

Геометрическое представление условий отрыва в системе с односторонней связью

А. П. Иванов

Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина
Россия 119991, г. Москва, ул. Малая Калужская, 1
E-mail: apivanov@orc.ru

Получено 24 августа 2008 г.

Рассматриваются системы с односторонней связью, допускающие в фазе контакта представление на фазовой плоскости. В этой плоскости строятся области, в которых выполнены условия сохранения контакта двух типов: 1) отрыв от связи при данных условиях невозможен; 2) знак нормальной реакции связи согласуется с ее односторонним характером. Эти два условия равносильны для идеальной связи [1, 2], а при наличии трения они могут различаться [3]. Безотрывным движениям соответствуют траектории, целиком лежащие в пересечении данных областей. Рассмотрены примеры круглого диска, движущегося по горизонтальной опоре с вязким трением, а также диска с острым краем на льду [4, 5].

Традиционно для проверки сохранения контакта применяется лишь второе из вышеуказанных условий, что может привести к ошибочным качественным выводам.

Ключевые слова: односторонняя связь, трение, условия отрыва

V. V. Ivanov

Geometric Representation of Detachment Conditions in Systems with Unilateral Constraints

Mechanical systems with unilateral constraints that can be represented in the contact mode on the phase plane are considered. On the phase plane we construct domains that satisfy the following conditions 1) a detachment from the constraint is impossible; 2) the sign of the constraint reaction corresponds to its unilateral character. These conditions are equivalent for an ideal constraint [1, 2], but they can differ in the presence of friction [3]. Trajectories without detachments belong to intersections of these domains. A circular disc moving on a horizontal support with viscous friction and a disc with the sharp edge moving on an icy surface [4, 5] are considered as examples.

Usually for the control of contact conservation one uses only the second condition from above, which can lead to invalid qualitative conclusions.

Keywords: unilateral constraint, friction, detachment conditions

Mathematical Subject Classifications: 70E18, 70G60

1. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы и геометрической односторонней связью

$$\Lambda(q) \geq 0, \quad q \in \mathbb{R}^2. \quad (1.1)$$

Система имеет два основных режима движения: при непрерывном контакте на некотором интервале времени выполнено равенство $\Lambda = 0$, а строгое неравенство $\Lambda > 0$ соответствует ослабленной связи (в этом случае ее наличие не влияет на движение). В фазе контакта порядок системы можно понизить, используя соотношения

$$\Lambda(q) = 0, \quad \dot{\Lambda}(q) = 0, \quad (1.2)$$

фазовым пространством полученной в результате такой редукции системы будем считать плоскость $(\theta, \dot{\theta})$, где обобщенная координата θ выбирается в координатном пространстве исходной системы по соображениям удобства.

Будем считать внешние силы не зависящими от времени, тогда фазовый портрет дает исчерпывающее представление о динамике в фазе контакта. Необходимым дополнением к этому портрету служат области безотрывного движения. При построении таких областей можно руководствоваться следующими двумя правилами.

1. Для точек $(\theta, \dot{\theta}) \in \Omega$ величина $\ddot{\Lambda}(q)$, вычисленная с учетом равенств (1.2) при нулевой реакции связи, отрицательна. Иными словами, в области Ω ослабление связи невозможно.
2. Область возможного безотрывного движения Ω_0 определяется условием, что нормальная реакция связи не обращается в нуль (т. е. сохраняет знак, согласующийся со знаком неравенства (1.1)).

В случае идеальной связи данные условия эквивалентны, т. е. $\Omega = \Omega_0$ [1, 2]. Примером применения метода фазовой плоскости в этом случае может служить задача о динамике связки спутников [6].

При наличии трения (включая абсолютную шероховатость) в общем случае $\Omega \neq \Omega_0$ [3]. При этом фазовое пространство разбивается на четыре части.

