

## Обтекание двух сфер нестационарным потоком вязкой жидкости

**Н. И. Коновалова, С. И. Мартынов**

Кафедра математики и теоретической механики,  
Мордовский государственный университет,  
Россия, 430000, г. Саранск, ул. Большевикская, 68.

Кафедра прикладной математики и информатики  
в геологии и нефтегазовом деле,  
Югорский государственный университет,  
Россия, 628012, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 16.  
E-mails: konovalovani@rambler.ru, martynovsi@mail.ru

*Получено 29 января 2008 г.*

Рассматривается обтекание двух сферических частиц потоком вязкой жидкости, скорость которой далеко от частиц есть однородная функция координат периодическая по времени. Учитывается гидродинамическое взаимодействие частиц и их движение под действием сил и моментов со стороны жидкости. Получено асимптотически приближенное решение. Вычислены силы и моменты, действующие на частицы со стороны жидкости. Проведен анализ возможности получения усредненных выражений для силы и момента, действующих на частицы в смеси в нестационарном потоке, с точностью до слагаемых степени выше первой по объемной концентрации частиц. Дается общая форма записи решения задачи об обтекании конечного числа частиц нестационарным потоком вязкой жидкости.

Ключевые слова: вязкая жидкость, сферы, нестационарность, взаимодействие, общее решение.

### **N. I. Konovalova and S. I. Martynov** **Non-stationary viscous flow around of two spheres**

The problem of non-stationary viscous flow around of two spheres is considered. Hydrodynamic interaction of particles taken into account. The solution of problem was obtained in terms of small parameter. The forces and torques exerting on spheres was calculated. Results was used for analysis of possibility to obtain the expressions for average force and torque in mixture in terms of volume concentration of high degree. The general solution of problem for viscous flow around more than two spheres is given.

Keywords: non-stationary viscous flow, two spheres, hydrodynamic interaction, general solution.  
Mathematical Subject Classifications 2000: 76D07, 74F20

## 1. Введение

В последние годы все больший интерес представляет моделирование динамики системы жидкость-частицы. Это связано как с многочисленными приложениями, в которых требуется применение таких моделей, так и с возросшими возможностями компьютерных технологий, позволяющими дальше развивать численные методы моделирования. Одна из задач, возникающих при моделировании таких сред, это определение сил и моментов, действующих на частицы со стороны жидкости. Интерес к этой тематике связан и с теоретическими проблемами построения моделей на основе получения зависимости средних параметров системы, в том числе сил и моментов, действующих со стороны жидкости на частицы, от объемной концентрации частиц в степени выше первой [1, 2].

Вопрос о том, можно ли получить выражения для такого рода сил путем усреднения выражений, полученных из решения задач о двух или нескольких взаимодействующих частиц как в стационарных, так и нестационарных потоках, один из актуальных в проблеме построения моделей многофазных сред. Так известно [3], что для стационарных течений в приближении Стокса и Озеена скорость затухает на бесконечности как  $X^{-1}$ , где  $X$  — расстояние от центра частицы до точки, в которой определяется скорость. Для стационарного течения Навье-Стокса оценки дают асимптотику в виде  $X^{-k}$ , где  $k \leq 2$ . Таким образом, из этих оценок видно, что простое суммирование возмущений от каждой частицы приводит к расходящимся рядам для большого числа частиц и получить средние выражения для сил не представляется возможным. В работах [4, 5] показано, что решение задачи о гидродинамическом взаимодействии частиц в принципе нельзя свести к сумме решений задач о парных взаимодействиях этих частиц. Это связано с тем, что хотя уравнения и граничные условия линейные, однако, граничные условия для скорости жидкости на поверхности каждой частицы являются интегральными в том смысле, что описывают суммарный вклад от гидродинамического взаимодействия выделенной частицы со всеми остальными. Это означает, что для получения общего решения необходимо учитывать вклад каждой частицы. С учетом того, что для реальных систем жидкость-частицы таких, как, например, суспензии, число частиц в единице объема смеси имеет порядок  $10^{12}$ – $10^{18}$ , то возникает принципиальный вопрос о возможности получить как решение задачи о гидродинамическом взаимодействии частиц, так и усредненные уравнения движения системы жидкость-частицы.

Для стационарных и квазистационарных потоков в работах [4, 5, 6] развит метод, позволяющий учитывать гидродинамическое взаимодействие произвольного конечного числа частиц в потоках, скорость которых далеко от частиц есть полином произвольной степени от координат. Метод основан на представлении решения задачи в виде мультипольного разложения с тензорными коэффициентами. Метод не требует больших вычислительных затрат (все числовые значения параметров могут быть найдены на персональном компьютере с хорошей точностью) и реализуется в любой проблемно-ориентированной системе например, Mathematica. На его основе в работах [7, 8] разработаны и программно реализованы методы по расчету взаимодействий большого числа частиц в облаке и бесконечного числа частиц в периодической решетке произвольной симметрии. Результаты работы [7] свидетельствуют, что динамика частиц в облаке имеет сложный характер: скорость частиц внутри облака больше, чем на его краю. Это приводит к относительному движению частиц внутри облака и его деформации в результате гидродинамического взаимодействия. Однако средние кинематические характеристики частиц в облаке таковы, что они практически не зависят от конфигурации облака, а их зависимость от числа взаимодействующих частиц такова, что асимптотические значения достигаются уже при учете только, примерно, 300–400 взаимодействующих частиц. Это означает, что для корректного учета вклада взаимодействия частиц в выражения для средних характеристик смеси оказывается достаточ-

ным учитывать вклад не всех частиц, а только части, причем учитываемых число частиц имеет разумные для численного счета значения. В работе [8] найдены усредненные по объему смеси уравнения движения смеси, нелинейно зависящие от объемной концентрации частиц.

Нестационарные процессы играют важную роль в динамике системы жидкость-частицы [9, 10]. При их моделировании необходимо учитывать нестационарные слагаемые в уравнениях движения вязкой жидкости. Для одиночной сферы решение задачи в приближении малых чисел Рейнольдса приведено в [11]. Учет гидродинамического взаимодействия  $n$  частиц значительно усложняет задачу. Имеются различные подходы к решению такого рода задач [12, 13, 14], в которых, в том числе, рассматривается влияние нестационарности на коэффициенты в выражениях для присоединенных масс, сил вязкого сопротивления и Бассэ для эмульсии.

Между тем, подход аналогичный тому, что использован в работах [4, 5, 6] может быть применен и для решения задачи нестационарного обтекания большого числа частиц в приближении малых чисел Рейнольдса. При этом, в силу линейности уравнений, решение задачи об обтекании  $n$  частиц так же, как и в стационарном случае можно представить, как сумму возмущений от каждой частицы при наличии остальных, где суммирование берется по всем частицам из заданной конфигурации.

