

Нелинейная динамика простейшей модели скейтборда

А. В. Кремнев, А. С. Кулешов

Кафедра Теоретической механики и мехатроники
Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова,
Россия 119991, г. Москва, Ленинские горы
E-mails: avkremen@mail.ru, kuleshov@mech.math.msu.su

Получено 30 мая 2008 г.

Изучается простейшая математическая модель, описывающая движение человека на скейтборде. Предполагается, что управление скейтбордом со стороны человека отсутствует. Получены уравнения движения модели и исследован вопрос об их интегрируемости. Изучено влияние различных параметров модели на ее динамику.

Ключевые слова: скейтборд, неголономные связи, интегрируемость, устойчивость движения

A. V. Kremnev and A. S. Kuleshov

Nonlinear Dynamics of a Simplified Skateboard Model

Analysis and simulation are performed for a simplified model of a skateboard in the absence of rider control. Equations of motion of the model are derived and the problem of integrability of the obtained equations is investigated. The influence of various parameters of the model on its dynamics and stability are studied.

Keywords: skateboard, nonholonomic constraints, integrability, stability of motion

Mathematical Subject Classifications: 70F25, 70E18, 70E40, 70E50

Светлой памяти нашего Учителя
В. В. Румянцева (1921–2007)
посвящается

1. Введение

В настоящее время скейтбординг — искусство катания на скейтборде — является одним из самых популярных видов спорта [1].

Однако несмотря на значительную популярность скейтбординга, количество публикаций, посвященных различным вопросам динамики скейтборда, сравнительно невелико. В конце 70-х — начале 80-х годов XX века появились две статьи Монта Хаббарда [2, 3], в которых были построены и исследованы две математические модели, описывающие движение человека на скейтборде (в дальнейшем человека, катающегося на скейтборде, будем называть райдером). При этом для получения уравнений движения моделей использовались общие теоремы динамики. Модели, изучаемые нами в данной работе, представляют собой дальнейшее развитие моделей, предложенных Хаббардом.

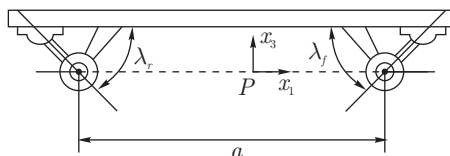


Рис. 1. Скейтборд: вид сбоку

Обычный скейтборд состоит из доски, двух подвесок, соединяющих колеса с доской, и четырех колес (рис. 1–2). Современные доски обычно имеют размеры 78–83 см в длину, 17–21 см в ширину и толщиной 1–2 см [1].

Наиболее существенными элементами скейтборда являются подвески, при помощи которых оси колес крепятся к доске. Вращение как передней, так и задней колесной пары происходит вокруг соответствующих наклонных осей — пивотов (рис. 1). Это приводит к тому, что всякий раз, когда доска не параллельна плоскости движения, колесные пары поворачиваются на соответствующие углы относительно вертикальной оси, перпендикулярной плоскости движения (рис. 2). Управление скейтбордом происходит с использованием именно этой зависимости между углом наклона доски и углами поворота колесных пар.

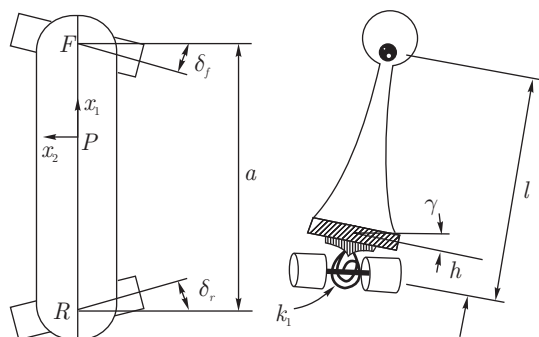


Рис. 2. Скейтборд: вид сверху и сзади

Предположим также, что в случае наклона доски скейтборда возникает восстанавливающий момент, который возвращает доску в первоначальное положение. Будем считать, что величина этого момента пропорциональна углу наклона доски; соответствующий коэффициент пропорциональности обозначим k_1 . Такой момент может возникать, например, если доска соединена с колесами при помощи торсионных пружин. Ранее такое же предположение о наличии восстанавливающего момента было сделано в работах [2, 3].

2. Постановка задачи. Основные системы координат

Предположим, что райдер, стоящий на скейтборде, представляет собой твердое тело, остающееся перпендикулярным к плоскости доски во все время движения. Следовательно, при наклоне доски на некоторый угол γ райдер отклоняется от вертикали на тот же угол (рис. 2).

Введем неподвижную систему координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке O плоскости, по которой движется скейтборд, и осью OZ , перпендикулярной плоскости движения. Обозначим середины осей передних и задних колес скейтборда через A и B соответственно. Пусть расстояние AB равно a (рис. 2, 3). Положение отрезка AB относительно неподвижной системы координат $OXYZ$ определяется координатами X, Y его середины G и углом θ , который данный отрезок образует с неподвижной осью OX (рис. 3).

При наклоне доски на угол γ ось передней колесной пары поворачивается на угол δ_f по часовой стрелке, а ось задней колесной пары поворачивается на угол δ_r против часовой стрелки (рис. 2, 3). Предположим, что скейтборд движется таким образом, что его колеса не могут проскальзывать в направлении, перпендикулярном плоскости колеса. Это требование приводит к тому, что на систему накладываются две неголономные связи

$$\begin{aligned} -\dot{X} \sin(\theta - \delta_f) + \dot{Y} \cos(\theta - \delta_f) + \frac{a}{2} \dot{\theta} \cos \delta_f &= 0, \\ -\dot{X} \sin(\theta + \delta_r) + \dot{Y} \cos(\theta + \delta_r) - \frac{a}{2} \dot{\theta} \cos \delta_r &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

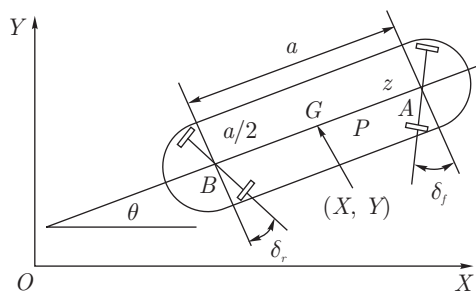


Рис. 3. Система координат

Мы можем разрешить уравнения связей (2.1) относительно \dot{X} и \dot{Y} . Получим

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\frac{a\dot{\theta}}{2 \sin(\delta_f + \delta_r)} [\cos \delta_f \cos(\theta + \delta_r) + \cos \delta_r \cos(\theta - \delta_f)], \\ \dot{Y} &= -\frac{a\dot{\theta}}{2 \sin(\delta_f + \delta_r)} [\cos \delta_f \sin(\theta + \delta_r) + \cos \delta_r \sin(\theta - \delta_f)]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Скорости точек A и B при этом будут направлены горизонтально и перпендикулярно осям колес. В этом случае на отрезке AB существует точка P , скорость которой направлена вдоль прямой AB . Если обозначить скорость точки P через u , а ее расстояние от точки A — через z , то легко получить следующие формулы (см. [1]):

$$u = -\frac{a\dot{\theta} \cos \delta_f \cos \delta_r}{\sin(\delta_f + \delta_r)}, \quad \dot{\theta} = -\frac{u \sin(\delta_f + \delta_r)}{a \cos \delta_f \cos \delta_r}, \quad z = \frac{a \sin \delta_f \cos \delta_r}{\sin(\delta_f + \delta_r)}. \quad (2.3)$$

Используя теорию конечных поворотов (см., например, [4]), можно показать, что угол наклона доски γ связан с углами поворота колесных осей кинематическими соотношениями

$$\operatorname{tg} \delta_f = \operatorname{tg} \lambda_f \sin \gamma, \quad \operatorname{tg} \delta_r = \operatorname{tg} \lambda_r \sin \gamma, \quad (2.4)$$

где λ_f, λ_r — углы наклона передней и задней подвесок относительно горизонтали (рис. 1). Первые формулы (2.4) несколько иным способом были получены в курсовой работе [5]. Подробное объяснение того, как получить эти формулы, содержится в [1].