1. В точках $\Omega \cap \Omega_0$ контакт не прерывается.
2. В точках области $\bar{\Omega} \cap \bar{\Omega}_0$ (черта сверху означает алгебраическое дополнение) связь ослаблена.
3. Парадоксальная ситуация неединственности движения, когда отрыв возможен наряду с продолжением непрерывного контакта, соответствует точкам $\bar{\Omega} \cap \Omega_0$.
4. Другому парадоксу, когда невозможен ни один из этих типов движения, соответствует область $\Omega \cap \bar{\Omega}_0$.

ПРИМЕР 1. Тяжелый круглый неоднородный диск радиуса a движется в фиксированной вертикальной плоскости. На систему наложена идеальная двусторонняя связь: центр масс вынужден оставаться на фиксированной вертикальной прямой, а также неидеальная односторонняя связь, реализуемая в виде горизонтальной плоскости с вязким трением (рис. 1а). Введем инерциальную систему координат OXY с началом на опорной плоскости и осью ординат, проходящей через центр масс G . В качестве лагранжевых координат возьмем ординату центра

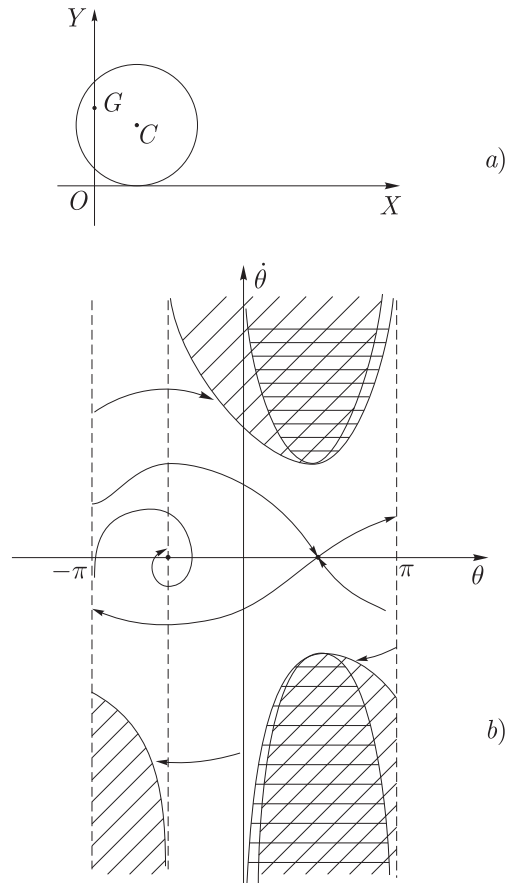


Рис. 1

масс y , а также угол θ между вектором CG (C — геометрический центр диска) и осью абсцисс. Связь (1.1) выражается неравенством

$$\Lambda = y - h(\theta) \geq 0, \quad h(\theta) = a + b \sin \theta, \quad b = |GC|. \quad (1.3)$$

Трение описывается формулой

$$F = -\mu\nu, \quad \nu = \dot{\theta}h(\theta), \quad (1.4)$$

где ν — скорость скольжения в точке контакта, μ — коэффициент вязкого трения.

Кинетическая и потенциальная энергия диска, движущегося в отрыве от опоры, имеют вид

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y} + \frac{1}{2}C\dot{\theta}^2, \quad \Pi = mgy, \quad (1.5)$$

а в фазе контакта в формуле (1.5) надо выразить y, \dot{y} через $\theta, \dot{\theta}$ при помощи соотношений (1.2), (1.3). Здесь m — масса тела, C — его момент инерции относительно оси GZ , перпендикулярной плоскости движения, g — ускорение свободного падения.

Уравнение движения тела в фазе контакта найдем по теореме об изменении кинетической энергии:

$$dT = -d\Pi + F\nu dt. \quad (1.6)$$

Подставляя в формулу (1.6) выражения (1.2)–(1.5), приходим к такому соотношению:

$$2(C + mh'^2)\ddot{\theta} + 2mh'h''\dot{\theta}^2 = -mgh' - \mu h^2\dot{\theta}, \quad (1.7)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по переменной θ .