В силу сказанного выше представляет интерес рассмотреть задачу о взаимодействии двух частиц в нестационарном потоке и исследовать влияние гидродинамического взаимодействия как на асимптотику возмущений вдали от частиц, так и на динамику самих частиц в результате взаимодействия в потоке и возможности образования устойчивой структуры из частиц. Решение задачи позволяет найти силы и моменты, действующие на частицы со стороны жидкости, и провести анализ возможности получения прямым усредненных выражений для сил и моментов, действующих в системе жидкость-частицы, с точностью до слагаемых по объемной концентрации частиц в степени выше первой. Кроме того, решение этой задачи дает способ представления решения задачи для случая произвольного конечного числа частиц. Ниже дается постановка задачи и асимптотическое решение для частиц одинакового радиуса.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим две твердые сферические частицы  $A$  и  $B$  одинакового радиуса  $a$ , помещенные в неограниченную несжимаемую жидкость плотности  $\rho$  и вязкости  $\eta$ . Положение точки жидкости относительно центров сфер  $A$  и  $B$  будем обозначать векторами  $\mathbf{X}^a$  и  $\mathbf{X}^b$  соответственно. Для введенных векторов имеем соотношение:

$$\mathbf{X}^b = \mathbf{X}^a - \mathbf{r},$$

здесь вектор  $\mathbf{r}$  разделяет центры двух сфер. Скорость жидкости  $\mathbf{U}$  на бесконечности есть зависящая от времени однородная функция

$$U_j(t) = U_{0j} \exp(-I\omega t).$$

Здесь  $I^2 = -1$ . Считаем, что распределение скорости  $\mathbf{u}$  и давления  $p$  в жидкости описывается уравнениями

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}. \quad (2.1)$$

На поверхности частиц  $A$  и  $B$  должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} U_j + u_j &= V_j^a + \Gamma_{jk}^a x_k^a, \quad X^a = a; \\ U_j + u_j &= V_j^b + \Gamma_{jk}^b x_k^b, \quad X^b = a. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далеко от частиц имеет место затухание возмущений

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0, \quad |\mathbf{X}| \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Здесь векторами  $\mathbf{V}^a$ ,  $\mathbf{V}^b$  обозначены абсолютные линейные скорости сфер  $A$  и  $B$ , приобретаемые ими в результате взаимодействия с потоком и между собой,  $\Gamma_{jk}^a$ ,  $\Gamma_{jk}^b$  — тензоры угловых скоростей сфер,  $p_0$  — невозмущенное давление в жидкости, удовлетворяющее соотношению

$$\rho \frac{\partial U_j}{\partial t} = - \frac{\partial p_0}{\partial x_j}. \quad (2.4)$$

Линейные и угловые скорости сфер есть неизвестные функции, зависящие от векторов  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{r}$  и параметров  $a/r$ ,  $\eta/\rho\omega$ . Для их определения необходимо составить уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^a &= m_a \frac{d\mathbf{V}^a}{dt}, \quad \mathbf{F}^b = m_b \frac{d\mathbf{V}^b}{dt}; \\ \mathbf{T}^a &= J_a \frac{d\boldsymbol{\Omega}^a}{dt}, \quad \mathbf{T}^b = J_b \frac{d\boldsymbol{\Omega}^b}{dt}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь  $\mathbf{F}^a, \mathbf{F}^b$  — силы, действующие на частицы, а  $\mathbf{T}^a, \mathbf{T}^b$  — моменты сил,  $m_a, m_b, J_a, J_b$  — массы и моменты инерции частиц соответственно,  $\boldsymbol{\Omega}^a, \boldsymbol{\Omega}^b$  — угловые скорости сфер, равные

$$\Omega_i^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Gamma_{jk}^a, \quad \Omega_i^b = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Gamma_{jk}^b.$$

Здесь  $\epsilon_{ijk}$  — тензор Леви-Чивиты.

В силу линейности задачи и граничных условий решение уравнений (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3) можно представить в виде суммы решений двух задач.

Первая задача заключается в нахождении решения уравнений (2.1) со следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} u_j &= V_j^a - U_j, \quad X^a = a, \\ u_i &= V_i^b - U_i, \quad X^b = a. \end{aligned} \quad (2.6)$$

На бесконечности по-прежнему должны выполняться условия (2.3). Фактически первая задача о нестационарном поступательном движении сфер.

Вторая задача заключается в нахождении решения уравнений (2.1) со следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} u_j &= \Gamma_{jk}^a x_k^a, \quad X^a = a, \\ u_i &= \Gamma_{jk}^b x_k^b, \quad X^b = a. \end{aligned} \quad (2.7)$$

На бесконечности по-прежнему должны выполняться условия (2.3). Таким образом вторая задача — о вращении сфер с нестационарными угловыми скоростями.

### 3. Решение первой задачи

Из первого уравнения системы (2.1) следует, что

$$\mathbf{u} = \text{rot} \mathbf{A}$$

Вектор  $\mathbf{A}$  определяется аналогично работе [4] с той только разницей, что в задаче есть два выделенных направления: вектор  $\mathbf{V} - \mathbf{U}$  и вектор  $\mathbf{r}$ . Поэтому в общем виде выражение для вектора  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$\mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{W}, \quad W_i = \psi_0 M_i + \psi_j N_{ih} + \psi_{hj} P_{ihj} + \psi_{hjl} Q_{ihjl} + \dots \quad (3.1)$$

Здесь  $\psi_0$  решение уравнения [2]

$$\Delta^2 \psi_0 + \frac{I\omega}{\nu} \Delta \psi_0 = 0, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (3.2)$$

Вводя обозначение  $\Delta \psi_0 = \varphi$  получим уравнение

$$\Delta \varphi + \frac{I\omega}{\nu} \varphi = 0.$$

Решение этого уравнения для одиночной частицы имеет вид [4]

$$\varphi = SL_0 \exp(Ikx), \quad L_0 = \frac{1}{X}, \quad k = \frac{1+I}{\delta}, \quad \delta = \left( \frac{2\eta}{\nu} \right)^{1/2}.$$

Параметр  $\delta$  имеет смысл толщины вихревого слоя вокруг частицы [4].

Для получения выражения вектора  $\mathbf{W}$  необходимо учесть, что все частные производные от полученного выражения функции  $\psi_0$  тоже есть решение уравнения (3.2). Другими словами в общем случае для функции  $\psi_{ij\dots h}$  получаем уравнение

$$\Delta \psi_{ij\dots h} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_h} (L_0 \exp(Ikx)) \right) \right) \right). \quad (3.3)$$

Неизвестные тензорные коэффициенты  $M_i, N_{ih}, \dots$  — линейно зависят от скорости, в силу линейности уравнений и граничных условий по этой величине, от вектора  $r_s$  и находятся так же, как в работах [5–7].