С учетом этих соотношений расстояние z от точки A до точки P будет равно

$$z = \frac{a \sin \delta_f \cos \delta_r}{\sin(\delta_f + \delta_r)} = \frac{a \operatorname{tg} \delta_f}{\operatorname{tg} \delta_f + \operatorname{tg} \delta_r} = \frac{a \operatorname{tg} \lambda_f}{\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r},$$

т. е. при выполнении условий (2.4) точка P всегда находится на постоянном расстоянии от точки A , зависящем лишь от углов λ_f и λ_r наклона передней и задней подвесок к горизонтали. Это обстоятельство позволяет нам ввести подвижную систему координат $Px_1x_2x_3$ с началом в точке P , единичные векторы которой обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Единичный вектор \mathbf{e}_1 этой системы направлен по прямой AB в сторону движения, вектор \mathbf{e}_3 перпендикулярен плоскости движения, а вектор \mathbf{e}_2 направлен перпендикулярно \mathbf{e}_1 так, чтобы векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образовывали правую тройку. В дальнейшем все исследования динамики будут проводиться относительно двух введенных систем координат — неподвижной $OXYZ$ и подвижной $Px_1x_2x_3$.

3. Уравнения движения

Предположим, что доска скейтборда расположена на высоте h от прямой AB , длина доски, как и расстояние AB , равна a и ее центр масс C расположен на продольной оси доски посередине между точками крепления подвесок. В отношении райдера будем предполагать, что он стоит не в центре доски, а на ее продольной оси в точке E на расстоянии d от переднего края доски. Пусть центр масс райдера находится в точке R , высота которой над прямой AB равна l . Введем также следующие обозначения: m_b — масса доски, m_r — масса райдера, I_{bx}, I_{by}, I_{bz} — главные центральные моменты инерции доски, I_{rx}, I_{ry}, I_{rz} — главные центральные моменты инерции райдера. Кроме того, обозначим через I_x, I_y, I_z следующие выражения:

$$I_x = I_{bx} + I_{rx}, \quad I_y = I_{by} + I_{ry}, \quad I_z = I_{bz} + I_{rz}.$$

Можно показать (см. [1]), что переменные u и γ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} (A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma) \dot{u} + B_1 (\ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma) \sin \gamma + \\ + (C_1 - 3D_1 + 3F_1 \sin^2 \gamma) u \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma = 0, \\ E_1 \ddot{\gamma} + (D_1 - F_1 \sin^2 \gamma) u^2 \sin \gamma \cos \gamma + B_1 (\dot{u} \sin \gamma + u \dot{\gamma} \cos \gamma) \cos \gamma + \\ + k_1 \gamma - (m_b h + m_r l) g \sin \gamma = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где A_1, B_1, \dots, F_1 — функции параметров, а именно

$$A_1 = m_b + m_r, \quad D_1 = \frac{(\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)}{a} (m_b h + m_r l), \quad E_1 = I_x + m_b h^2 + m_r l^2,$$

$$B_1 = \frac{m_b h}{2} (\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r) + \frac{m_r l}{a} ((a - d) \operatorname{tg} \lambda_f - d \operatorname{tg} \lambda_r),$$

$$C_1 = \frac{m_b}{4} (\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r)^2 + \frac{I_z}{a^2} (\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)^2 + \frac{m_r}{a^2} ((a - d) \operatorname{tg} \lambda_f - d \operatorname{tg} \lambda_r)^2,$$

$$F_1 = \frac{(\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)^2}{a^2} (I_y + m_b h^2 + m_r l^2 - I_z).$$

Уравнения (2.2), (2.3), (3.1) образуют замкнутую систему уравнений движения скейтборда. Основным объектом нашего дальнейшего исследования станет система уравнений (3.1). Покажем теперь, что при любом значении постоянных A_1, B_1, \dots, F_1 уравнения (3.1) имеют первый интеграл — интеграл энергии. Действительно, если умножить первое из уравнений (3.1) на u , а второе — на $\dot{\gamma}$ и сложить, то после упрощения можно заметить, что полученное выражение является полной производной функции

$$H = \frac{A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma}{2} u^2 + \frac{E_1}{2} \dot{\gamma}^2 + B_1 u \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma + \frac{k_1}{2} \gamma^2 + (m_b h + m_r l) g \cos \gamma = c_0. \quad (3.2)$$

Данная функция представляет собой полную механическую энергию системы. Таким образом, для интегрирования уравнений (3.1) нам недостает лишь одного дополнительного первого интеграла. Вопрос об интегрируемости уравнений движения (3.1) будет рассмотрен ниже.

4. Устойчивость прямолинейного равномерного движения скейтборда

Уравнения (3.1) допускают частное решение

$$u = u_0 = \operatorname{const}, \quad \gamma = 0, \quad (4.1)$$

которое соответствует равномерному прямолинейному движению скейтборда. Рассмотрим задачу об устойчивости этого движения системы.

Полагая $u = u_0 + \xi$ и сохраняя для γ прежнее обозначение, выпишем уравнения возмущенного движения

$$E_1 \ddot{\gamma} + B_1 u_0 \dot{\gamma} + (D_1 u_0^2 + k_1 - (m_b h + m_r l) g) \gamma = \Gamma, \quad \dot{\xi} = \Xi. \quad (4.2)$$

Здесь Γ и Ξ — не зависящие от времени функции переменных $\gamma, \dot{\gamma}$ и ξ , разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка. При этом имеют место соотношения (данный факт устанавливается прямой проверкой):

$$\Gamma(0, 0, \xi) = \Xi(0, 0, \xi) = 0.$$

Характеристическое уравнение, отвечающее системе (4.2), имеет вид:

$$\mu (E_1 \mu^2 + B_1 u_0 \mu + D_1 u_0^2 + k_1 - (m_b h + m_r l) g) = 0. \quad (4.3)$$

При выполнении условий

$$E_1 > 0, \quad B_1 u_0 > 0, \quad D_1 u_0^2 + k_1 - (m_b h + m_r l) g > 0 \quad (4.4)$$

уравнение (4.3) имеет один нулевой корень и два корня с отрицательной вещественной частью. Поскольку все нелинейности в системе (4.2) тождественно обращаются в нуль при $\gamma = 0, \dot{\gamma} = 0$, то при условиях (4.4) имеет место особый случай одного нулевого корня [6, 7] и невозмущенное движение (4.1) устойчиво, причем асимптотически относительно переменных $\gamma, \dot{\gamma}$ и неасимптотически — относительно переменной u .

Поскольку условие $E_1 > 0$ выполняется при всех значениях параметров, то условия устойчивости (4.4) прямолинейного равномерного движения скейтборда окончательно могут быть записаны следующим образом:

$$\left[\frac{m_b h}{2} (\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r) + \frac{m_r l}{a} ((a-d) \operatorname{tg} \lambda_f - d \operatorname{tg} \lambda_r) \right] u_0 > 0, \quad (4.5)$$

$$k_1 + \left((\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r) \frac{u_0^2}{a} - g \right) (m_b h + m_r l) > 0. \quad (4.6)$$

При строгом нарушении по меньшей мере одного из неравенств (4.5)–(4.6) уравнение (4.3) имеет корень с положительной вещественной частью и невозмущенное движение (4.1) неустойчиво.

