \frac{1}{4} m a^2 + \frac{1}{3} m b^2.$$

На рис. 3 изображена область $\kappa_1 > 0$ для однородного диска на плоскости параметров $\mu = b/a$ и $\sigma = \cot \theta_0$. Граничные линии описываются уравнениями

$$\sigma = \mu, \quad \sigma = \frac{6\mu}{3 + 4\mu^2};$$

они пересекаются в точке $\sigma = \mu = \sqrt{3}/2$. Отметим, что область $\kappa_1 > 0$ существует для сколь угодно тонкого диска, если

$$\mu + o(\mu) < \sigma < 2\mu + o(\mu).$$

Кроме того, отношение $|F|/N$ остается конечным, т. е. предположение об абсолютной шероховатости не требуется. Отметим, что в области $\kappa_1 > 0$ угол наклона диска удовлетворяет неравенству

$$\theta_0 \geq \arctg \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 49^\circ.$$

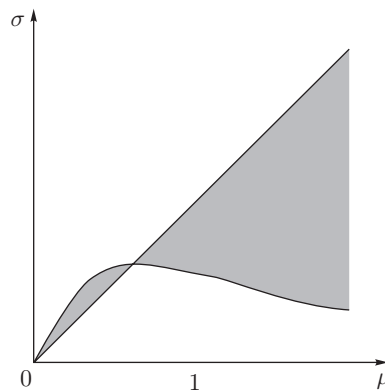


Рис. 3. Области неустойчивости стационарных движений диска для достаточно больших угловых скоростей (затенены)

4. Малые колебания диска в окрестности регулярных прецессий

Как показывают эксперименты [3, 4, 11], движение закрученного диска сопровождается высокочастотными колебаниями малой амплитуды. В данном разделе предполагается, что тело совершает малые колебания в окрестности стационарных движений (регулярных прецессий), и исследуется возможность отрыва. Сначала рассматривается случай гладкой опоры, затем — движения без скольжения.

4.1. Случай абсолютно гладкой плоскости

Для составления уравнений возмущенного движения понизим порядок системы (3.1), используя первые интегралы движения

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta), \quad p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + p_\varphi \cos \theta, \quad (4.1)$$

которые сохраняют постоянные значения как при наличии контакта между телом и опорой, так и при отрывах. При этом величины τ, n в формулах (3.4) связаны с константами (4.1) соотношениями

$$n = \frac{p_\varphi}{C} = \text{const}, \quad \tau = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{A \sin \theta}, \quad (4.2)$$

т. е. величина τ не является интегралом движения.

Изменение переменной θ при непрерывном контакте с опорой описывается уравнением Лагранжа для системы, получаемой из (3.1) путем подстановки $z = h(\theta)$ и исключения циклических переменных x, y, φ и ψ . Измененные кинетическая и потенциальная энергия \bar{T} и $\bar{\Pi}$ имеют вид

$$\bar{T} = \frac{1}{2}(A + mh^2)\dot{\theta}^2, \quad \bar{\Pi} = mgh + \frac{1}{2}A\tau^2 + \frac{1}{2}Cn^2, \quad (4.3)$$

причем при вычислении производных следует учитывать формулы (4.2). Таким образом, на стационарных движениях

$$\bar{\Pi}' = mgh'(\theta_0) + Cn\tau - A\tau^2 \cot \theta = 0, \quad (4.4)$$

что совпадает с условием (3.5).

Исследуем зависимость параметров стационарного движения от угла нутации при $\theta \rightarrow 0$ и ограниченной потенциальной энергии $\bar{\Pi}$. При этом величина n ограничена, а τ вследствие (4.4) бесконечно мала. Отсюда получаем в формуле (4.4)

$$\tau^2 = \frac{mga}{A} \sin \theta + o(\theta). \quad (4.5)$$

Как следует из формул (4.1), (4.2), (4.5), величина $\dot{\psi} = \tau / \sin \theta$ будет бесконечно большой, что согласуется с вышеупомянутыми экспериментами.

Уравнение движения системы (4.3) имеет вид

$$(A + mh'^2)\ddot{\theta} - mh'h''\dot{\theta}^2 + \bar{\Pi}'(\theta) = 0. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) описывает колебания консервативной системы с одной степенью и потенциальной энергией (4.3) в потенциальной «яме» в окрестности минимума $\theta = \theta_0$, причем

$$\bar{\Pi}''(\theta_0) = mgh''(\theta_0) + A^{-1}(A^2\tau^2 + C^2n^2) + 3mgh'(\theta_0) \cot \theta_0.$$

Первые два слагаемых в данном выражении ограничены при $\theta_0 \rightarrow 0$, а третье слагаемое в случае $h'(\theta_0) \neq 0$ бесконечно велико. Если глубина «ямы» $\Delta\bar{\Pi}$, характеризующая величину возмущений, фиксирована, то при $\theta_0 \rightarrow 0$ ширина «ямы» также стремится к нулю; при этом максимальное значение производной $\bar{\Pi}'(\theta)$ бесконечно велико. При этом ввиду ограниченности второго слагаемого в формуле (4.6) значения $\ddot{\theta}$ оказываются достаточно большими для того, чтобы правая часть формулы (3.2) оказалась положительной, что свидетельствует об отрыве тела от опоры ($U = U^* > 0$).