Для первой задачи тензорные коэффициенты записываются в виде

$$\begin{aligned} M_i &= v_i^{\parallel} M^{\parallel} + v_i^{\perp} M^{\perp}, \\ N_{ih} &= N^{\parallel} v_i^{\parallel} r_h + N^{\perp} v_i^{\perp} r_h + N_1^{\perp} v_h^{\perp} r_i, \\ P_{ihj} &= P^{\parallel} v_i^{\parallel} r_j r_h + P^{\perp} v_i^{\perp} r_j r_h + P_1^{\perp} (v_h^{\perp} r_i r_j + v_j^{\perp} r_i r_h), \\ Q_{ihjl} &= Q^{\parallel} v_i^{\parallel} r_h r_j r_l + Q^{\perp} v_i^{\perp} r_h r_j r_l + Q_1^{\perp} (v_h^{\perp} r_i r_j r_l + \\ &+ v_j^{\perp} r_h r_i r_l + v_l^{\perp} r_i r_j r_h). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь  $v_i^{\parallel}, v_i^{\perp}$  — компоненты вектора скорости  $v_i = V_i - U_i$  вдоль и перпендикулярно вектору  $\mathbf{r}$ ;  $M^{\parallel}, M^{\perp}, N^{\parallel}, N^{\perp}, N_1^{\perp}, \dots$  — неизвестные скалярные коэффициенты, которые находятся из граничных условий.

Найдем частное решение уравнения (3.3) для различных случаев правой части.

Рассмотрим случай функции  $f_0$ . Уравнение принимает вид

$$\Delta\psi_0 = SL_0 \exp(Ikx).$$

Частное решение ищем в виде

$$\psi_0 = mSL_0 \exp(Ikx).$$

После подстановки в уравнение получаем, что  $m = -1/k^2$ .

Рассмотрим случай функции  $\psi_j$ .

$$\Delta\psi_j = (L_j + IkL_0 \frac{x_j}{X}) \exp(Ikx).$$

Частное решение ищем в виде

$$\psi_j = m(L_j + IkL_0 \frac{x_j}{X}) \exp(Ikx).$$

После подстановки получаем, что  $m = -1/k^2$ .

Аналогично решаются и другие уравнения. Общее решение для  $\psi_{ij\dots h}$  записывается в виде

$$\psi_{ij\dots h} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_h} (L_0 \exp(Ikx)) \right) \right) \right) + CL_{ij\dots h}$$

Если имеем две частицы, то решение должно содержать мультиполи двух типов

$$L_{ij\dots h}^a = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_h} \left( \frac{1}{X^a} \right) \right) \right) \right),$$

$$L_{ij\dots h}^b = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_h} \left( \frac{1}{X^b} \right) \right) \right) \right).$$

Поэтому в нашем случае получаем

$$\begin{aligned} W_i = & -\frac{1}{k^2} M_i [L_0^a \exp(IkX^a) + L_0^b \exp(IkX^b)] - \frac{1}{k^2} N_{ij} [(L_j^a + \\ & + IkL_0^a \frac{x_j^a}{X^a}) \exp(IkX^a) - (L_j^b + IkL_0^b \frac{x_j^b}{X^b}) \exp(IkX^b)] - \dots + \\ & + C_i (L_0^a + L_0^b) + D_{ih} (L_h^a - L_h^b) + F_{ihj} (L_{hj}^a + L_{hj}^b) + \\ & + G_{ihjl} (L_{hjl}^a - L_{hjl}^b) + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Коэффициенты  $C_i, D_{ih}, F_{ihj}, G_{ihjl}$  имеют структуру, аналогичную (3.4)

$$\begin{aligned} C_i &= v_i^{\parallel} C^{\parallel} + v_i^{\perp} C^{\perp}, \\ D_{ih} &= D^{\parallel} v_i^{\parallel} r_h + D^{\perp} v_i^{\perp} r_h + D_1^{\perp} v_h^{\perp} r_i, \\ F_{ihj} &= F^{\parallel} v_i^{\parallel} r_j r_h + F^{\perp} v_i^{\perp} r_j r_h + F_1^{\perp} (v_h^{\perp} r_i r_j + v_j^{\perp} r_i r_h), \\ G_{ihjl} &= G^{\parallel} v_i^{\parallel} r_h r_j r_l + G^{\perp} v_i^{\perp} r_h r_j r_l + G_1^{\perp} (v_h^{\perp} r_i r_j r_l \\ &+ v_j^{\perp} r_h r_i r_l + v_l^{\perp} r_i r_j r_h). \end{aligned}$$

Знаки мультиполей в выражении (3.5) выбираются исходя из того, что скорость жидкости  $\mathbf{u}$  должна быть четной функцией координат (это следует из граничных условий, как в [5]). Нетрудно показать, что скорость и давление жидкости находится следующим образом

$$\mathbf{u} = \nabla(\nabla\mathbf{W}) - \Delta\mathbf{W}. \quad (3.6)$$

$$p = \eta\nabla\left(\frac{I\omega}{\nu}\mathbf{W} + \Delta\mathbf{W}\right). \quad (3.7)$$

Неизвестные тензорные коэффициенты находятся из граничных условий для скорости на поверхности одной из частиц. Условия на поверхности другой выполняются автоматически.

В задаче имеется три безразмерных параметра, связывающие размеры частиц  $a$ , расстояние между ними  $R$  и толщину вихревого слоя  $\delta$ :

$$\lambda = \frac{a}{\delta}, \quad \beta = \frac{R}{\delta}, \quad \varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Причем только два из них можно считать независимыми, так как между ними есть связь  $\varepsilon = \lambda/\beta$ . В рассматриваемой задаче этими параметрами являются  $\varepsilon$  и  $\beta$ , при этом рассматривается случай, когда  $\varepsilon \ll 1$  и  $\beta > 0$ . Случай  $\beta \rightarrow 0$  соответствует известному обтеканию частиц стационарным однородным потоком вязкой жидкости [5]. Выбор параметра  $\beta$  в качестве независимого связан с удобством вычислений. В настоящей работе неизвестные скалярные коэффициенты находятся методом разложения в ряды по малому параметру  $\varepsilon$  с точностью до  $\varepsilon^4$ . В общем виде скалярные коэффициенты представляются следующим образом (во всех выражениях приведены только разложения с отличными от нуля коэффициентами)