Для построения областей Ω и Ω_0 вычислим вторую производную от функции (1.3):

$$\ddot{\Lambda} = \ddot{y} - h''\dot{\theta}^2 - h'\ddot{\theta}, \quad \ddot{y} = m^{-1}N - g, \quad (1.8)$$

где N — нормальная реакция опоры. При учете (1.7), формула (1.8) примет вид

$$\ddot{\Lambda} = \frac{1}{m}N + \frac{\mu h^2 h' \dot{\theta} - g(2C + mh'^2) - 2Ch''\dot{\theta}^2}{2(C + mh'^2)}. \quad (1.9)$$

Поскольку для односторонней связи $N \geq 0$, искомые области определяются следующими условиями:

$$\Omega: \quad -g(2C + mh'^2) - 2Ch''\dot{\theta}^2 < 0, \quad (1.10)$$

$$\Omega_0: \quad \mu h^2 h' \dot{\theta} - g(2C + mh'^2) - 2Ch''\dot{\theta}^2 < 0 \quad (1.11)$$

(формула (1.11) отличается от (1.10) учетом трения).

Сравнивая данные неравенства, замечаем, что в области фазовой плоскости, определяемой формулой

$$\dot{\theta} \cos \theta > 0, \quad (1.12)$$

из условия (1.11) следует (1.10), т. е. $\Omega_0 \subset \Omega$. При обратном знаке неравенства (1.12) выполняется противоположное включение, $\Omega \subset \Omega_0$. На рис. 1b область $\bar{\Omega}$ выделена горизонтальной штриховкой, а область $\bar{\Omega}_0$ — наклонной штриховкой. Различие между этими двумя множествами тем больше, чем больше коэффициент трения. Здесь же представлен фазовый портрет системы на развертке цилиндра $(\theta, \dot{\theta}) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$: положение равновесия $\theta = \pi/2$ является седлом, а точка $\theta = -\pi/2$ — устойчивым фокусом. По характеру взаиморасположения областей Ω и Ω_0 видно, что при непрерывном движении фазовая кривая может попасть в область $\Omega \cap \bar{\Omega}_0$, а в области $\bar{\Omega} \cap \Omega_0$ эта кривая может оказаться лишь в случае, когда начальная точка принадлежит этой области.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Разбиение фазового пространства при помощи областей Ω и Ω_0 сохраняет свое значение и для случая фазового пространства большей размерности, однако в случае фазовой плоскости исследование наиболее полно и наглядно.

Аналогичный метод применим и в случае, когда система имеет большее число степеней свободы, если движение в фазе контакта допускает представление на фазовой плоскости. Такая ситуация может возникнуть, если односторонняя связь накладывает дополнительные ограничения на движение. Ниже будет рассмотрена задача о движении тонкого диска на льду, в которой трение препятствует скольжению в направлении, перпендикулярном линии узлов.

2. Диск на гладкой опоре

Вначале определим вид области Ω в задаче о движении тяжелого тонкого однородного диска на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Введем системы координат: инерциальную $OXYZ$ с началом в опорной плоскости и осью OZ , направленной вертикально вверх, и связанную с телом $GX'Y'Z'$ с началом в его центре масс и осью симметрии GZ' . За обобщенные координаты примем координаты (x, y, z) точки G , а также углы Эйлера θ, ψ, φ .



Кинетическая и потенциальная энергии тела, а также односторонняя связь выражаются формулами

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2, \quad (2.1)$$

$$\Pi = mgz, \quad \Lambda = z - a \sin \theta \geq 0,$$

где m — масса диска, A и C — экваториальный и осевой моменты инерции.

Уравнения движения тела в отрыве от плоскости ($\Lambda > 0$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \quad q = (x, y, z, \theta, \psi, \varphi) \quad (2.2)$$

допускают следующие первые интегралы, отвечающие циклическим переменным:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = p_x, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = p_y, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = p_\psi, \quad (2.3)$$

