УДК 51(09) 517.958:531.32

Диссертация Э. Цермело о вихревой гидродинамике на сфере

А. В. Борисов, Л. А. Газизуллина, С. М. Рамоданов
Институт компьютерных исследований
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mails: borisov@ics.org.ru, lag@ics.org.ru, ramodanov@mail.ru

Судьба некоторых замечательных работ бывает такова, что они оказываются на долгое время забытыми или недоступными, и сокрытые в них результаты рано или поздно переоткрываются участниками дальнейшего научного развития. Будучи обнаруженными и извлеченными на свет, такие материалы всегда представляют исторический интерес. Некоторые труды при этом сохраняют большую ценность и в научном отношении, воздействуя на современного читателя удивительным богатством и проницательностью своего содержания. Очевидно, что их авторы отчетливо осознавали многие глубокие идеи, которые принято считать за достижения исследователей современного периода. В некоторых же вещах они даже превзошли их, получив и представив в единой форме многое из того, что потом появится в виде разрозненных результатов, найденных в разное время разными учеными.

Вышесказанное в полной мере относится к одной работе Эрнста Цермело, которой посвящена настоящая статья. В современной математике имя Цермело широко известно благодаря его решающему вкладу в создание аксиоматического фундамента теории множеств, а также работам по статистической физике. Однако его наследие содержит также важное, но лишь частично напечатанное и впоследствии забытое исследование по гидродинамике и теории вихрей. Речь идет о диссертации Э. Цермело от 1899 года «Гидродинамическое исследование вихревых движений на поверхности сферы». Фактически в ней систематически выводятся и исследуются многие уравнения, полученные впоследствии в различных работах, начиная с 1970-х годов. (Хотя, конечно, анализу Цермело не достает преимуществ, которые сегодня имеются у нас в связи с глубоким проникновением в математическую физику новых идей, восходящих, в частности, к Ли и Пуанкаре.) Здесь содержится также материал, который полезно было бы осмыслить для дальнейшего прояснения и продвижения многих проблем гидродинамики на поверхностях.

Конечно, не случайно, что эта диссертация Цермело и другие забытые работы по динамике вихрей обретают известность в настоящее время, в период интенсивных международных исследований в этой области и в нелинейной динамике вообще. Не оказав подобающего им влияния в прошлом, подобные труды оказываются сегодня действительно актуальными и получают заслуженное признание. Отметим, что в истории вихревой динамики это оказалось характерным для ряда работ второй половины XIX – начала XX вв., периода ее плодотворного развития, начавшегося под влиянием основополагающего исследования Гельмгольца [29]. Многие значительные результаты того времени были независимо получены в современный период теории вихрей, начиная со второй половины XX века. Здесь следует указать исследования В. Грёбли, И. С. Громеки, Н. С. Васильева, В. Хикса, К. Агостинелли и др. Некоторые работы цитируются в современных обзорах, однако их полный научный и исторический анализ до сих пор не выполнен. Работе Грёбли о движении вихрей на плоскости [28] посвящена замечательная статья Х. Арефа, Н. Ротта и Х. Томанна [17]. Можно считать, что настоящая публикация продолжает заложенную в [17] традицию освещения забытых классических исследований по вихревой динамике.

Приводимые здесь биографические сведения об Эрнсте Цермело заимствованы из замечательной книги Х.-Д. Эббинхауса [26], содержащей много интересных документальных материалов.

Эрнст Цермело (1907 г.) [26]

Введение

Диссертация на право преподавания и получения доцентуры (Habilitationsschrift)[1] была завершена Цермело на второй год его пребывания в Гёттингене, куда он переехал в 1897 г. из Берлина для продолжения своей академической карьеры. Берлинский период[2] принес молодому Цермело первую известность. В 1894 г. он получил докторскую степень, выполнив под руководством Г.А. Шварца диссертацию по вариационному исчислению [49]. Эта работа, существенно развившая идеи Вейерштрасса, сразу получила самый благоприятный прием. Следующие статьи (1895/96 гг.) были написаны Цермело уже в качестве ученика и ассистента Макса Планка. Они содержат критику механистического подхода Больцмана к обоснованию термодинамики, как известно, имевшего в то время многочисленных противников. Возражения Цермело, построенные на теореме Пуанкаре о возвращении, были достаточно содержательны, чтоб инициировать полемику с самим Л. Больцманом [50–53] (эта интересная дискуссия упоминается во многих обзорных работах по термодинамике и статистической механике).