$$\begin{aligned} M^{\parallel} &= M_0^{\parallel} + M_1^{\parallel}\varepsilon + M_2^{\parallel}\varepsilon^2 + M_3^{\parallel}\varepsilon^3 + M_4^{\parallel}\varepsilon^4, \\ M^{\perp} &= M_0^{\perp} + M_1^{\perp}\varepsilon + M_2^{\perp}\varepsilon^2 + M_3^{\perp}\varepsilon^3 + M_4^{\perp}\varepsilon^4, \\ C^{\parallel} &= C_0^{\parallel} + C_1^{\parallel}\varepsilon + C_2^{\parallel}\varepsilon^2 + C_3^{\parallel}\varepsilon^3 + C_4^{\parallel}\varepsilon^4, \\ C^{\perp} &= C_0^{\perp} + C_1^{\perp}\varepsilon + C_2^{\perp}\varepsilon^2 + C_3^{\perp}\varepsilon^3 + C_4^{\perp}\varepsilon^4, \\ N^{\parallel} &= N_3^{\parallel}\varepsilon^3 + N_4^{\parallel}\varepsilon^4 + N_5^{\parallel}\varepsilon^5, \quad N^{\perp} = N_3^{\perp}\varepsilon^3 + N_4^{\perp}\varepsilon^4 + N_5^{\perp}\varepsilon^5, \\ N_1^{\perp} &= N_{1,3}^{\perp}\varepsilon^3 + N_{1,4}^{\perp}\varepsilon^4 + N_{1,5}^{\perp}\varepsilon^5, \quad D^{\perp} = D_3^{\perp}\varepsilon^3 + D_4^{\perp}\varepsilon^4 + D_5^{\perp}\varepsilon^5, \\ P^{\parallel} &= P_5^{\parallel}\varepsilon^5 + P_6^{\parallel}\varepsilon^6, \quad P^{\perp} = P_5^{\perp}\varepsilon^5 + P_6^{\perp}\varepsilon^6, \quad P_1^{\perp} = P_{1,5}^{\perp}\varepsilon^5 + P_{1,6}^{\perp}\varepsilon^6, \\ F^{\parallel} &= F_5^{\parallel}\varepsilon^5 + F_6^{\parallel}\varepsilon^6, \quad F^{\perp} = F_5^{\perp}\varepsilon^5 + F_6^{\perp}\varepsilon^6, \quad F_1^{\perp} = F_{1,5}^{\perp}\varepsilon^5 + F_{1,6}^{\perp}\varepsilon^6, \\ Q^{\parallel} &= Q_7^{\parallel}\varepsilon^7, \quad Q^{\perp} = Q_7^{\perp}\varepsilon^7, \quad Q_1^{\perp} = Q_{1,7}^{\perp}\varepsilon^7, \\ G^{\parallel} &= G_7^{\parallel}\varepsilon^7, \quad G^{\perp} = G_7^{\perp}\varepsilon^7, \quad G_1^{\perp} = G_{1,7}^{\perp}\varepsilon^7. \end{aligned}$$

Для проведения вычислений была разработана программа в системе Mathematica, позволяющая работать с тензорами и получать решение в символьном виде. Результаты вычислений следующие (в силу ограниченности места и громоздкости коэффициентов ниже приводятся выражения для части из них).

### 1. Невзаимодействующие сферы

Для не взаимодействующих сфер (случай  $\varepsilon = 0$ ) получаем следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} M_0^{\parallel} &= -\frac{3}{2}a \exp(-IAk), \quad M_0^{\perp} = -\frac{3}{2}a \exp(-IAk), \\ C_0^{\parallel} &= \frac{a(-3 + 3IAk + A^2k^2)}{2k^2}, \quad C_0^{\perp} = -\frac{3a - 3IA^2k - a^3k^2}{2k^2}. \end{aligned}$$

Решение с такими коэффициентами соответствует хорошо известному распределению скорости и давления вокруг одиночной сферы,двигающейся поступательно с переменной скоростью в вязкой жидкости [11].

### 2. Взаимодействие порядка $\varepsilon$

Следующий шаг дает порядок  $\varepsilon$  только для взаимодействия в результате движения с линейными скоростями.

$$M_1^{\parallel} = -\frac{9a\exp(-2Iak - (1 - I)\beta)(I + (1 + I)\beta)}{4\beta^2},$$

$$M_1^{\perp} = \frac{9a\exp(-2Iak + I(1 + I)\beta)(-1 + I(1 + I)\beta + (1 + I)^2\beta^2)}{4(1 + I)^2\beta^2},$$

$$C_1^{\parallel} = \frac{3Ia\exp(-Iak - (1 - I)\beta)(-3 + 3Iak + a^2k^2)(1 + (1 - I)\beta)}{4k^2\beta^2},$$

$$C_1^{\perp} = -\frac{3a\exp(-Iak + I(1 + I)\beta)(-3 + 3Iak + a^2k^2)(-1 + I(1 + I)\beta + (1 + I)^2\beta^2)}{4(1 + I)^2k^2\beta^2}.$$

### 3. Взаимодействие порядка $\varepsilon^2$

Для взаимодействия порядка  $\varepsilon^2$  получаем следующие значения коэффициентов в разложениях скалярных функций:

$$M_2^{\parallel} = -\frac{27a\exp(-3Iak - (2 - 2I)\beta)(I + (1 + I)\beta)^2}{8\beta^4},$$

$$M_2^{\perp} = -\frac{27a(-3Iak + 2I(1 + I)\beta)(-1 + I(1 + I)\beta + (1 + I)^2\beta^2)^2}{8(1 + I)^4\beta^4},$$

$$C_2^{\parallel} = \frac{9a\exp(-2Iak - (2 - 2I)\beta)(-3 + 3Iak + a^2k^2)(I + (1 + I)\beta)^2}{8k^2\beta^4},$$

$$C_2^{\perp} = \frac{9a\exp(-2Iak + 2I(1 + I)\beta)(-3 + 3Iak + a^2k^2)(-1 + I(1 + I)\beta + (1 + I)^2\beta^2)^2}{8(1 + I)^4k^2\beta^4}.$$

### 4. Взаимодействие порядка $\varepsilon^3$

Учет взаимодействия третьего порядка по параметру  $\varepsilon$  дает ненулевые значения следующих коэффициентов для скалярных функций:  $M_3^{\parallel}$ ,  $M_3^{\perp}$ ,  $C_3^{\parallel}$ ,  $C_3^{\perp}$ ,  $N_3^{\parallel}$ ,  $N_3^{\perp}$ ,  $N_{1,3}^{\perp}$ ,  $D_3^{\parallel}$ ,  $D_3^{\perp}$ ,  $P_5^{\parallel}$ ,  $P_5^{\perp}$ ,  $P_{1,5}^{\perp}$ ,



$F_5^{\parallel}, F_5^{\perp}, F_{1,5}^{\perp}$ . Некоторые из них приведены ниже.