Заметим, что ключевое условие возникновения данной ситуации состоит в отличии от нуля производной $h'(0)$. Если тело ограничено гладкой строго выпуклой поверхностью, то по соображениям симметрии $h'(0) = 0$. Следовательно, диск является уникальным объектом с данным динамическим свойством (при этом $h'(0) = a$).

4.2. Движения тонкого диска без скольжения

Переходя к изучению движений без скольжения, отметим, что для них $U^* \neq U$ и возможны все представленные в таблице варианты. Заметим, что движение тела в отрыве от опоры не зависит от характера трения. Следовательно, величина U в любом случае определяется формулой (3.4). Тем не менее параметры τ и n в этой формуле, определяемые из условия (3.7), будут разными в случаях шероховатой и гладкой опоры. Для диска радиуса a и толщины $2b$ это условие принимает вид

$$\left(A + \frac{mb}{\cos \theta_0} h_0\right) \tau_0^2 \cot \theta_0 - \left(C + \frac{ma}{\sin \theta_0} h_0\right) \tau_0 n_0 = mgh_1. \quad (4.7)$$

Допустим вначале, что $b = 0$, тогда $h = a \sin \theta$, и формула (4.7) запишется так:

$$A\tau_0^2 \cot \theta_0 - (C + ma^2)\tau_0 n_0 = mga \cos \theta_0. \quad (4.8)$$

Сравнение соотношений (3.5) и (4.8) показывает, что их отличие носит лишь количественный, но не качественный характер. Поэтому остается справедливой оценка (4.5) и вывод о том, что частота малых колебаний бесконечно велика при $\theta_0 \rightarrow 0$, вследствие чего для некоторых моментов времени выполняется условие отрыва $U > 0$.

Для проверки знака величины U_1 нужно выразить силу трения F через N из условия (3.6), а затем воспользоваться формулами (2.5). Более простой путь состоит в непосредственном использовании формулы (3.2), где изменение величины θ определяется консервативной системой с одной степенью свободы [20]. Частота малых колебаний ϖ была определена в [14]:

$$(A + ma^2)\varpi^2 = \dot{\psi}^2(A(1 + \cos^2 \theta_0) + ma^2 \sin^2 \theta_0) - n\dot{\psi} \cos \theta_0(6A + ma^2) + 2n^2(C + ma^2) - ga^2 \sin \theta_0. \quad (4.9)$$

Вследствие оценки (4.5), величина $\dot{\psi}$ при $\theta_0 \rightarrow 0$ является бесконечно большой, и в формуле (4.9) первое слагаемое представляет собой бесконечно большую главную часть. Следовательно, в уравнении (3.2) правая часть может оказаться достаточно большой, чтобы обеспечить выполнение неравенства $U^* > 0$. В зависимости от сочетания знаков величин U и U^* реализуется тот или иной случай отрыва, перечисленные в п. 2.

4.3. Случай диска ненулевой толщины

Будем теперь считать, что $b \neq 0$, тогда $h = a \sin \theta + b \cos \theta$, и формула (4.7) примет вид

$$((A + mb^2)\tau_0^2 - tab\tau_0 n_0) \cot \theta_0 = mgh_1 + (C + ma^2)\tau_0 n_0 - tab\tau_0^2. \quad (4.10)$$

Если при $\theta_0 \rightarrow 0$ кинетическая энергия диска

$$2T = A\tau_0^2 + Cn_0^2$$

не стремится к нулю, то лишь одна из величин τ_0 и n_0 может быть бесконечно малой. В случае если $n_0 \rightarrow 0$, а величина τ_0 имеет ненулевой предел, равенство (4.10) невозможно, т. к. левая часть бесконечно велика. Следовательно, $\tau_0 \rightarrow 0$, а величина n_0 имеет ненулевой предел. При этом формула (4.10) приводит к оценке

$$\tau_0 = -\frac{g}{bn_0} \operatorname{tg} \theta_0 + o(\theta_0). \quad (4.11)$$

В отличие от соотношения (4.5), здесь мы видим, что величина τ_0 имеет первый порядок малости, поэтому скорость прецессии $\dot{\psi}$ остается конечной. При этом остается ограниченной и частота малых колебаний, поэтому условие $U > 0$ в окрестности регулярных прецессий не выполняется.