а также интеграл энергии

$$h = T + \Pi = \text{const}. \quad (2.4)$$

В условиях непрерывного контакта диска с плоскостью ($\Lambda = 0$) на него действует нормальная реакция N , влияние которой можно учесть в системе (2.2), добавляя к правым частям уравнений по переменным z и θ подходящие слагаемые; при этом равенства (2.3), (2.4) остаются в силе. Это позволяет понизить порядок системы (2.2) при помощи метода Рауса. В результате такой редукции получим следующую консервативную систему с одной степенью свободы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} = -\tilde{\Pi}'(\theta), \quad (2.5)$$

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}(A + ma^2 \cos^2 \theta)\dot{\theta}^2, \quad \tilde{\Pi} = mga \sin \theta + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta}.$$

Найдем вторую производную от функции Λ в (2.1), определяющей наличие контакта:

$$\ddot{\Lambda} = U + VN = \frac{1}{m}N - g + a\dot{\theta}^2 \sin \theta - a\ddot{\theta} \cos \theta. \quad (2.6)$$

Для вычисления величины U в формуле (2.6) необходимо подставить в нее величину $\ddot{\theta}$, выраженную из уравнения (2.5) (к тому же результату приведет анализ уравнения (2.2) по переменной θ при учете интегралов (2.3)).

Условие сохранения контакта $\ddot{\Lambda} = 0, N \geq 0$ выражается неравенством

$$U = -g + a\dot{\theta}^2 \sin \theta + a\tau\tau' \cos \theta \leq 0, \quad (2.7)$$

$$\tau = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{A \sin \theta}, \quad \tau' = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{A \sin^2 \theta},$$

что эквивалентно соотношению

$$\dot{\theta}^2 \leq \Phi(\theta), \quad (2.8)$$

$$\Phi(\theta) = \frac{g}{a \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{A^2 \sin^4 \theta} (p_\varphi - p_\psi \cos \theta)(p_\psi - p_\varphi \cos \theta).$$

Неравенство (2.8) определяет на фазовой плоскости область $\Omega = \Omega_0$ возможных движений диска в контакте с плоскостью. Вид этой области зависит от числа и расположения корней уравнения $\Phi(\theta) = 0$, эквивалентного равенству

$$\kappa \sin^3 \theta = \cos \theta (\alpha - \cos \theta) (1 - \alpha \cos \theta),$$

$$\kappa = \frac{gA^2}{ap_M^2}, \quad \alpha = \frac{p_m}{p_M}, \quad (2.9)$$

где p_M обозначает то из чисел p_φ и p_ψ , которое имеет большую абсолютную величину, а p_m — второе число. Таким образом, $\alpha \leq 1$.

На рис. 2 представлено графическое решение уравнения (2.9); здесь $f_l(\theta)$ и $f_r(\theta)$ — выражения, стоящие в левой и правой части. В задаче имеется два параметра, определяющие взаимное расположение этих кривых.