$$N_3^{\parallel} = \frac{15Ia \exp(-2Iak - (1-I)\beta) (-3 - (3-3I)\beta + 2I\beta^2)}{4(-1+Iak)\beta^2},$$

$$N_3^{\perp} = -\frac{a \exp(-2Iak + I(1+I)\beta)}{2(1+I)^2(I+ak)\beta^2} (-15I - 15(1+I)\beta + 9I(1+I)^2\beta^2 + 4(1+I)^3\beta^3),$$

$$N_{1,3}^{\perp} = -\frac{a \exp(-2Iak + I(1+I)\beta)}{2(1+I)^2(I+ak)\beta^2} (-15I - 15(1+I)\beta + 9I(1+I)^2\beta^2 + 4(1+I)^3\beta^3),$$

$$D_3^{\parallel} = \frac{Ia \exp(-Iak - (1-I)\beta)}{4k^2(I+ak)\beta^2} (-15I - 15ak + 6Ia^2k^2 + a^3k^3) (-3 - (3-3I)\beta + 2I\beta^2),$$

$$D_3^{\perp} = \frac{a \exp(-Iak + I(1+I)\beta)}{12(1+I)^2k^2(I+ak)\beta^2} (-15 + 15Iak + 6a^2k^2 - Ia^3k^3) (-6I - 6(1+I)\beta + 3I(1+I)^2\beta^2 + (1+I)^3\beta^3),$$

#### 5. Взаимодействие порядка $\varepsilon^4$

Учет взаимодействия четвертого порядка по параметру  $\varepsilon$  дает ненулевые значения следующих коэффициентов  $M_4^{\parallel}, M_4^{\perp}, C_4^{\parallel}, C_4^{\perp}, N_4^{\parallel}, N_4^{\perp}, N_{1,4}^{\perp}, D_4^{\parallel}, D_4^{\perp}, P_6^{\parallel}, P_6^{\perp}, P_{1,6}^{\perp}, F_6^{\parallel}, F_6^{\perp}, F_{1,6}^{\perp}, Q_7^{\parallel}, Q_7^{\perp}, Q_{1,7}^{\perp}, G_7^{\parallel}, G_7^{\perp}, G_{1,7}^{\perp}$  для скалярных функций:

$$P_6^{\perp} = \frac{-9a \exp(-3Iak + 2I(1+I)\beta)}{(32(1+I)^4(-3+3Iak+A^2k^2)\beta^4)} (-105 + 210I(1+I)\beta + 267(1+I)^2\beta^2 - 184I(1+I)^3\beta^3 - 84(1+I)^4\beta^4 + 27I(1+I)^5\beta^5 + 5(1+I)^6\beta^6),$$

$$P_{1,6}^{\perp} = \frac{(-9a \exp(-3Iak + 2I(1+I)\beta))}{32(1+I)^4(-3+3Iak+a^2k^2)\beta^4} (-105 + 210I(1+I)\beta + 255(1+I)^2\beta^2 - 160I(1+I)^3\beta^3 - 56(1+I)^4\beta^4 + 11I(1+I)^5\beta^5 + (1+I)^6\beta^6),$$

$$F_6^{\parallel} = -\frac{3a \exp(-2Iak - (2-2I)\beta)}{80k^2(-3+3Iak+a^2k^2)\beta^4} (105 - 105Iak - 45a^2k^2 + 10Ia^3k^3 + a^4k^4)(15 + (30-30I)\beta - 42I\beta^2 - (14+14I)\beta^3 - 4\beta^4),$$

$$F_{1,6}^{\perp} = -\frac{a \exp(-2Iak + 2I(1+I)\beta)}{160(1+I)^4k^2(-3+3Iak+a^2k^2)\beta^4} (105 - 105Iak - 45a^2k^2 + 10Ia^3k^3 + a^4k^4)(-45 + 90I(1+I)\beta + 111(1+I)^2\beta^2 - 72I(1+I)^3\beta^3 - 28(1+I)^4\beta^4 + 7I(1+I)^5\beta^5 + (1+I)^6\beta^6),$$

Как уже отмечалось выше, решение задачи найдено с точностью до порядка  $\varepsilon^4$  включительно. Однако следует заметить, что оно может быть найдено с любой точностью по параметру  $\varepsilon$  с помощью предложенного выше метода.

## 4. Решение второй задачи

Решение второй задачи аналогично решению первой. Структура вектора  $W_i$  такая же как и в (3.1), отличаются лишь тензорные коэффициенты. В данном случае они должны быть линей-

ными по  $\Gamma_{jk}$ , а также зависеть от вектора  $\mathbf{r}$ . Необходимо учитывать тот факт, что тензор  $\Gamma_{jk}$  является антисимметричным. Тензорные коэффициенты для второй задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M_i &= M^\omega \Gamma_{ij} r_j, \\ C_i &= C^\omega \Gamma_{ij} r_j, \\ N_{ih} &= N_1^\omega \Gamma_{ih} + N_2^\omega \Gamma_{ij} r_h r_j + N_3^\omega \Gamma_{jh} r_i r_j, \\ D_{ih} &= D_1^\omega \Gamma_{ih} + D_2^\omega \Gamma_{ij} r_h r_j + D_3^\omega \Gamma_{jh} r_i r_j. \end{aligned}$$

Скорость жидкости находится по формуле (3.4). Разложения по малому параметру и способ нахождения неизвестных коэффициентов аналогичен первой задаче. Для найденных в задаче коэффициентов справедливо следующее представление с искомой точностью:

$$M^\omega = M_3^\omega \varepsilon^3, \quad C^\omega = C_3^\omega \varepsilon^3, \quad N_1^\omega = N_{1,0}^\omega + N_{1,3}^\omega \varepsilon^3,$$

Значения коэффициентов в разложениях приведены ниже

$$\begin{aligned} C_3^\omega &= -\frac{a \exp(-Iak - (1-I)\beta) (-3 + 3Iak + A^2 k^2) (I + (1+I)\beta)}{2k^2 (I + ak)}, \\ M_3^\omega &= \frac{3a \exp(-2Iak - (1-I)\beta) (I + (1+I)\beta)}{2(I + ak)}, \\ N_{1,0}^\omega &= -\frac{a^3 \exp(-Iak)}{-1 + Iak}, \\ N_{1,3}^\omega &= -\frac{a^3 \exp(-2Iak - (1-I)\beta) (1 + (1-I)\beta)}{(I + ak)^2}. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты имеют порядок малости выше  $\varepsilon^4$  и поэтому их значения не приведены. Как и решение первой задачи решение второй задачи может быть найдено с любой точностью по параметру  $\varepsilon$  с помощью предложенного выше метода. Нулевое приближение соответствует известному решению для одиночной частицы [11].

## 5. Силы и моменты, действующие на частицы

Распределение скорости жидкости для исходной задачи записывается как сумма выражений для скоростей в первой и второй задачах.

Значения коэффициентов, найденных в задачах 1, 2 позволяет найти распределение скорости и давления в жидкости из выражений (3.4), (3.5). Эти распределения необходимы для нахождения сил и моментов, действующих на частицы. Зная выражения для сил и моментов, можно из системы (2.5) найти линейные и угловые скорости сфер тем самым полностью решить поставленную задачу.