Получим некоторые простейшие выводы об устойчивости прямолинейного движения скейтборда из анализа условий (4.5)–(4.6). Поскольку в условии (4.5) скорость u_0 входит как множитель, то можно сделать вывод, что устойчивость движения скейтборда зависит от направления его движения. Если в одном направлении движение скейтборда будет устойчивым, то в другом — обязательно неустойчивым. Такое поведение свойственно многим неавтономным системам. В первую очередь здесь следует назвать задачу о движении кельтского камня (см., например, [8]–[17]), в которой устойчивость вращения камня зависит от направления вращения.

Предположим, что $u_0 > 0, \lambda_f = \lambda_r = \lambda$ и неравенство (4.6) выполнено. Тогда, как следует из неравенства (4.5), устойчивость прямолинейного движения скейтборда зависит от того, где стоит райдер. Если он стоит ближе к передней подвеске ($d < a/2$), то движение будет устойчивым, а если ближе к задней подвеске ($d > a/2$) — то неустойчивым.

Выясним теперь, при каком условии будет устойчивым положение равновесия скейтборда, т. е. решение

$$u_0 = 0, \quad \gamma = 0.$$

При $u_0 = 0$ характеристическое уравнение (4.3) будет иметь один нулевой корень и пару чисто мнимых корней при выполнении условия

$$k_1 - (m_b h + m_r l) g > 0. \quad (4.7)$$

Покажем, что при выполнении условия (4.7) положение равновесия скейтборда будет устойчивым. Заметим, что значение $\gamma = 0$ является критическим значением потенциальной энергии системы. Тогда, на основании результатов В. В. Румянцева об устойчивости равновесий неавтономных систем [18, 19] (см. также [20]) можно утверждать, что положение равновесия скейтборда будет устойчивым в первом приближении по отношению к $\gamma, \dot{\gamma}$, если вторая производная потенциальной энергии, вычисленная в положении равновесия, будет положительной. Данное условие как раз имеет вид неравенства (4.7). Следовательно, можно сделать вывод, что положение равновесия скейтборда будет устойчивым, если коэффициент упругости торсионной пружины достаточно велик, чтобы компенсировать дестабилизирующий эффект действия моментов сил тяжести доски и райдера.

Характеристическое уравнение (4.3) может иметь один нулевой корень и пару чисто мнимых корней еще в одном случае — когда $B_1 = 0$. Это условие выполняется, в частности, когда скейтборд симметричен ($\lambda_f = \lambda_r$), а райдер стоит в центре доски ($d = a/2$). Действительно, при $B_1 = 0$ характеристическое уравнение (4.3) принимает вид:

$$\mu (E_1 \mu^2 + D_1 u_0^2 + k_1 - (m_b h + m_r l) g) = 0.$$

Данное уравнение будет иметь один нулевой и два чисто мнимых корня при выполнении условия

$$D_1 u_0^2 + k_1 - (m_b h + m_r l) g > 0. \quad (4.8)$$

Условие (4.8) является необходимым условием устойчивости стационарного движения (4.1) в случае $B_1 = 0$. Более строгие выводы об устойчивости стационарных движений в случае $B_1 = 0$ будут получены ниже, в отдельном параграфе.

5. Существование инвариантной меры и интегрируемый случай

Используя результаты работы [21] из анализа характеристического полинома (4.3) укажем необходимые условия для существования у системы уравнений (3.1) инвариантной меры с аналитической плотностью вблизи равномерных прямолинейных движений (4.1) скейтборда. Как известно [21], для существования инвариантной меры необходимо, чтобы след матрицы Λ (матрицы линейной части системы (3.1)) обращался в нуль. Вычисляя $\text{tr } \Lambda$, при помощи (4.3) найдем

$$\text{tr } \Lambda = -\frac{B_1 u_0}{E_1}.$$

Таким образом, инвариантная мера у системы (3.1) отсутствует во всех случаях, кроме случая $B_1 = 0$. Легко видеть, что в этом случае первое из уравнений (3.1) интегрируется отдельно и в результате удастся проинтегрировать уравнения (3.1) до конца. Действительно, из условия $B_1 = 0$ можно найти явное выражение для $\text{tg } \lambda_r$ через другие параметры системы:

$$\text{tg } \lambda_r = \text{tg } \lambda_f + \frac{2(a - 2d) m_r l}{m_b h a + 2m_r l d} \text{tg } \lambda_f. \quad (5.1)$$

С учетом (5.1) выражения для A_1, B_1, \dots, F_1 примут вид

$$\begin{aligned} A_1 &= m_b + m_r, \quad B_1 = 0, \quad E_1 = I_x + m_b h^2 + m_r l^2, \\ C_1 &= \frac{m_b m_r (m_b h^2 + m_r l^2) (a - 2d)^2}{(m_b h a + 2m_r l d)^2} \text{tg}^2 \lambda_f + \frac{4I_z (m_b h + m_r l)^2}{(m_b h a + 2m_r l d)^2} \text{tg}^2 \lambda_f, \\ D_1 &= \frac{2(m_b h + m_r l)^2}{m_b h a + 2m_r l d} \text{tg } \lambda_f, \quad F_1 = \frac{4(m_b h + m_r l)^2 (I_y - I_z + m_b h^2 + m_r l^2)}{(m_b h a + 2m_r l d)^2} \text{tg}^2 \lambda_f. \end{aligned}$$

Уравнения (3.1) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} (A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma) \dot{u} + (C_1 - 3D_1 + 3F_1 \sin^2 \gamma) u \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma &= 0, \\ E_1 \ddot{\gamma} + (D_1 - F_1 \sin^2 \gamma) u^2 \sin \gamma \cos \gamma + k_1 \gamma - (m_b h + m_r l) g \sin \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Система уравнений (5.2) допускает интеграл энергии

$$H = \frac{A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma}{2} u^2 + \frac{E_1}{2} \dot{\gamma}^2 + \frac{k_1}{2} \gamma^2 + (m_b h + m_r l) g \cos \gamma = c_0. \quad (5.3)$$

Переходя в первом из уравнений (5.2) к новой независимой переменной — углу γ , можно записать данное уравнение в виде:

$$\frac{du}{d\gamma} = \frac{(3D_1 - C_1 - 3F_1 \sin^2 \gamma) u \sin \gamma \cos \gamma}{(A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma)}. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, находим зависимость $u = u(\gamma)$. Подставляя найденную зависимость в интеграл энергии (5.3), получим дифференциальное уравнение для определения γ :

$$\dot{\gamma}^2 = \frac{2}{E_1} (c_0 - (m_b h + m_r l) g \cos \gamma) - \frac{k_1}{E_1} \gamma^2 - \frac{(A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma)}{E_1} u^2(\gamma). \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) также является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, находим зависимость $\gamma = \gamma(t)$. Подставляя данную функцию в выражение для u , находим зависимость $u = u(\gamma(t)) = u(t)$. После этого все оставшиеся неизвестные функции также могут быть выражены как функции времени. Действительно, для производной угла θ у нас имеется выражение

$$\dot{\theta} = -\frac{(\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)}{a} u \sin \gamma = -\frac{2(m_b h + m_r l) \operatorname{tg} \lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d} u \sin \gamma,$$

из которого, зная зависимости $u = u(t)$ и $\gamma = \gamma(t)$, однократным интегрированием находим

$$\theta(t) = \theta_0 - \frac{2(m_b h + m_r l) \operatorname{tg} \lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d} \int_0^t u(\tau) \sin \gamma(\tau) d\tau. \quad (5.6)$$