В июле 1897 г. Цермело пишет Ф. Клейну с просьбой оказать содействие в его переводе в другой университет, в более тихом городе, где он мог бы продолжить свое обучение и подготовить диссертацию на получение доцентуры [26]. Не уточняя предмета диссертации, он пишет, что она будет посвящена вопросам механики и теоретической физики. Ответ Клейна не сохранился, но, очевидно, просьба Цермело была удовлетворена, так как уже в ноябре того же года он прибыл в Гёттингенский университет.

Диссертация Цермело, действительно, посвящена проблеме из прикладной математики, а именно — из области гидродинамики и, в частности, теории вихрей. Процитируем первые строки этого труда: «Целью данной работы является развитие систематической теории течения идеальной несжимаемой жидкости на поверхности сфере. Подобная теория ранее была разработана для случая плоскости и довольно полно представлена в работе Пуанкаре *Théorie de tourbillons*».

Представление диссертации состоялось 9 февраля 1899 г. (к тому времени Цермело исполнилось 27 лет). В своем официальном отзыве Д. Гильберт говорит о ней с высокой похвалой, воздавая должное обстоятельности проведенного исследования и полученным новым результатам; там же им приводится краткое описание ее содержания [26]:

> Представленная работа <...> является чисто математическим исследованием, хотя и связана с физико-метеорологической задачей движения циклонов на поверхности Земли.
>
> В *первой* главе рассматривается течение жидкости на произвольной поверхности в пространстве. Взяв за основу дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода и введя две независимые гауссовы координаты, автор указывает общие законы движения жидкости для данного случая. С помощью теоремы Гельмгольца о постоянстве вихревых моментов (*прим. ред.*: имеется в виду циркуляций) автор составляет в случае несжимаемой жидкости дифференциальное уравнение в частных производных 3-го порядка для функции тока ψ, которое полностью определяет движение жидкости во времени.
>
> Во *второй* главе эта общая теория применяется к исследованию течения на сфере. Для дифференциального уравнения в частных производных $D\psi = 2\rho$, где D — некоторый дифферен-

[1] *Habilitationsschrift* — в германской академической системе вторая, следующая после докторской диссертации (Ph.D.), квалификационная работа, которую необходимо защитить для получения доцентуры (Habilitation) и права преподавания в высшем учебном заведении.
Предметом нашего интереса является именно вторая диссертация Цермело (далее по тексту — диссертация или Habilitationsschrift).

[2] Сюда частично относятся и студенческие годы Цермело. Семестровые лекции по математике и физике он слушал у Фукса, Шварца, Фробениуса, Планка и др.

циальный оператор, а ρ — вихревая плотность, вводится в качестве основного некое специальное решение, представляющее так называемый сингулярный «точечный вихрь» и постоянную вихревую плотность на остальной поверхности сферы. Используя это решение как и обычную функцию Грина в случае плоскости, можно записать общий интеграл вышеупомянутого дифференциального уравнения в частных производных: так называемый сферический потенциал, соответствующий обычному логарифмическому потенциалу на плоскости, причем вихревая плотность ρ играет роль массовой плотности. Далее следует изучение свойств сферического потенциала. Если представить себе распределенную по поверхности сферы массу, плотность которой отличается от вихревой плотности на определенную, отличную от нуля постоянную величину, то положение центра тяжести этой массы будет оставаться неизменным. В заключение этой главы указаны особые классы непрерывных стационарных и вращательно-стационарных движений на сфере, выражающиеся через сферические функции.