Сила и момент, действующие на частицу  $A$ , находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} F_i^A &= \int_S [-p \delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j] ds, \\ T_i^A &= \int_S \epsilon_{ijk} x_j [-p \delta_{kl} + \eta \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) n_l] ds. \end{aligned}$$

Здесь рассматриваются интегралы по поверхности  $S$  частиц, внешняя нормаль к которой  $\mathbf{n}$ .



Подставляя найденные значения коэффициентов для первой задачи, получаем следующие выражения для силы и момента, действующие на частицу  $A$

$$F_i^{A\parallel} = -6a\pi\eta f_1 v_i^{\parallel} - a^3\pi\rho f_2 \frac{dv_i^{\parallel}}{dt}, \quad F_i^{A,\perp} = -6a\pi\eta f_3 v_i^{\perp} - a^3\pi\rho f_4 \frac{dv_i^{\perp}}{dt},$$

$$T_i^{A\perp} = -\epsilon_{ijk}(a\pi\eta v_j^{\perp} r_k f_5 + a^3\pi\rho r_k f_6 \frac{dv_j^{\perp}}{dt}).$$

Здесь  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$  — функции безразмерных параметров. Аналитические представления для них имеют сложный вид, поэтому ниже на рис. 1 — рис. 3 они представлены в графическом виде, как функции параметров  $\lambda$  и  $\epsilon$ . Переход от параметра  $\beta$  к параметру  $\lambda$  связан с тем фактом, что известное выражение для силы в случае одиночной частицы, соответствующее нулевому приближению, представлено через этот параметр. На всех рисунках сплошная линия соответствует значению  $\lambda = 0.1$ , пунктирная —  $\lambda = 0.2$ , штрих-пунктирная —  $\lambda = 0.3$ . Параметр  $\epsilon$  меняется в пределах  $0.01 \leq \epsilon \leq 0.35$ . При этом минимальное значение параметра  $\beta$  равно 0.2857, 0.5714 и 0.8571, соответственно для каждого значения  $\lambda$ .

В силу свойств решения первой задачи справедливы следующие соотношения

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{F}^B, \quad \mathbf{T}^A = -\mathbf{T}^B.$$

Из решения второй задачи получаем следующие выражения для силы и момента

$$F_i^{A\omega} = -(a\pi\eta\Gamma_{ik}r_k f_7 + a^3\pi\rho r_k \frac{d\Gamma_{ik}}{dt} f_8), \quad T_i^{A\omega} = -\epsilon_{ijk}[4a^3\pi\eta\Gamma_{jk} f_9 +$$

$$+ 4a^5\pi\rho \frac{d\Gamma_{jk}}{dt} f_{10} - 4a\pi\eta(\Gamma_{jo}r_o r_k + \Gamma_{jo}r_o r_k) f_{11} - 4a^3\pi\rho(\frac{d\Gamma_{jo}}{dt} r_k r_o + \frac{d\Gamma_{jo}}{dt} r_k r_o) f_{12}].$$

Здесь  $f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}$  — функции безразмерных параметров. Аналитические представления для них также имеют сложный вид, при этом во всем диапазоне параметров  $\lambda$  и  $\epsilon$  функции  $f_{11}$  и  $f_{12}$  принимают значения, много меньше единицы. Поэтому ниже на рис. 4 — рис. 5 они в графическом виде не представлены. На всех рисунках сплошная линия соответствует значению  $\lambda = 0.1$ , пунктирная —  $\lambda = 0.2$ , штрих-пунктирная —  $\lambda = 0.3$ . Параметр  $\epsilon$  меняется в пределах  $0.01 \leq \epsilon \leq 0.35$ . Соответствующие значения параметра  $\beta$  такие же, как и в первой задаче.

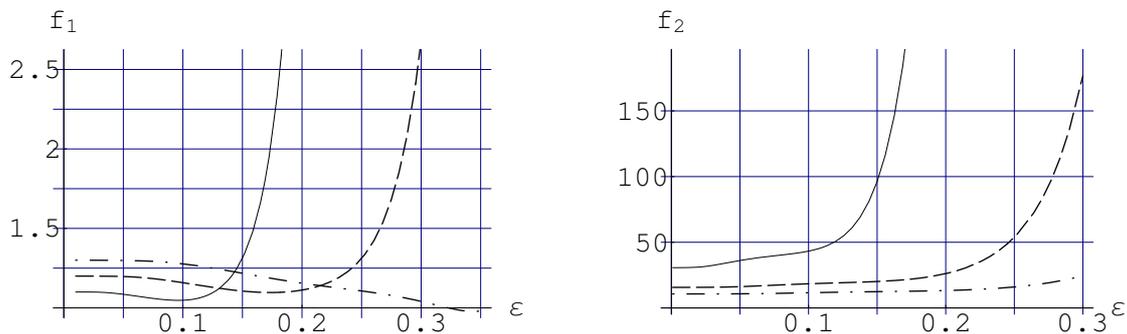


Рис. 1. Графики функций  $f_1, f_2$ : 1) линия — соответствует  $\lambda = 0.1$ , 2) линия — — — —  $\lambda = 0.2$ , 3) линия — · — · — —  $\lambda = 0.3$

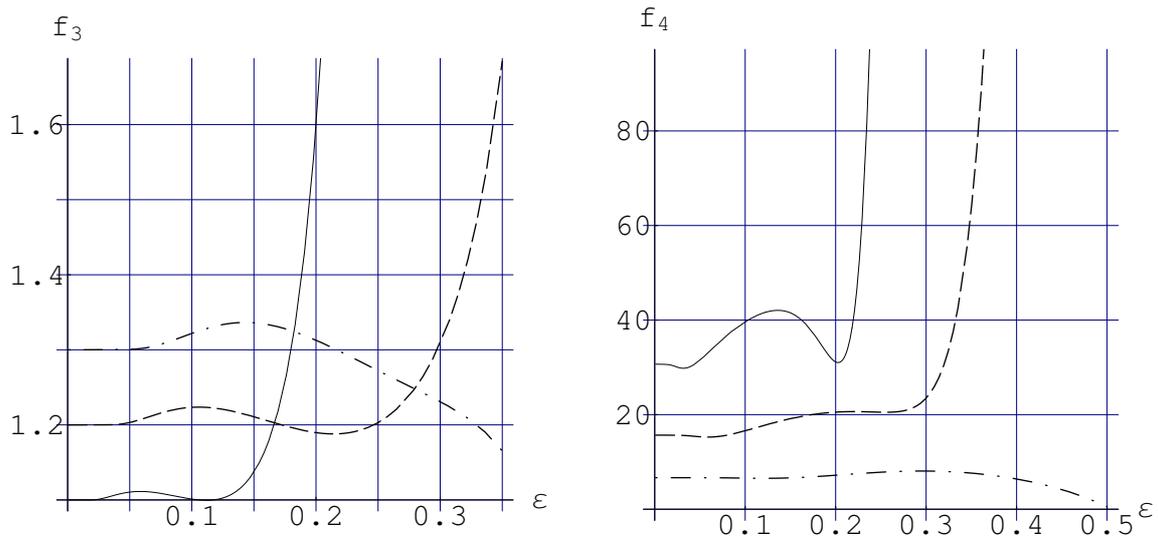


Рис. 2. Графики функции  $f_3, f_4$ : 1) линия — соответствует  $\lambda = 0.1$ , 2) линия - - -  $\lambda = 0.2$ , 3) линия - · - · -  $\lambda = 0.3$