Для исследования знака величины U^* воспользуемся результатами работы [2], согласно которым при $\theta_0 \rightarrow 0$ частота малых колебаний допускает асимптотическую оценку

$$\varpi^2 \sim 2\dot{\psi}^2 \frac{3a^2 + 16b^2}{15a^2 + 16b^2}. \quad (4.12)$$

Как отмечено выше, в рассматриваемом случае величина $\dot{\psi}$ остается конечной (вопреки мнению автора работы [2]). Следовательно, в формуле (4.9) величина $\ddot{\theta}$ имеет тот же порядок, что и возмущения, и величина U^* остается близкой к своему значению (3.9). Таким образом, условия отрыва для диска ненулевой толщины, катящегося без скольжения, не выполняются. Можно сделать вывод: наблюдающееся на практике резкое увеличение угловой скорости $\dot{\psi}$ при $\theta \rightarrow 0$ не находит объяснения в рамках модели абсолютно шероховатой плоскости.

5. Заключение

При выборе модели контактного взаимодействия в задачах механики руководствуются соображениями простоты, математической корректности и достоверности. Известные законы трения получены экспериментально для систем простейшей конфигурации, а затем переносятся на общий случай. При этом в некоторых случаях возникают парадоксы несуществования или неединственности решения. Для систем с кулоновым трением парадоксальные ситуации были обнаружены П. Пэнлеве более столетия назад, позднее оказалась, что неединственность присуща даже системам с односторонними связями без трения.

Эксперименты по динамике твердого тела на шероховатой плоскости позволяют определить его кинематические характеристики, но не дают возможности построить закон трения. Компьютерная модель включает этот закон как исходную предпосылку; сравнение численных результатов с экспериментальными данными позволяет идентифицировать параметры закона. При этом важно иметь четкое представление об особенностях систем с односторонними связями, включающих возможную неединственность решения.

В статье получены условия возникновения особых ситуаций несуществования и неединственности решения для случая двучленного закона трения (2.10), охватывающего закон Кулона, вязкое трение и системы с качением. Показано, что при анализе таких систем необходимо учитывать возможную неединственность, когда наряду с непрерывным движением тела по опоре возможны отрывы.

При отрывах тяжелого тела от опоры возникают серии ударов, обнаруживаемые звуком. Поэтому выполнение (или невыполнение) условий отрыва в той или иной математической модели может служить доводом в пользу используемого закона трения. Отличительной особенностью динамики тела дискообразной формы являются движения с неограниченно большой скоростью прецессии при ограниченной кинетической энергии. Установлено, что такие движения, близкие к регулярным прецессиям, существуют в случае гладкой плоскости, а также при качении тонкого диска по шероховатой опоре. Напротив, в задаче о качении диска конечной толщины в окрестности стационарных движений отрывы не возникают. Последний вывод согласуется с результатами численного моделирования, представленными в [21].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-01-00718.

Дополнение.

Построение решения уравнений динамики систем с неудерживающей связью методом штрафных функций

При построении простых математических моделей механической системы со связями обычно считают последние абсолютно жесткими. В некоторых случаях это может привести к парадоксальным ситуациям, когда уравнения движения неразрешимы либо имеют несколько решений.

ПРИМЕР ([7]). Частица по инерции скользит без трения в вертикальной плоскости XOY по кривой, заданной уравнением

$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^n \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

и имеющей в точке $x = 0$ непрерывную производную в случае $n \geq 3$. В момент $t = t_1$ частица попадает в начало координат, причем $\dot{x} > 0$. Если считать связь между телом и опорой двусторонней, то реакция этой связи в любом интервале $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$, ($\varepsilon > 0$) меняет свой знак счетное число раз. Поэтому в случае односторонней связи при $t > t_1$ невозможно ни движение с непрерывным контактом, ни отрыв от опоры. Следовательно, движение в этом интервале должно включать в себя последовательность перелетов и ударов.

Суть метода штрафных функций состоит в допущении возможности малых контактных деформаций, при этом $\Lambda = y - f(x) < 0$. Нормальное напряжение определим как линейную функцию деформации:

$$N = k^2 \delta, \quad \delta = \max\{0, -\Lambda\}. \quad (D.1)$$

Тогда система (2.1) будет иметь регулярное решение

$$x = x_k(t), \quad y = y_k(t), \quad t \in (t_1, t_1 + \varepsilon), \quad (D.2)$$