Для производных \dot{X} и \dot{Y} координат центра масс доски имеем следующие выражения:

$$\dot{X} = u \cos \theta + \frac{(\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r)}{2} u \sin \gamma \sin \theta = u \cos \theta - \frac{(a - 2d) m_r l \operatorname{tg} \lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d} u \sin \gamma \sin \theta,$$

$$\dot{Y} = u \sin \theta - \frac{(\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r)}{2} u \sin \gamma \cos \theta = u \sin \theta + \frac{(a - 2d) m_r l \operatorname{tg} \lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d} u \sin \gamma \cos \theta,$$

откуда, имея явные выражения для функций $u = u(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, $\theta = \theta(t)$, находим

$$X = X_0 + \int_0^t u(\tau) \cos \theta(\tau) d\tau - \frac{(a - 2d) m_r l \operatorname{tg} \lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d} \int_0^t u(\tau) \sin \gamma(\tau) \sin \theta(\tau) d\tau, \quad (5.7)$$

$$Y = Y_0 + \int_0^t u(\tau) \sin \theta(\tau) d\tau + \frac{(a - 2d) m_r l \operatorname{tg} \lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d} \int_0^t u(\tau) \sin \gamma(\tau) \cos \theta(\tau) d\tau. \quad (5.8)$$

Таким образом, при $B_1 = 0$ все неизвестные переменные задачи находятся при помощи квадратур (5.5)–(5.8). Качественный анализ найденного интегрируемого случая проведен в препринте [1].

В следующем пункте мы проведем исследование устойчивости стационарных движений системы в интегрируемом случае $B_1 = 0$.



6. Исследование устойчивости стационарных движений в интегрируемом случае

В интегрируемом случае при $B_1 = 0$ уравнения движения (5.2) допускают интеграл энергии (5.3), квадратичный по псевдоскоростям u и $\dot{\gamma}$, а также другой интеграл, существование которого следует из формулы (5.4). Этот интеграл может быть записан в виде:

$$(A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma)^{\frac{3}{4}} \exp(-G(\gamma)) u = j_1, \\ G(\gamma) = \frac{C_1}{2\sqrt{4A_1F_1 - (C_1 - 2D_1)^2}} \arctg \frac{2F_1 \sin^2 \gamma + C_1 - 2D_1}{\sqrt{4A_1F_1 - (C_1 - 2D_1)^2}}. \quad (6.1)$$

Тот факт, что интеграл (6.1) оказывается линейным относительно u , существенно упрощает исследование устойчивости стационарных движений в данной задаче. Действительно, анализ вопросов существования, устойчивости и бифуркации стационарных движений рассматриваемой системы сводится к анализу эффективного потенциала данной системы [15, 20], [22]–[26].

Пусть $W = W(\gamma)$ — минимум функции H (интеграла энергии (5.3)) по переменным $\dot{\gamma}$ и u на уровне j_1 интеграла, определяемого соотношением (6.1). Таким образом,

$$W(\gamma) = \min_{u, \dot{\gamma}} H = \frac{(A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma)}{2} u^2(\gamma) + \frac{k_1 \gamma^2}{2} + (m_b h + m_r l) g \cos \gamma, \quad (6.2)$$

где функция $u(\gamma)$ определяется из соотношения (6.1). Из общей теории следует, что критическим точкам данного эффективного потенциала отвечают стационарные движения системы, причем точкам минимума — устойчивые стационарные движения. Таким образом, стационарные движения рассматриваемой системы определяются из условия

$$dW/d\gamma|_{\gamma=\gamma_0} = 0,$$

при этом производная $du/d\gamma$ вычисляется по формуле (5.4). Условие $dW/d\gamma = 0$ в явном виде записывается следующим образом:

$$u_0^2 (D_1 - F_1 \sin^2 \gamma_0) \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 + k_1 \gamma_0 - (m_b h + m_r l) g \sin \gamma_0 = 0. \quad (6.3)$$

Из условия (6.3) следует, что при любом значении параметра u_0 существует стационарное движение (см. формулу (4.1))

$$u = u_0 = \text{const}, \quad \gamma = 0,$$

которое соответствует равномерному прямолинейному движению скейтборда с постоянной скоростью. Устойчивость данного стационарного движения при $B_1 \neq 0$ (в общем случае) уже исследовалась нами выше в первом приближении путем анализа корней характеристического уравнения. Мы отмечали, что при $B_1 = 0$ характеристическое уравнение (4.3) имеет один нулевой и два чисто мнимых корня при выполнении условия (4.8). Теперь мы можем дать строгие выводы об устойчивости данного стационарного движения при $B_1 = 0$.

Действительно, неравенство $d^2W/d\gamma^2 > 0$, в которое подставлено значение $\gamma = 0$, дает необходимое и достаточное условие устойчивости стационарного движения (4.1) в виде

$$u_0^2 D_1 + k_1 - (m_b h + m_r l) g > 0.$$

Видно, что данное неравенство в точности совпадает с условием (4.8) — необходимым условием устойчивости стационарного движения (4.1). Учитывая тот факт, как записывается постоянная D_1 при $B_1 = 0$, приведем условие (4.8) к виду

$$\frac{2(m_b h + m_r l)^2 \operatorname{tg} \lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d} u_0^2 + k_1 - (m_b h + m_r l) g > 0. \quad (6.4)$$

Анализируя условие (6.4), можно сделать следующие выводы. Если скейтборд является статически устойчивым, т. е. выполняется условие (4.7), при котором устойчиво положение равновесия $u_0 = 0$, $\gamma = 0$, то, согласно условию (6.4), стационарное движение (4.1) будет устойчиво при любом значении скорости u_0 . Если же условие статической устойчивости (4.7) не выполняется, то скейтборд может быть стабилизирован, если скорость u_0 превосходит некоторое критическое значение

$$u_0^2 > u_*^2 = \frac{((m_b h + m_r l) g - k_1) (m_b h a + 2m_r l d) \operatorname{ctg} \lambda_f}{2(m_b h + m_r l)^2}. \quad (6.5)$$

В симметричном случае, когда $\lambda_f = \lambda_r = \lambda$, $d = a/2$, условие (6.5) может быть переписано в виде

$$u_0^2 > u_*^2 = \frac{((m_b h + m_r l) g - k_1) a \operatorname{ctg} \lambda}{2(m_b h + m_r l)}. \quad (6.6)$$

Впервые неравенство (6.6) было получено в работе [2] в качестве условия устойчивости прямолинейного равномерного движения симметричной модели скейтборда.