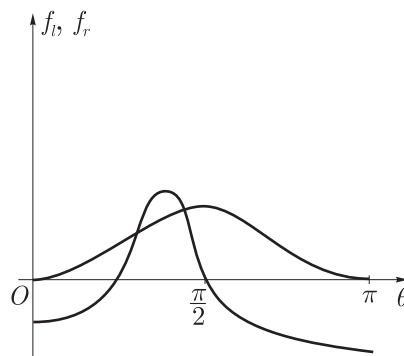


Рис. 2

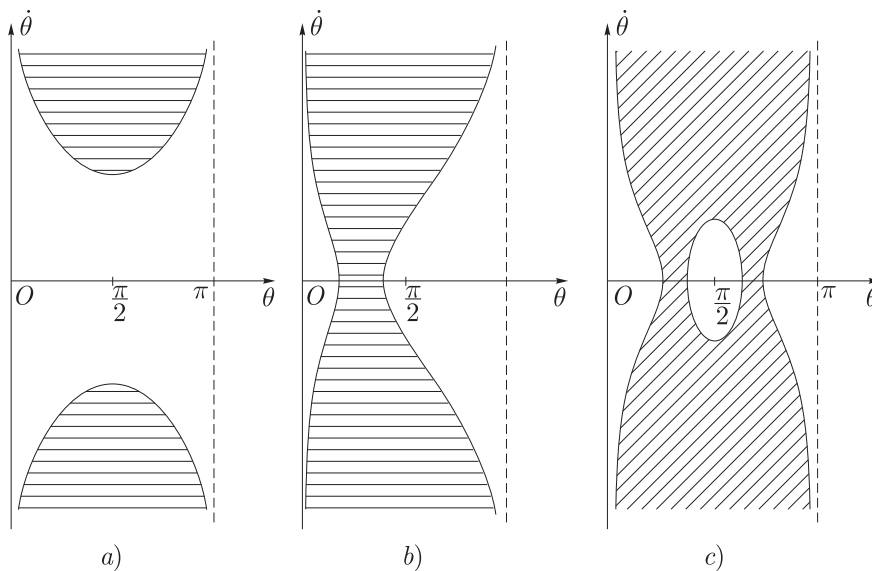


Рис. 3

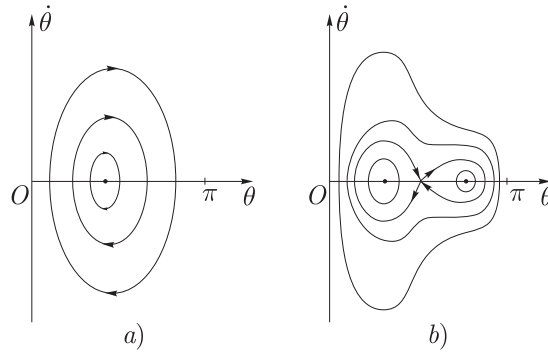


Рис. 4

1. В случае $\alpha = 0$, соответствующем соотношению $p_\varphi p_\psi = 0$, в формуле (2.9) $f_r(\theta) < 0$, поэтому $\Phi(\theta) > 0$ для всех $\theta \in (0, \pi)$. Область Ω изображена на рис. 3а.
2. Если $\alpha = 1$, т. е. $p_\varphi = p_\psi \neq 0$, то уравнение (2.9) после несложных преобразований примет вид

$$2\kappa = \mu(1 - \mu)(1 + \mu), \quad \mu = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (2.10)$$

Для значений $\kappa > \kappa_0 = \sqrt{3}/9$ уравнение (2.10) не имеет положительных корней; при этом $\Phi(\theta) > 0$ для всех $\theta \in (0, \pi)$, для всех $\theta \in (0, \pi)$, и область Ω качественно аналогична области на рис. 3а. В случае $\kappa < \kappa_0$ уравнение (2.10) имеет два положительных корня, в промежутке между которыми $\Phi(\theta) < 0$, т. е. $U > 0$ для всех $\dot{\theta}$. Область Ω имеет две компоненты (рис. 3б).

3. Для значений $\alpha \in (0, 1)$ область Ω в зависимости от значений κ имеет форму, представленную на рис. 3а или 3б.
4. Случай $\alpha < 0$ сводится к предыдущему путем замены $\theta \rightarrow \pi - \theta$. Для построения области Ω достаточно воспользоваться предыдущими графиками, отобразив их симметрично относительно прямой $\theta = \pi/2$.

Для исследования динамики диска достаточно теперь на фазовой плоскости построить линии уровня приведенной энергии

$$\tilde{T} + \tilde{\Pi} = \text{const}, \quad (2.11)$$

а также область Ω . Безотрывным движениям отвечают траектории, целиком лежащие в этой области. Узловыми точками фазового портрета служат стационарные точки функции $\tilde{\Pi}$, которые можно определить из уравнения

$$mga \cos \theta + A\tau\tau' = 0. \quad (2.12)$$

В зависимости от значений первых интегралов, уравнение (2.12) имеет один или три корня; соответствующие фазовые портреты имеют единственную особую точку типа центр (рис. 4а) либо седло и пару центров (рис. 4б) [7, 8]. При этом положения равновесия системы (2.5) (т. е. стационарные движения диска) всегда лежат в области Ω . Кроме того, в случае если эта область несвязна (рис. 3б), одно из равновесий обязательно лежит в левой ее компоненте, а два другие (если они существуют) — в правой компоненте.