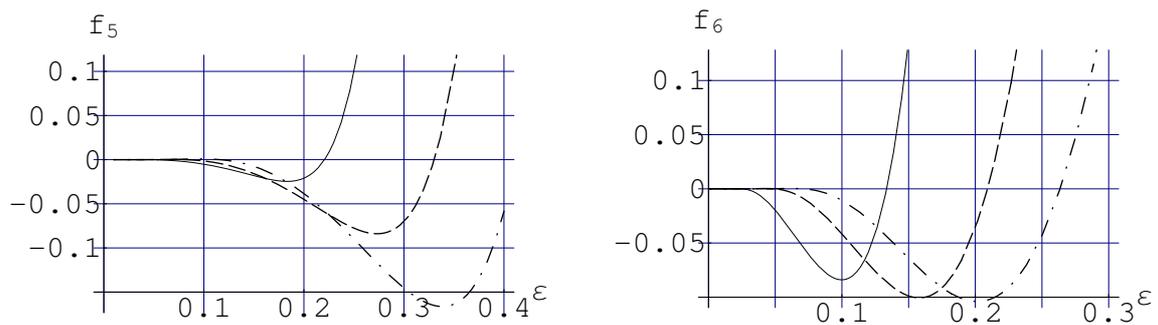


Рис. 3. Графики функции  $f_5, f_6$ : 1) линия — соответствует  $\lambda = 0.1$ , 2) линия - - -  $\lambda = 0.2$ , 3) линия - · - · -  $\lambda = 0.3$

В силу свойств решения второй задачи справедливы следующие соотношения

$$\mathbf{F}^{A\omega} = -\mathbf{F}^{B\omega}, \quad \mathbf{T}^{A\omega} = \mathbf{T}^{B\omega}.$$

Резкий рост значений функций  $f_2, f_4$  при  $\varepsilon > 0.2$  и  $f_7$  при  $\varepsilon < 0.1$ , по мнению авторов, связан с недостаточной точностью разложений по малому параметру в этой области и требует дальнейшего уточнения. Как видно из рисунков имеется нелинейная зависимость полученных функций от каждого из параметров. Причем полученная в аналитической форме представление функций от этих параметров содержит слагаемые вида  $1/r^k$  с сомножителями вида  $\exp(\lambda(1 - r/a))$ , то есть функции стремятся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

Воспользуемся полученными аналитическими зависимостями для усреднения выражений для сил и моментов по объему смеси жидкость-частицы, в которой частицы распределены по всей жидкости. Строго говоря, для этой процедуры необходимо проводить усреднение полученных выражений для пробной частицы, например частицы  $A$ , по конфигурации частиц с опре-

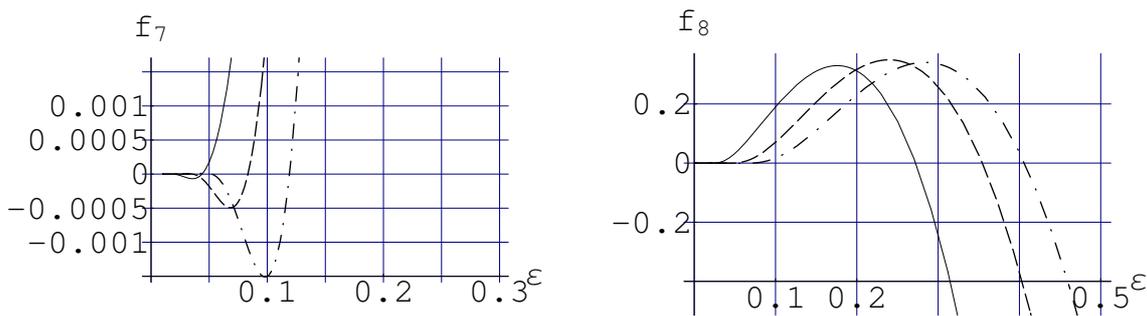


Рис. 4. Графики функции  $f_7$ ,  $f_8$ : 1) линия — соответствует  $\lambda = 0.1$ , 2) линия - - -  $\lambda = 0.2$ , 3) линия - · - · -  $\lambda = 0.3$

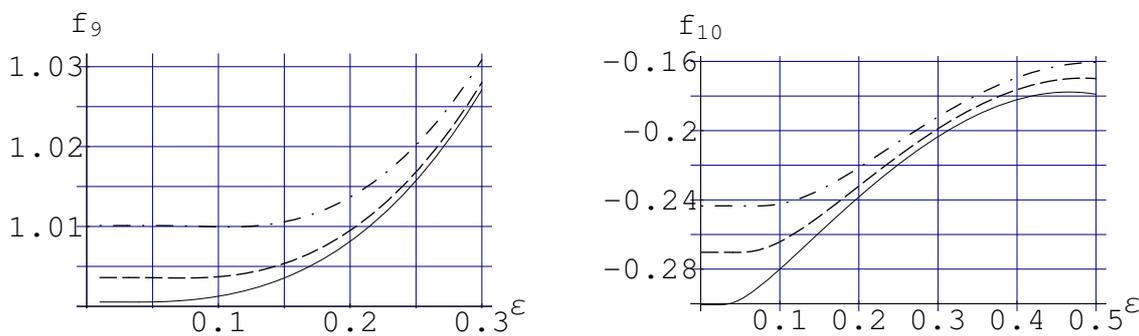


Рис. 5. Графики функции  $f_{10}$ ,  $f_{11}$ : 1) линия — соответствует  $\lambda = 0.1$ , 2) линия - - -  $\lambda = 0.2$ , 3) линия - · - · -  $\lambda = 0.3$