При переходе через значение $u_0^2 = u_*^2$ меняется характер устойчивости стационарного движения (4.1). Это означает, что существуют и другие стационарные движения, отличные от прямолинейного равномерного движения скейтборда. Эти движения определяются соотношениями

$$u = u_0 = \operatorname{const}, \quad \gamma = \gamma_0 = \operatorname{const} \quad (6.7)$$

с $\gamma_0 \neq 0$. Стационарные движения (6.7) представляют собой движения скейтборда с постоянной скоростью u_0 по окружности, центр и радиус которой определяются начальными условиями. Условие устойчивости этих стационарных движений имеет вид

$$d^2 W / d\gamma^2 |_{\gamma=\gamma_0} > 0$$

или, в явном виде:

$$\frac{P_4(\sin^2 \gamma_0)}{A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma_0 + F_1 \sin^4 \gamma_0} u_0^2 + k_1 - (m_b h + m_r l) g \cos \gamma_0 > 0, \quad (6.8)$$

где $P_4(\sin^2 \gamma_0)$ — полином 4-ой степени относительно $\sin^2 \gamma$ с постоянными коэффициентами

$$P_4(\sin^2 \gamma) = A_1 D_1 + (4D_1^2 - C_1 D_1 - 3A_1 F_1 - 2A_1 D_1) \sin^2 \gamma + (4A_1 F_1 - 5D_1 F_1 - 2D_1^2 - C_1 F_1) \sin^4 \gamma + (3F_1 + 2C_1 + 2D_1) F_1 \sin^6 \gamma - 2F_1^2 \sin^8 \gamma.$$

Условие устойчивости (6.8) стационарных движений (6.7) скейтборда имеет довольно громоздкий вид. Поэтому детальное аналитическое исследование полученных условий существования и устойчивости стационарных движений системы представляет собой отдельную, весьма

сложную задачу. В данной работе мы представим только результаты численного анализа условий существования и устойчивости стационарных движений при изменении лишь одного параметра

$$\tilde{p} = \frac{(m_b h + m_r l) g}{k_1}$$

отношения постоянной $(m_b h + m_r l) g$ момента силы тяжести к постоянной k_1 восстанавливающего момента.

Из формулы (6.1) следует явное выражение скорости $u(\gamma)$ через постоянную j_1 дополнительного первого интеграла

$$u = \frac{j_1}{(A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma)^{3/4}} \exp(G(\gamma)).$$

Подстановка данного выражения в условие (6.2) дает

$$\frac{j_1^2 \sin \gamma \cos \gamma (D_1 - F_1 \sin^2 \gamma) \exp(2G(\gamma))}{(A_1 + (C_1 - 2D_1) \sin^2 \gamma + F_1 \sin^4 \gamma)^{3/2}} + k_1 \gamma - (m_b h + m_r l) g \sin \gamma = 0. \quad (6.9)$$

Запишем соотношение (6.9) в безразмерном виде. Введем безразмерные постоянные

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \frac{A_1}{\sqrt{4A_1 F_1 - (C_1 - 2D_1)^2}}, \quad \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{\sqrt{4A_1 F_1 - (C_1 - 2D_1)^2}}, \\ \tilde{D}_1 &= \frac{D_1}{\sqrt{4A_1 F_1 - (C_1 - 2D_1)^2}}, \quad \tilde{F}_1 = \frac{F_1}{\sqrt{4A_1 F_1 - (C_1 - 2D_1)^2}}, \\ \tilde{p} &= \frac{(m_b h + m_r l) g}{k_1}. \end{aligned}$$

Разделим теперь соотношение (6.9) на k_1 и введем безразмерную постоянную s_1 первого интеграла по формуле

$$s_1 = \frac{j_1}{(4A_1 F_1 - (C_1 - 2D_1)^2)^{1/8} k_1^{1/2}}.$$

Тогда соотношение (6.9) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{s_1^2 \sin \gamma \cos \gamma (\tilde{D}_1 - \tilde{F}_1 \sin^2 \gamma)}{(\tilde{A}_1 + (\tilde{C}_1 - 2\tilde{D}_1) \sin^2 \gamma + \tilde{F}_1 \sin^4 \gamma)^{3/2}} \times \\ & \times \exp\left(\tilde{C}_1 \operatorname{arctg}\left(2\tilde{F}_1 \sin^2 \gamma + \tilde{C}_1 - 2\tilde{D}_1\right)\right) + \gamma - \tilde{p} \sin \gamma = 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Для численного исследования условия (6.10) выберем следующие значения параметров системы:

$$\begin{aligned} m_b &= 3 \text{ кг}, \quad m_r = 75,02 \text{ кг}, \quad h = 0,065 \text{ м}, \quad l = 1,037 \text{ м}, \\ a &= 0,78 \text{ м}, \quad d = a/2, \quad \operatorname{tg} \lambda_f = \operatorname{tg} \lambda_r = 1/3, \quad g = 9,8 \text{ м/с}^2, \\ I_x &= 11,64 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_y = 12,55 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_z = 1,32 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что условие (6.10) не меняет своего вида при замене $\gamma \rightarrow -\gamma$, $s_1 \rightarrow -s_1$. Поэтому будем исследовать данное соотношение только при $s_1 > 0$, $\gamma \in [0, \pi/2)$. Следует отметить, что выбор столь широкого промежутка изменения γ представляет лишь теоретический интерес. На практике угол γ не превосходит значения $\pi/6$. Безразмерные параметры задачи \tilde{A}_1 , \tilde{C}_1 , \tilde{D}_1 и \tilde{F}_1 при этом будут равны

$$\tilde{A}_1 = 1,35, \quad \tilde{C}_1 = 0,016, \quad \tilde{D}_1 = 1,137, \quad \tilde{F}_1 = 1,145.$$

Легко видеть, что при таком выборе параметров выражение $\tilde{D}_1 - \tilde{F}_1 \sin^2 \gamma$ на интервале $\gamma \in (0, \pi/2)$ меняет знак с положительного на отрицательный только один раз, при $\gamma = \gamma_*$ так, что $\sin \gamma_* \approx 0,996$. Будем менять параметр \tilde{p} и следить, как меняется на плоскости (s_1, γ) график функции, заданной неявно соотношением (6.10). Каждая точка этого графика определяет некоторое стационарное движение системы, и если мы обозначим на графике устойчивые и неустойчивые стационарные движения, то в результате получим бифуркационную диаграмму Пуанкаре–Четаева.

Предположим сначала, что параметр \tilde{p} достаточно велик $\tilde{p} > \pi/2$, так что выражение $\gamma - \tilde{p} \sin \gamma$ будет отрицательным при всех значениях $\gamma \in (0, \pi/2)$. Тогда для любого $\gamma \in (0, \gamma_*)$ существует решение уравнения (6.10) в виде

$$s_1^2 = \frac{(\tilde{p} \sin \gamma - \gamma) \left(\tilde{A}_1 + (\tilde{C}_1 - \tilde{D}_1) \sin^2 \gamma + \tilde{F}_1 \sin^4 \gamma \right)^{3/2}}{\sin \gamma \cos \gamma \left(\tilde{D}_1 - \tilde{F}_1 \sin^2 \gamma \right)} \times \\ \times \exp \left(-\tilde{C}_1 \operatorname{arctg} \left(2\tilde{F}_1 \sin^2 \gamma + \tilde{C}_1 - 2\tilde{D}_1 \right) \right).$$

При $\gamma \in [\gamma_*, \pi/2)$ решения уравнения (6.10) не существует. На плоскости (s_1, γ) график неявной функции, заданной соотношением (6.10), имеет в этом случае вид (рис. 4).

Предположим теперь, что

$$\sqrt{\frac{\tilde{F}_1}{\tilde{D}_1}} \arcsin \sqrt{\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{F}_1}} \leq \tilde{p} \leq \frac{\pi}{2}.$$

В этом случае выражение $\gamma - \tilde{p} \sin \gamma$ при $\gamma \in [0, \pi/2)$ меняет знак с отрицательного на положительный один раз, причем значение γ_{**} , при котором это происходит, будет больше значения γ_* . Тогда решение уравнения (6.10) существует при $\gamma \in [0, \gamma_*)$ и при $\gamma \in (\gamma_{**}, \pi/2)$. Соответствующий график на плоскости (s_1, γ) имеет вид рис. 5.