Приведенный анализ относится к случаю $\alpha > 0$, результаты для противоположного случая можно получить по вышеприведенным соображениям симметрии.

3. Диск с острым краем на льду

В данном случае трение анизотропно: диск может свободно вращаться вокруг своей оси, а вектор скорости точки касания параллелен горизонтальному диаметру диска [4]. Данная система также обладает интегралами энергии (2.4) и момента (последние два соотношения (2.3)); кроме того, в ней имеется интеграл

$$v_x + \frac{a}{A} \left(p_\psi \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - p_\varphi \ln \sin \theta \right) = c_0, \quad (3.1)$$

где v_x — проекция вектора скорости центра диска на горизонтальный диаметр. Этот факт при учете наложенной кинематической связи позволяет понизить порядок системы; траектории на фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ лежат на кривых

$$(A + ma^2)\dot{\theta}^2 = 2h - 2mga \sin \theta - mv_x^2 - A\tau^2 - \frac{1}{C}p_\varphi^2, \quad (3.2)$$

представляющих собой линии уровня интеграла энергии.

Неравенство (2.7), означающее невозможность отрыва, включает помимо фазовых переменных лишь значения интегралов p_φ и p_ψ . Поэтому область Ω , задаваемая этим неравенством, имеет точно такой же вид, как и в случае гладкой плоскости (рис. 3а, б).

Для построения области Ω_0 вычислим вторую производную по времени от функции Λ , определенной в (2.1), при учете равенства (3.2). Дифференцируя это равенство и учитывая, что $v'_x = -a\tau$, получаем

$$(A + ma^2)\ddot{\theta} = -mga \cos \theta + mav_x\tau - A\tau\tau'. \quad (3.3)$$

Подставляя данное выражение в формулу (2.6), находим

$$\begin{aligned} \ddot{\Lambda} &= U_0 + V_0 N, \quad V_0 = m^{-1}, \\ U_0 &= -g + a\dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{a \cos \theta}{A + ma^2} (mga \cos \theta - mav_x\tau + A\tau\tau'). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Равенство $\ddot{\Lambda} = 0$ возможно для некоторого значения $N \geq 0$, если выполнено неравенство

$$a\dot{\theta}^2 \sin \theta \leq g - \frac{a \cos \theta}{A + ma^2} (mga \cos \theta - mav_x\tau + A\tau\tau'). \quad (3.5)$$

В отличие от условия (2.7), неравенство (3.5), определяющее область Ω_0 , вследствие (3.1) включает также произвольную константу c_0 . При изменении c_0 изменяется как фазовый портрет системы (3.2), так и вид области Ω_0 . Неизменными остаются лишь граничные точки этой области при $\theta = \pi/2$, а также наличие у этой области вертикальных асимптот при $\theta \rightarrow +0$ и при $\theta \rightarrow \pi - 0$. Как нетрудно заметить, правая часть неравенства (3.5) линейна по c_0 . Следовательно, для любых значений p_φ и p_ψ , не равных нулю одновременно, и для всякой точки фазовой плоскости, для которой $\theta \neq 0, \pi/2, \pi$, можно указать значения c_0 , для которых область Ω_0 содержит (или не содержит) эту точку. В зависимости от значений интегралов, область Ω_0 имеет вид, изображенный на рис. 3а, б или с.

Отметим, что, как и в случае гладкой опоры, система обладает симметрией: при замене $p_\psi \rightarrow -p_\psi, \theta \rightarrow \pi - \theta$ уравнения движения, а также уравнения областей Ω и Ω_0 не изменяются (механический смысл такой замены состоит в перемене ориентации оси OZ). Поэтому можно ограничиться анализом случая $p_\varphi \geq 0, p_\psi \geq 0$. Рассмотрим некоторые подслучаи.