деленной плотностью вероятности. Однако для получения первого приближения при описании влияния гидродинамического взаимодействия на средние значения сил и моментов, естественно предположить, что только одна частица из заданной конфигурации оказывает значительное влияние на средние значения величин для пробной частицы. Поэтому плотность вероятности можно считать равной вероятности того, что центр второй частицы лежит в элементе объема на расстоянии  $r$  от частицы  $A$ . Предполагая, что имеется однородное распределение частиц по объему жидкости, для определения выражения средней силы необходимо найти значение несобственного интеграла вида

$$\int_{2a}^{\infty} \mathbf{F}^A 4\pi r^2 dr.$$

Используя полученные выше выражения для функций получаем, что интеграл расходится. Аналогичный результат имеет место и при вычислении среднего момента. Это означает, что также, как и в случае со стационарным обтеканием частиц парное взаимодействие не дает возможность получения средних выражений для сил и моментов прямым усреднением по всем возможным расстояниям между частицами в интервале  $2a \leq r \leq \infty$  — эта процедура приводит к расходящимся интегралам. Поэтому можно предположить, что для нестационарного обтекания частиц ситуация по нахождению зависимости средних параметров смеси от концентрации частиц аналогична той, что имеет место для стационарного случая, а именно: получение выражений для средних сил и моментов с точностью по концентрации частиц выше первой степени

возможно при учете взаимодействия достаточно большого, но ограниченного числа частиц из общей их совокупности в единице объема смеси.

## 6. Общее решение для произвольного числа частиц

Так же, как и в работах [4, 5, 6] для представления решения о взаимодействии  $n$  частиц в выражении (3.5) необходимо учитывать вклад в возмущение скорости потока от каждой частицы. Для этого необходимо использовать мультипольные разложения для каждой частицы со своими тензорными коэффициентами. Аналогично представляется решение задачи о взаимодействии двух и более частиц произвольных радиусов. Выражение (3.5) в этом случае запишется в виде:

$$W_i = \sum_{q=1}^n \left[ -\frac{1}{k^2} M_i^q L_0^q \exp(IkX^q) - \frac{1}{k^2} N_{ij}^q (L_j^q + IkL_0^q \frac{x_j^q}{X^q}) \exp(IkX^q) - \dots + \right. \\ \left. + C_i^q L_0^q + D_{ih}^q L_h^q + F_{ihj}^q L_{hj}^q + G_{ihjl}^q L_{hjl}^q + \dots \right]$$

Возмущения скорости и давление в жидкости находятся по формулам (3.6), (3.7). Кроме того, необходимо записать систему дифференциальных уравнений (2.5) относительно поступательной и угловой скорости для каждой из частиц. Для нахождения тензорных коэффициентов необходимо использовать граничные условия на каждой частице. При этом возможны два способа представления тензорных коэффициентов. Первый способ заключается в выражении их в явном виде через три базисных вектора, аналогично выражениям (3.4). В качестве таких базисных векторов можно взять любые три радиуса-вектора, соединяющие центр какой-либо частицы с тремя другими не лежащими в одной плоскости. Такой способ удобен для получения аналитических представлений тензорных коэффициентов. Второй способ, который более удобен для численных расчетов, это их представление в виде элементов массивов соответствующей размерности. Именно таким образом представлялись коэффициенты в программной реализации метода для стационарного обтекания облака частиц [7]. Так же, как и в случае обтекания одиночной частицы потоком, скорость которого есть произвольная функция времени и которая может быть представлена в виде интеграла Фурье, полученное решение может рассматриваться как соответствующее одной из гармоник. Процедура интегрирования по всем частотам позволяет получить выражение для сил и моментов в этом случае.

## 7. Заключение

Предлагается метод нахождения аналитического решения задачи о гидродинамическом взаимодействии двух и более сферических частиц, помещенных в вязкую жидкость, скорость которой на бесконечности представляется в виде функции однородной по координатам и периодической по времени. Учитываются нестационарные слагаемые в уравнениях для скорости жидкости. В случае двух частиц одинакового радиуса, граничные условия и, следовательно, решение задачи для скорости удовлетворяют симметричному преобразованию. Используя метод, предложенный в работе, найдено приближенное аналитическое решение задачи о гидродинамическом взаимодействии двух сфер. Решение представлено в виде разложения по малому параметру. Получены асимптотические представления для сил и моментов, действующих со стороны жидкости на частицы и позволяющих определить линейные и угловые скорости сфер. На основе полученных асимптотических разложений сделан вывод о невозможности проведения процедуры прямого

усреднения для получения выражений для средних сил и моментов, действующих со стороны жидкости на частицы. Предложен общий вид решения задачи об обтекании конечного числа частиц произвольного радиуса нестационарным потоком вязкой жидкости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект №04-01-00607).

## Список литературы

- [1] Hofman J.M.A., Clercx H.J.H., Schram P.J.M., Effective viscosity of dense colloidal crystals, *Physical Review E*, 2000, vol. 62, no. 6, pp. 8212–8233.
- [2] Hynninen A.-P., Dijkstra M., R. van Roij, Effect of three-body interactions on the phase behavior of charge-stabilized colloidal suspensions, *Phys. Rev. E*, 2004, vol. 69, pp. 061407-1–061407-8.
- [3] Serrin J., *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer Verlag, 1959. Рус. перевод: Серрин Дж., *Математические основы классической механики жидкости*, М.: Иностран. лит-ра, 1963.
- [4] Мартынов С. И., *Взаимодействие частиц в суспензии*, Казань: Каз. мат. общ., 1998.
- [5] Мартынов С. И., Гидродинамическое взаимодействие частиц, *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 1998, №2, с. 112–119.
- [6] Мартынов С. И., Взаимодействие частиц в течении с параболическим профилем скорости, *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2000, №1, с. 84–91.
- [7] Баранов В. Е., Мартынов С. И., Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости, *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2004, №1, с. 152–164.
- [8] Мартынов С. И., Сыромясов А. О., Симметрия периодической решетки частиц и потока вязкой жидкости в приближении Стокса, *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2007, №3, с. 7–20.
- [9] Губайдулин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Волны в жидкостях с пузырьками, в сб.: *Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа*, М.: ВИНТИ, 1982, т. 17, с. 160–249.
- [10] Нигматулин Р. И., *Динамика многофазных систем*, М.: Наука, т. 1, 2, 1987.
- [11] Ландау Л. Д., Лифшиц, Е. М., *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.
- [12] Sangani A. S., Zhang D. Z., Prosperetti A. The added mass, Basset, and viscous drag coefficients in nondilute bubbly liquids undergoing small-amplitude oscillatory motion. *Phys. Fluids A*, 1991, pp. 2955–2970.
- [13] Chang C.-C. Potential Flow and Forces for Incompressible Viscous Flow, *Math. and Ph. Sc.*, 1992, vol. 437, no. 1901, pp. 517–525.
- [14] Sankaranarayanan K., Shan X., Kevrekidis I. G., Sundaresan S. Analysis of drag and virtual mass forces in bubbly suspensions using an implicit formulation of the lattice Boltzmann method. *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 452, pp. 61–96.