Пусть теперь параметр \tilde{p} изменяется в пределах

$$1 \leq \tilde{p} \leq \sqrt{\frac{\tilde{F}_1}{\tilde{D}_1}} \arcsin \sqrt{\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{F}_1}}.$$

В этом случае выражение $\gamma - \tilde{p} \sin \gamma$ при $\gamma \in [0, \pi/2)$ меняет знак с отрицательного на положительный один раз, причем значение γ_{**} , при котором это происходит, будет меньше значения γ_* . Тогда решение уравнения (6.10) существует при $\gamma \in [0, \gamma_{**}]$ и при $\gamma \in (\gamma_*, \pi/2)$. Соответствующий график на плоскости (s_1, γ) имеет вид рис. 6.

Рассмотрим, наконец, последнюю возможность: $\tilde{p} \leq 1$. В этом случае выражение $\gamma - \tilde{p} \sin \gamma$ положительно при всех $\gamma \in (0, \pi/2)$. Поэтому существует два вида решений — нулевое решение $\gamma = 0$ и решение при $\gamma \in (\gamma_*, \pi/2)$. Соответствующий график имеет вид рис. 7.

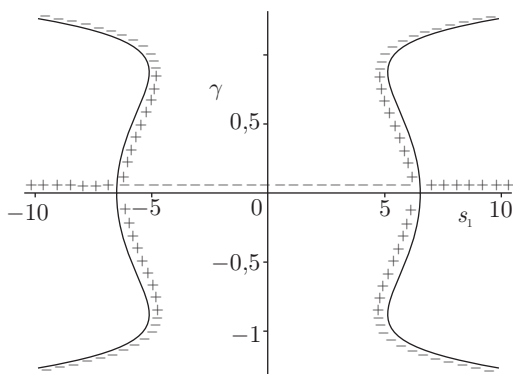


Рис. 4

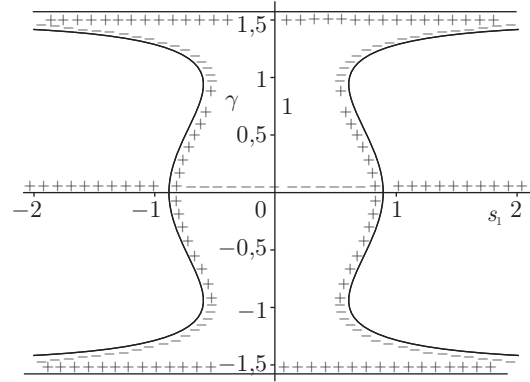


Рис. 5

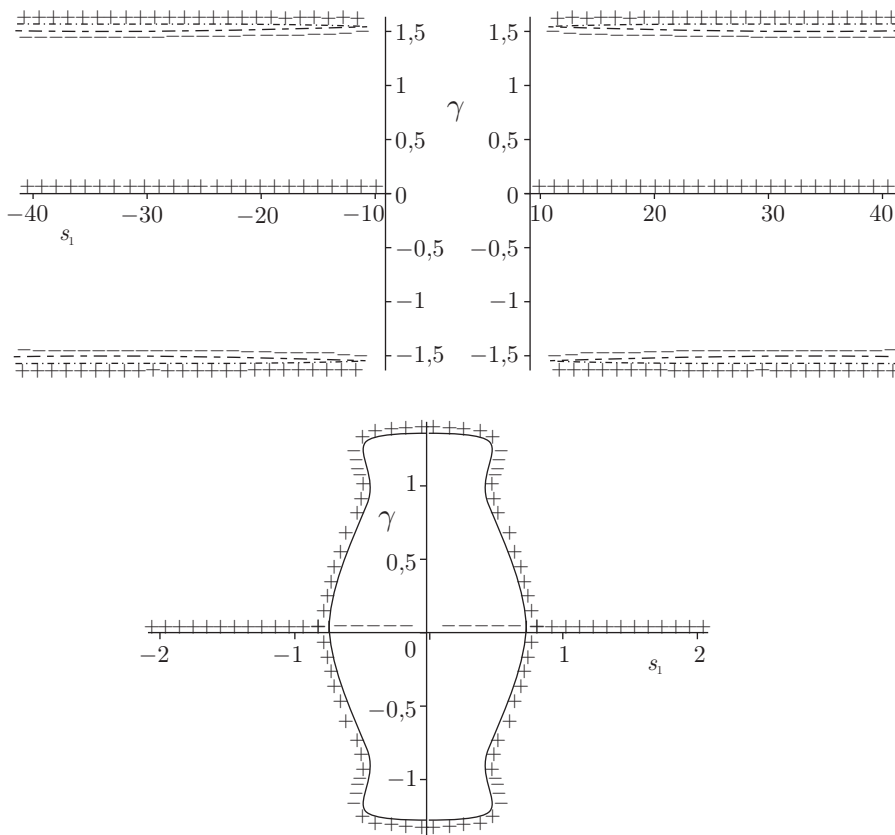


Рис. 6

Таким образом, мы дали полное численное исследование существования у данной системы различных стационарных движений. Как уже говорилось, подробное аналитическое исследование устойчивости и ветвления этих движений представляет собой отдельную задачу, которая будет решена в последующих работах.

В следующем пункте изучается поведение системы вблизи положения равновесия $u_0 = 0$, $\gamma = 0$ в общем случае, при $B_1 \neq 0$.

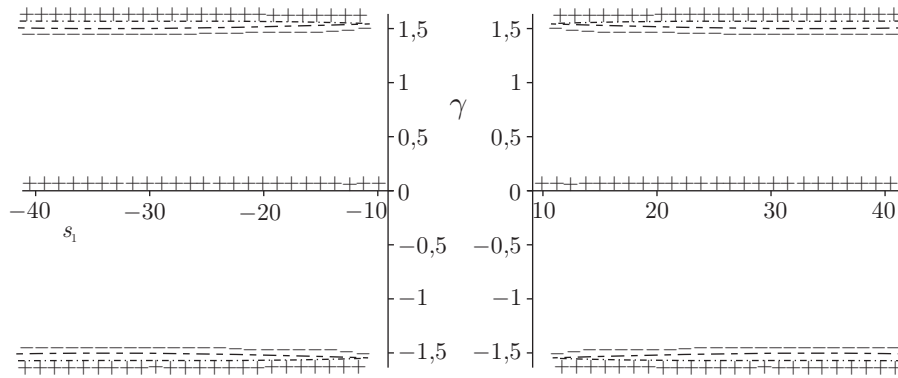


Рис. 7

7. Анализ движения системы вблизи положения равновесия

Пусть в стационарном движении (4.1) скорость $u_0 = 0$, т. е. скейтборд стоит на плоскости неподвижно. Необходимым и достаточным условием устойчивости этого положения равновесия будет, согласно результатам, полученным выше, выполнение неравенства (4.7). Пусть это условие выполняется. Для определенности предположим также, что $B_1 > 0$ (случай $B_1 < 0$ исследуется аналогично). Тогда значение $u_0 > 0$ определяет устойчивое направление движения, а значение $u_0 < 0$ — неустойчивое направление движения. Рассмотрим движение системы вблизи положения равновесия $u_0 = 0$. Для этого разрешим сначала уравнения (3.1) относительно \dot{u} , $\ddot{\gamma}$, а затем, полагая u и γ малыми величинами, выпишем уравнения возмущенного движения системы с учетом членов до второго порядка малости включительно:

$$\dot{u} = \frac{B_1 \Omega_1^2}{A_1} \gamma^2, \quad \ddot{\gamma} + \Omega_1^2 \gamma = -\frac{B_1 u \dot{\gamma}}{E_1}, \quad \Omega_1^2 = \frac{k_1 - (m_b h + m_r l) g}{E_1}. \quad (7.1)$$