В *третьей* главе вычисляется скорость точечного вихря и выводятся уравнение движения для случая, когда помимо непрерывного вихревого движения существует конечное количество точечных вихрей. Если при этом вихревая плотность постоянна на всей сфере, то про такое течение будем говорить, что оно вызвано системой вихрей. Система вихрей полностью определяется количеством, положением и интенсивностями точечных вихрей; задача состоит в том, чтобы определить эволюцию конфигурации во времени. Особый интерес представляет случай равновесия, которому соответствует максимальный или минимальный так называемый *собственный потенциал* вихрей. Условие интерпретируется различными геометрическими способами, в которых обычные многогранники предстают особыми фигурами равновесия.

В *последней* главе обстоятельно рассматривается задача трех вихрей, которая сводится к исследованию формы образованного этими вихрями треугольника. Здесь выводятся и обсуждаются дифференциальные уравнения движения, в особенности случай равных интенсивностей, где интегрирование возможно в эллиптических функциях. При этом нужно отметить, что в качестве новых переменных используются квадраты сторон плоского треугольника, получаемого соединением точечных вихрей прямыми линиями.

<...> это основательное, всестороннее исследование, приведшее к новым замечательным результатам; оно характеризует не только знания и способности автора, но и понимание им науки, и его идеальные устремления. Поэтому я голосую за одобрение Habilitation.

Я хорошо знаю д-ра Цермело из личного общения; он всегда высказывал живейшую научную заинтересованность. Склонность к академической профессии он, в частности, продемонстрировал своими докладами и замечаниями на заседаниях Математического общества.[3]

По результатам диссертации была подготовлена работа под названием «Гидродинамическое исследование вихревых движений на поверхности сферы» в двух частях [47, 48]. Первая часть была напечатана в 1902 г. в журнале *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. В ней систематически развита общая теория двумерной гидродинамики на сфере и поверхностях произвольной формы, и введено понятие точечного вихря на сфере. Вторая часть не была опубликована и до настоящего времени хранилась в виде рукописей в архиве Фрайбургского университета[4]. В ней блестяще изучена задача о движении трех вихрей точечных вихрей на сфере, доказана ее интегрируемость в гамильтоновой форме и исследована качественная картина движения.

К сожалению, многие исторические моменты, касающиеся диссертации Цермело, для нас остаются неразгаданными. Интересен, прежде всего, вопрос о том, что побудило Цермело обратиться к гидродинамическим исследованиям. В введении он отмечает, что первоначальная идея

[3]Гёттингенское Математическое общество.

[4]Издательство Springer при поддержке Гейдельбергской академии наук готовит к изданию собрание трудов Э. Цермело.

работы возникла в связи с геофизическими вопросами, связанными с пониманием процессов эволюции циклонов и морских течений. К сожалению, осталось неизвестным, кто мог подтолкнуть его к этим вопросам, казалось бы, далеким от его основных берлинских интересов (вариационное исчисление и анти-больцмановские работы). Однако, как показывает письмо к Клейну, содержание Habilitationsschrift было продумано им еще в Берлине. Определенным стимулом в этих исследованиях, очевидно, была работа Пуанкаре [43]. Известен также следующий факт [26], свидетельствующий об интересе Цермело к изучению проблем метеорологии: в 1886 г. он подавал прошение на должность ассистента в Германскую морскую обсерваторию в Гамбурге (Deutsche Seewarte)[5].

Можно также лишь догадываться о причине, по которой Цермело не опубликовал вторую часть своей работы. Уже в следующем 1900 г. он приступает к чтению семестрового курса по теории множеств, тогда же начинается его активная научная работа по основаниям математики под началом Гильберта. В одном письме Цермело сетует, что никак не может завершить и напечатать свою «несчастную статью по вихрям» [unglückseligen Wirbel-Arbeit] и сомневается, что ему это уже удастся [26]. Кажется правдоподобным объяснить это все более тесным сближением с Гильбертом и переменой научных интересов. Это было начало нового пути, на котором он добился выдающихся достижений, составивших ему славу основателя современной аксиоматической теории множеств. Отметим также, что эта вторая диссертация Цермело, хотя она в высшей степени доступна для понимания, не получила такого успеха и известности, как его докторская диссертация. Впоследствии Цермело уже не возвращался к вопросам теории вихрей.