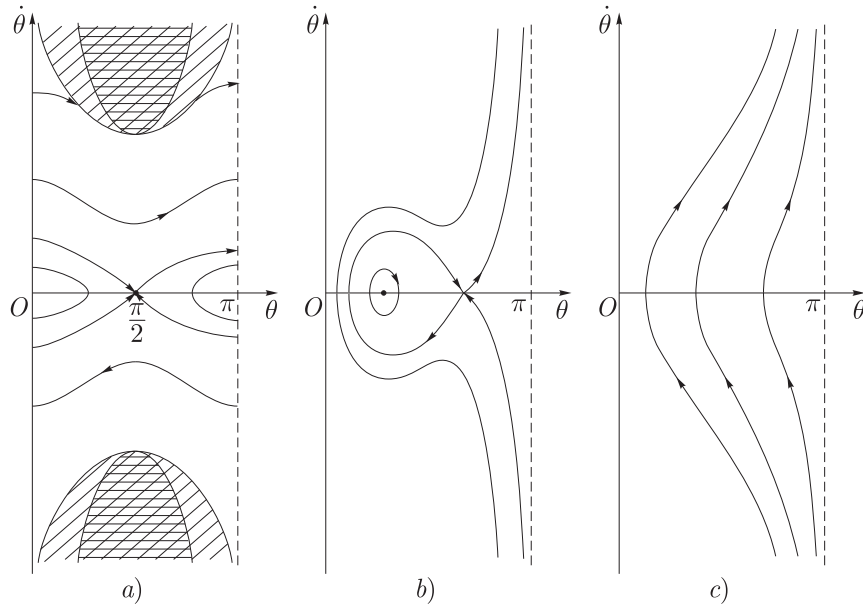


Рис. 5

1. Если $p_\psi = p_\varphi = 0$, имеем также $\tau = 0$, при этом правая часть в формуле (3.5) не зависит от c_0 . Сравнение неравенств (2.8) и (3.5) показывает, что $\Omega_0 \subset \Omega$. В уравнении (3.2) $v_x = \text{const}$, поэтому система динамически эквивалентна перевернутому маятнику. Фазовый портрет изображен на рис. 5а.
2. Если $p_\psi = p_\varphi \neq 0$, то в зависимости от величины c_0 система (3.2) может иметь два положения равновесия или не иметь их вовсе. Соответствующие фазовые портреты представлены на рис. 5б, с. Отметим, что положения равновесия необходимо лежат в области Ω_0 , но могут не принадлежать Ω . В такой ситуации возникает неединственность движения, т. е. наряду с равновесием (соответствующим стационарному движению тела) возможен отрыв диска от опоры.
3. В случае $p_\psi \neq p_\varphi$ все фазовые траектории системы (3.2) ограничены; примерные фазовые портреты представлены на рис. 4. Как и в предыдущем случае, все положения равновесия необходимо лежат в области Ω_0 , но могут не принадлежать Ω .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-01-00718. Автор благодарит А.В. Борисова и участников семинара по нелинейной динамике за идею работы и обсуждение.

Список литературы

- [1] Козлов, В.В., Дерябин, М.В., К теории систем с односторонними связями, *Прикл. мат. мех.*, 1995, т. 59, № 4, с. 531–539.
- [2] Дерябин, М.В., Общие принципы динамики и теория односторонних связей, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ.*, 1998, № 1, с. 53–59.

- [3] Ivanov, A.P., On Detachment Conditions in the Problem on the Motion of a Rigid Body on a Rough Plane, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 4, pp. 355–368.
- [4] Козлов, В.В., Колесников, Н.Н., О теоремах динамики, *Прикл. мат. мех.*, 1978, т. 42, № 1, с. 28–33.
- [5] Борисов, А.В., Мамаев, И.С., Интегрируемая система с неинтегрируемой связью, *Мат. зам.*, 2006, т. 80, № 1, с. 131–134.
- [6] Белецкий, В.В., Новикова, Е.Т., Об относительном движении связки двух тел на орбите, *Космич. ис-след.*, 1969, т. 7, № 3, с. 377–384.
- [7] Маркеев, А.П., *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью*, М.: Наука, 1992, 336 с.
- [8] Маркеев, А.П., Мощук, Н.К., Качественный анализ движения тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости, *Прикл. мат. мех.*, 1983, т. 47, № 1, с. 37–42.