Заметим, что линейная часть второго уравнения системы (7.1) уже приведена к виду, соответствующему нормальным колебаниям. Для исследования нелинейной системы (7.1) приведем ее к нормальной форме [16, 17, 27]. Для получения нормальной формы системы (7.1) удобно сначала сделать замену переменных, вводящую пару комплексно-сопряженных переменных z_1 и z_2 :

$$\gamma = \frac{z_1 - z_2}{2i}, \quad \dot{\gamma} = \frac{z_1 + z_2}{2} \Omega_1, \quad u = z_3.$$

В переменных z_k , $k = 1, 2, 3$, линейная часть системы (7.1) имеет диагональную форму и получение нормальной формы сводится просто к выделению резонансных членов в правых частях преобразованной системы (7.1). Учитывая это, получаем следующую нормальную форму системы (7.1), записанную в комплексных переменных

$$\dot{z}_1 = i\Omega_1 z_1 - \frac{B_1}{2E_1} z_1 z_3, \quad \dot{z}_2 = -i\Omega_1 z_2 - \frac{B_1}{2E_1} z_2 z_3, \quad \dot{z}_3 = \frac{B_1 \Omega_1^2}{2A_1} z_1 z_2. \quad (7.2)$$

Вводя вещественные полярные координаты согласно формулам

$$z_1 = \rho_1 (\cos \sigma_1 + i \sin \sigma_1), \quad z_2 = \rho_1 (\cos \sigma_1 - i \sin \sigma_1), \quad z_3 = \rho_2,$$

из системы (7.2) получим нормализованную систему уравнений возмущенного движения, которая распадается на две независимые подсистемы:

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{B_1}{2E_1} \rho_1 \rho_2, \quad \dot{\rho}_2 = \frac{B_1 \Omega_1^2}{2A_1} \rho_1^2, \quad (7.3)$$

$$\dot{\sigma}_1 = \Omega_1. \quad (7.4)$$

В (7.3) отброшены члены выше второго, а в (7.4) — выше первого порядка относительно ρ_k , $k = 1, 2$.

В ε -окрестности положения равновесия правые части уравнений (7.3) и (7.4) отличаются от отвечающих им правых частей точных уравнений возмущенного движения на величины порядка ε^3 и ε^2 соответственно. Решения точных уравнений аппроксимируются решениями системы (7.3)–(7.4) с погрешностью порядка ε^2 для ρ_1, ρ_2 и порядка ε для σ_1 на интервале времени порядка $1/\varepsilon$. Ограничиваясь этой точностью, будем вместо полных уравнений возмущенного движения рассматривать приближенную систему (7.3)–(7.4).

Уравнение (7.4) сразу интегрируется. Получаем

$$\sigma_1 = \Omega_1 t + \sigma_0.$$

Система (7.3) описывает эволюцию амплитуды ρ_1 колебаний доски и скорости ρ_2 прямолинейного движения скейтборда. Легко показать, что данная система имеет первый интеграл

$$E_1 \rho_1^2 + \frac{A_1}{\Omega_1^2} \rho_2^2 = A_1 n_1^2, \tag{7.5}$$

где n_1 — постоянная, определяемая начальными условиями. Воспользуемся этим интегралом для решения системы уравнений (7.3) и получения явных зависимостей $\rho_1 = \rho_1(t)$ и $\rho_2 = \rho_2(t)$. Выражая ρ_1^2 при помощи интеграла (7.5) и подставляя ρ_1^2 во второе уравнение системы (7.3), получаем дифференциальное уравнение для определения ρ_2 :

$$\dot{\rho}_2 = \frac{B_1}{2E_1} (\Omega_1^2 n_1^2 - \rho_2^2). \tag{7.6}$$

Общее решение уравнения (7.6) имеет вид

$$\rho_2(t) = \frac{\Omega_1 n_1 \left(1 - n_2 \exp\left(-\frac{B_1 \Omega_1 n_1}{E_1} t\right) \right)}{\left(1 + n_2 \exp\left(-\frac{B_1 \Omega_1 n_1}{E_1} t\right) \right)}, \tag{7.7}$$

где n_2 — неотрицательная произвольная постоянная.

Используя полученное выражение (7.7) для $\rho_2(t)$ и интеграл (7.5), найдем явную зависимость функции ρ_1 от времени:

$$\rho_1(t) = 2\sqrt{\frac{A_1 n_1^2 n_2}{E_1} \frac{\exp\left(-\frac{B_1 \Omega_1 n_1}{2E_1} t\right)}{1 + n_2 \exp\left(-\frac{B_1 \Omega_1 n_1}{E_1} t\right)}}. \tag{7.8}$$

Остановимся подробно на свойствах решений (7.7), (7.8) системы (7.3) и их связи с характером движения скейтборда. Система (7.3) имеет положение равновесия

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \Omega_1 n_1 \tag{7.9}$$

(эти частные решения могут быть получены из общих зависимостей (7.7)–(7.8), если положить в них $n_2 = 0$). При этом произвольная постоянная n_1 может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Положительные значения постоянной n_1 соответствуют прямолинейному движению скейтборда с малой скоростью в устойчивом направлении, а отрицательные — в неустойчивом. Действительно, линеаризованные в окрестности равновесия (7.9) уравнения (7.3) дают

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{B_1}{2E_1} \Omega_1 n_1 \rho_1, \quad \dot{\rho}_2 = 0.$$

Таким образом, при $n_1 > 0$ положение равновесия устойчиво, а при $n_1 < 0$ — неустойчиво.



Зависимости функций ρ_1 и ρ_2 от времени дают полное представление о характере движения скейтборда при малых скоростях. Будем считать, что мы находимся в окрестности устойчивого равновесия ($n_1 > 0$) и в начальный момент времени $\rho_2(0) \geq 0$, т. е. $n_2 \leq 1$ (случай $n_1 > 0, n_2 > 1$ аналогичен случаю $n_1 < 0, n_2 < 1$, который будет рассмотрен ниже). Эти условия соответствуют тому, что в начальный момент скейтборд получил малую скорость

$$\rho_2(0) = \Omega_1 n_1 \frac{1 - n_2}{1 + n_2}$$

в устойчивом направлении. Тогда с течением времени амплитуда колебаний доски ρ_1 монотонно убывает от ее начального значения

$$\rho_1(0) = \frac{2n_1}{1 + n_2} \sqrt{\frac{A_1 n_2}{E_1}}$$

до нуля (рис. 8), а скорость движения скейтборда ρ_2 возрастает по модулю. В пределе скейтборд движется в устойчивом направлении с постоянной скоростью $\Omega_1 n_1$ (рис. 9).

Пусть теперь мы находимся в окрестности неустойчивого равновесия $n_1 < 0$. Предположим снова, что в начальный момент времени $n_2 < 1$, т. е. $\rho_2(0) < 0$ (случай $n_1 < 0, n_2 > 1$ аналогичен разобранным выше случаю $n_1 > 0, n_2 < 1$). Эти условия соответствуют тому, что в начальный момент скейтборд получил малую скорость

$$\rho_2(0) = \Omega_1 n_1 \frac{1 - n_2}{1 + n_2}$$

в неустойчивом направлении. В этом случае предельное движение системы будет таким же, как и при $\rho_2(0) \geq 0$, но эволюция движения существенно иная. При

$$0 < t < t_* = \frac{E_1 \ln(n_2)}{B_1 \Omega_1 n_1}$$

амплитуда колебаний ρ_1 монотонно возрастает, а скейтборд движется в неустойчивом направлении со все уменьшающейся скоростью. В момент $t = t_*$ скорость скейтборда обращается в нуль, а амплитуда колебаний ρ_1 достигает своего максимального значения

$$\rho_1(t_*) = \sqrt{\frac{A_1 n_1^2}{E_1}}$$

При $t > t_*$ скейтборд движется уже в устойчивом направлении с возрастающей скоростью, а амплитуда колебаний монотонно по модулю убывает (рис. 10–11). Таким образом, при $\rho_2(0) < 0$ за время эволюции движения один раз происходит смена направления прямолинейного движения скейтборда с постоянной скоростью. Аналогичные нелинейные эффекты (в частности, смена направления движения) наблюдались раньше и в других задачах неголономной механики (например, в классической задаче о движении кельтского камня [8]–[17]). Этим еще раз можно подчеркнуть связь рассматриваемой задачи с классическими задачами динамики неголономных систем.