Между тем этот труд представляет собой первое аналитически завершенное, систематическое исследование динамики точечных вихрей на сфере[6]. Он намного опередил дальнейшие исследования в этом направлении, но из-за своей странной судьбы, к сожалению, не оказал на них влияния. Уравнения движения вихрей на сфере, аналогичные уравнениям Цермело, были получены только в 70-х годах XX века [3]. Многие его результаты были независимо переоткрыты и развиты в современных работах (например, [21, 22, 30, 38, 39]). Диссертация Цермело по сей день остается актуальной, мы находим здесь интересный, наводящий на размышления материал. Далее мы рассмотрим ее содержание более подробно, при этом основное внимание будет уделено второй, неопубликованной, части (главы 3 и 4)[7]. Будут также приведены некоторые комментарии в контексте современного состояния теории вихревого движения на поверхностях. Эта область по сей день содержит множество открытых вопросов.

Диссертация Цермело 1899 г. Часть 1 (главы 1 и 2)

Гидродинамика на произвольных поверхностях

Первую главу своей диссертации Цермело начинает с систематического построения гидродинамики идеальной жидкости на произвольной двумерной поверхности S. Чтобы получить уравнения движения жидкости, аналогичные уравнениям Эйлера на плоскости, он вначале записывает в локальных координатах ξ и η на S уравнения движения материальной точки, а затем распространяет их на случай, когда масса непрерывно распределена на поверхности и описыва-

[5]В те времена центральный в стране институт морской метеорологии.

[6]Несколько ранее (1885 г.) эту задачу рассмотрел русский гидромеханик И.С. Громека [14]. Исследования Громеки полны интересных, глубоких идей. Однако он не дошел до вывода уравнений движения вихрей на полной поверхности сферы. Подробнее об этом будет сказано ниже.

[7]Первые две главы были переведены на русский язык (см. НД, т. 3, № 1).

ется, таким образом, поверхностной плотностью ρ. Полученные им уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}(u\sqrt{E}) + u^2\sqrt{E}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{\sqrt{E}} + v^2\sqrt{G}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{\sqrt{G}} = -\frac{\partial(P+\Phi)}{\partial\xi},$$

$$\frac{d}{dt}(v\sqrt{E}) + u^2\sqrt{E}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{\sqrt{E}} + v^2\sqrt{G}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{\sqrt{G}} = -\frac{\partial(P+\Phi)}{\partial\xi}.$$

Здесь E, G — элементы первой квадратичной формы, u и v — составляющие скорости частиц жидкости в направлении координат ξ, η, Φ — потенциал массовых сил, а функция давления P связывает давление p и плотность ρ по формуле $dP = dp/\rho$.

Далее Цермело развивает всю стандартную гидромеханику, которая хорошо разработана для случая плоскости. А именно для случая несжимаемой жидкости он вводит понятие функции тока точно также как это делается на плоскости — рассматривая поток жидкости через кривую, один из концов которой закреплен, и показывая, что величина потока зависит лишь от положения второго конца. Компоненты скорости u, v выражаются через функцию тока по формулам

$$u = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi},$$

то есть, как и в плоском случае, $(u, v) = \mathrm{sgrad}\psi$.

Затем он вводит понятие циркуляции и доказывает теорему о сохранении циркуляции по замкнутому контуру, из которой выводит аналог знаменитой теоремы Гельмгольца о сохранении завихренности жидкого элемента [29]. Таким образом, по крайней мере локально, гидромеханика на поверхностях ничем не отличается от плоской ситуации.

Как мы видим, Цермело впервые систематически разработал двумерную гидродинамику на сфере и на поверхностях произвольной формы. И хотя его уравнения и теоремы носят локальный характер, у него содержатся все необходимые предпосылки для дальнейшего развития гидромеханики на поверхностях в целом. Однако, к сожалению, после Цермело это направление не получило существенного продвижения. Мы можем сказать, что теория глобальной гидродинамики на поверхностях до сих пор практически не разработана. В литературе по этой проблематике рассмотрены лишь некоторые частные вопросы, касающиеся, в основном, движения точечных вихрей (например, [14,19,30–33,35], см. также достаточно «математизированную» монографию [1]). Очевидно, в этой теории будет важен вопрос о том, компактна ли поверхность, на которой изучается течение. Хорошо известно, что на компактных поверхностях суммарная завихренность, вследствие теоремы Гаусса, должна равняться нулю. Ясно также, что при изучении движения твердых тел на поверхностях необходимо решать задачи, аналогичные задачам Дирихле и Неймана на плоскости. На плоскости для их однозначного разрешения требовалось постулировать некоторое условие в бесконечно удаленной точке, которая, очевидно, отсутствует на компактных поверхностях. Таким образом, для компактных поверхностей теоремы существования и единственности решений в этих задачах еще требуют своего уточнения.