причем в достаточно малой окрестности точки t_1 подскоков не будет. Однако напрашивающийся предельный переход $k \rightarrow \infty$ невозможен ввиду отсутствия сходимости функций (D.2) в каком-либо смысле. Тем не менее семейство всех функций (D.2) при $k > k_0 > 0$ компактно в $C[t_1, t_1 + \varepsilon]$ по теореме Арцела, т. к. равностепенная непрерывность следует из ограниченности кинетической энергии и влечет за собой при учете начальных условий равномерную ограниченность семейства. Следовательно, из любой бесконечно большой последовательности $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ можно выбрать такую подпоследовательность, что последовательность фазовых кривых (D.2) будет сходящейся в $C[t_1, t_1 + \varepsilon]$ (в [15] обсуждается сходимость в ином функциональном пространстве). Предельная траектория включает бесконечную последовательность абсолютно упругих ударов, моменты которых сходятся к точке t_1 справа (т. е. эта последовательность не имеет первого по времени элемента). Заметим, что вышеупомянутая подпоследовательность определена неоднозначно, т. е. в обсуждаемой ситуации решение неединственно. При добавлении в формуле (D.1) члена, линейного по $\dot{\delta}$, можно построить решение с неабсолютно упругими ударами [13].

Аналогичный подход можно применить и для построения решения в парадоксальном случае (2.11). Для этого определим нормальную реакцию формулой (D.1), а затем силу трения — формулой (2.5). Для всякого фиксированного значения коэффициента k можно построить регулярное решение системы с упругой связью, а затем выбрать из любой бесконечно большой последовательности $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ последовательность, для которой траектории соответствующих вспомогательных систем в конфигурационном пространстве образуют сходящуюся функциональную последовательность. При этом построенное решение определено неоднозначно.

Список литературы

- [1] Appell, P., *Traité de mécanique rationnelle*, Paris: Gauthier-Villars, 1953.
- [2] Batista, M., Steady motion of a rigid disk of finite thickness on a horizontal plane, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 2006, vol. 41, no. 4, pp. 605–621.
- [3] Caps, H., Dorbolo, S., Ponte, S., Croisier, H., Vanderwalle, N., Rolling and slipping motion of Euler's disk, *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 69, 056610 (6 pages).
- [4] Easwar, K., Rouyer, F., Narayanan Menon. Speeding to a stop: the finite-time singularity of a spinning disk, *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 66, 045102 (3 pages).

- [5] Иванов, А.П., О безударных прыжках неоднородного колеса. 2. Шероховатая опора, *Изв. РАН. Мех. тв. тела.*, 1993, № 1, pp. 61–64.
- [6] Karapetyan, A.V., Rumjantsev, V.V., Stability of Conservative and Dissipative Systems, in *Appl. Mech. Soviet Reviews. V. 1. Stability and Analytical Mechanics*, Mikhailov, G.K. and Parton V.Z., Eds., New York: Hemisphere, 1990, pp. 1–144.
- [7] Kozlov, V.V., Treshchev, D.V., *Billiards*, Providence: Amer. Math. Soc., 1991.
- [8] Lecornu, L., Sur le frottement de glissement, *C. R. Acad. Sci (Paris)*, 1905, vol. 140, p. 635.
- [9] Le Saux, C., Leine, R.I., Glocker, C., Dynamics of a rolling disk in the presence of dry friction, *J. Nonlinear Sci.*, 2005, vol. 15, pp. 27–61.
- [10] Маркеев, А.П., *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью*, М.: Наука, 1992, 336 с.
- [11] McDonald, A.J., McDonald, K.T., The rolling motion of a disk on a horizontal plane, *Preprint of Princeton High School*, New Jersey, 2001.
- [12] Painlevé, P., *Leçons sur le frottement*, Paris: Hrmann, 1885.
- [13] Paoli, L., Schatzman, M., Vibrations avec contraintes unilatérales et perte d'énergie aux impacts, en dimension finie, *C. R. Acad. Sci (Paris)*, 1993, Ser. 1, vol. 317, pp. 97–101.
- [14] Routh, E.J., *Advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, London: McMillan, 1905.
- [15] Schatzman, M., A class of nonlinear differential equations of second order in time, *Nonlin. Anal., Theory, Meth. and Appl.*, 1978, vol. 2, no. 3, pp. 355–373.
- [16] van den Engh, G., Nelson, P., Roach, J., Numismatic gyrations, *Nature*, 2000, vol. 408, pp. 540.
- [17] Denny, M., Curling rock dynamics, *Canadian J. Phys.*, 1998, vol. 76, pp. 295–304.
- [18] Lötstedt, P., Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraint, *SIAM J. Appl. Mech.*, 1982, vol. 42, no. 2, pp. 281–296.
- [19] Percivale, D., Uniqueness in the elastic bounce problem, *J. diff. eqs.*, 1985, vol. 56, part 1, no. 2, pp. 206–215; *ibid.* 1991, vol. 90, part 2, no. 2, pp. 304–315.
- [20] O'Reilly, O.M., The dynamics of rolling disks and sliding disks, *Nonlinear dynamics*, 1996, vol. 10, pp. 287–305.
- [21] Kessler, P., O'Reilly O.M., The ringing of Euler's disk, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 1, pp. 49–60.