Таковы основные свойства рассмотренной нами простейшей модели скейтборда со стоящим на нем райдером при движении по горизонтальной плоскости. Данную модель можно развивать в различных направлениях: с одной стороны, можно рассмотреть более сложную конструкцию

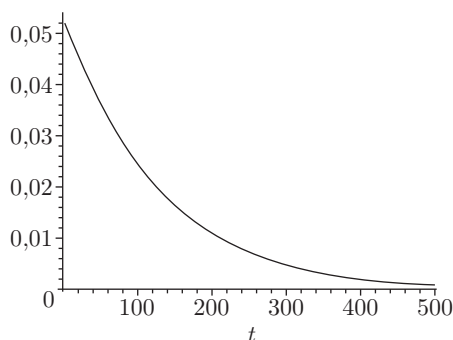


Рис. 8. Зависимость амплитуды колебаний ρ_1 от времени в случае $n_1 > 0, n_2 \leq 1$

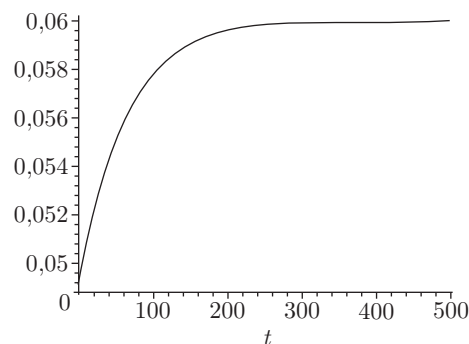


Рис. 9. Зависимость скорости скейтборда ρ_2 от времени в случае $n_1 > 0, n_2 \leq 1$

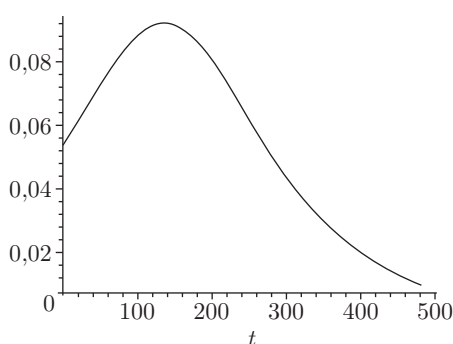


Рис. 10. Зависимость амплитуды колебаний ρ_1 от времени в случае $n_1 < 0, n_2 \leq 1$

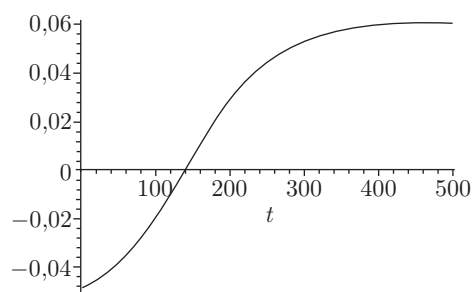


Рис. 11. Зависимость скорости скейтборда ρ_2 от времени в случае $n_1 < 0, n_2 \leq 1$

скейтборда и учесть наличие колес и характер их взаимодействия с опорной плоскостью. С другой стороны, можно построить более сложную (и более соответствующую реальности) конструкцию подвески и выяснить, какие дополнительные динамические эффекты возникают при такой конструкции. Можно построить также более сложную конструкцию райдера, ввести в систему управление и изучать систему с управлением. Все эти задачи являются весьма интересными, и мы непременно обратимся к ним в будущем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08-01-00363).

Список литературы

- [1] Кремнев А. В., Кулешов А. С. *Нелинейная динамика и устойчивость движения простейшей модели скейтборда*. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при Механико-математическом ф-те МГУ. 2007. 104 с. <http://akule.pisem.net/Kuleshov.pdf>
- [2] Hubbard M. Lateral Dynamics and Stability of the Skateboard, *Journal of Applied Mechanics*, 1979, vol. 46, pp. 931–936.
- [3] Hubbard M. Human Control of the Skateboard, *Journal of Biomechanics*, 1980, vol. 13, pp. 745–754.
- [4] Лурье А. И. *Аналитическая механика*. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры, 1961.

- [5] Österling A. E. *MAS 3030. On the skateboard, kinematics and dynamics*, 2004. School of Mathematical Sciences, University of Exeter. United Kingdom.
<http://akule.pisem.net/theSkateboard.pdf>
- [6] Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения*, М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
- [7] Четаев Н. Г. *Устойчивость движения*, М.: Наука, 1990.
- [8] Walker G.T. On a curious dynamical property of celtis, *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, 1895, vol. 8, pt. 5, pp. 305–306.
- [9] Walker G. T. On a Dynamical Top, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1896, vol. 28, pp. 175–184.
- [10] Bondi H. The rigid body dynamics of unidirectional spin, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1986, vol. 405, pp. 265–274.
- [11] Garcia A. and Hubbard M. Spin reversal of the rattleback: theory and experiment, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1988, vol. 418, pp. 165–197.
- [12] Астапов И. С. Об устойчивости вращения кельтского камня, *Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика*, 1980, no. 2, с. 97–100.
- [13] Карапетян А. В. О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, *Прикладная математика и механика*, 1981, т. 45, вып. 5, с. 808–814.
- [14] Карапетян А. В. Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости, *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1985, no. 2, с. 19–24.
- [15] Карапетян А. В. *Устойчивость стационарных движений*, М.: Эдиториал УРСС, 1998.
- [16] Маркеев А. П. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости, *Прикладная математика и механика*, 1983, т. 47, вып. 4, с. 575–582.
- [17] Маркеев А. П. *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью*, М.: Наука, 1992.
- [18] Румянцев В. В. Об устойчивости движения неголономных систем, *Прикладная математика и механика*, 1967, т. 31, вып. 2, с. 260–271.
- [19] Румянцев В. В. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных, *Прикладная математика и механика*, 1971, т. 35, вып. 1, с. 138–143.
- [20] Румянцев В. В., Карапетян А. В. *Устойчивость движений неголономных систем. Итоги науки и техники. Общая механика*, т. 3, М.: ВИНТИ. 1976.
- [21] Козлов В. В. О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем, *ПММ*, 1987, т. 51, вып. 4, с. 538–545.
- [22] Раус Э. Дж. *Об устойчивости заданного состояния движения, в частности, установившегося движения*, М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [23] Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, *Acta Mathematica*, 1885, vol. 7, pp. 259–380.
- [24] Смейл С. Топология и механика, *Успехи математических наук*, 1972, т. 27, no. 2, с. 77–133.
- [25] Abraham R. and Marsden J. E. *Foundations of Mechanics*, 1978. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- [26] Zenkov D. V., Bloch A. M. and Marsden J. E. The energy-momentum method for the stability of non-holonomic systems, *Dynamics and Stability of Systems*, 1998, vol. 13, no. 2, pp. 123–165.
- [27] Брюно А. Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, М.: Наука. 1979.