В гидродинамике на компактных поверхностях имеются и другие требующие осмысления вопросы. В работе Цермело мы встречаем интересные результаты, нетипичные для плоской постановки задачи. Например, если мы рассмотрим течение жидкости на сфере и под «массой» частицы будем понимать величину ее завихренности, то центр масс такого распределения останется неподвижным. Цермело широко использует эту и родственные теоремы при исследовании движения точечных вихрей.

Эти и многие другие вопросы гидродинамики идеальной жидкости составляют большую совокупность проблем, не решенных еще и сегодня. Одной из важных задач является распространение методов плоской гидродинамики на случай искривленных поверхностей. На этом пути знакомство с исследованием Цермело фактически незаменимо.

Применение теории к сфере. Введение точечного вихря

Под точечным вихрем на произвольной поверхности S Цермело понимает сингулярность потока, состоящую из одной точки, со следующим свойством: величина циркуляции скорости по контуру, охватывающему сингулярность, остается отличной от нуля и конечной при стягивании контура в точку. Это весьма расплывчатое определение Цермело конкретизирует для случая сферы, полагая, что течение от точечного вихря в полюсе $\theta = 0$ задается функцией тока $\psi = \frac{m}{\pi} \ln(\sin \frac{\theta}{2})$, которая является решением уравнения Бельтрами—Лапласа на сфере:

$$D\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} = -\frac{m\pi}{2}. \tag{1}$$

Здесь λ, θ — сферические координаты, а $(-\frac{m\pi}{2})$ — фоновая завихренность, которая, как отмечалось выше, обеспечивает нулевую суммарную завихренность на всей сфере.

Здесь следует упомянуть малоизвестные работы русского ученого И. С. Громеки, который был на двадцать лет старше Цермело и занимался теми же гидродинамическими вопросами [14]. Его работы интересны глубокими и оригинальными идеями по реализации гидродинамики на поверхностях. В отличие от Цермело, Громека не строит гидродинамику на поверхностях с нуля, а использует уже имеющуюся конструкцию трехмерной гидродинамики. Вводя специальным образом ортогональные криволинейные координаты x_1, x_2, x_3, он рассматривает течения, параллельные некоторому семейству параллельных поверхностей $x_3 = \text{const}$, например, концентрических сфер. Если жидкость несжимаема, то будет несжимаемо и двумерное течение на каждой из поверхностей. Рассуждая таким образом, Громека получает новый гидродинамический объект — полубесконечные вихревые нити, исходящие из общего центра сфер, интенсивность которых убывает как $1/R^2$ начиная от вершины. На каждой сфере $x_3 = \text{const}$ нить задает течение, которое Громека и называет течением от точечного вихря. Этим путем он получает общие уравнения движения точечных вихрей и применяет их к исследованию вихревого движения жидкости на сфере. Однако, в силу одного им же самим возведенного препятствия, ему не удалось получить уравнения движения точечных вихрей на полной сфере. Эта задача была полностью разрешена Цермело и ей посвящена вторая часть его диссертации, речь о которой пойдет ниже.

Громека сосредоточился на решении задачи, когда вихрь движется на ограниченном участке сферического слоя, и, следовательно, при нулевой суммарной завихренности. Таким образом, он приходит к уравнению (1), правая часть которого равна нулю. На этом пути он получает уравнения траекторий точечного вихря, представляющие собой линии уровня функции тока, внутри различных контуров на сфере. Далее он делает попытку (впрочем, тут же признавая ее безуспешность) построить аналогичные движения на полной сфере, рассматривая ее как предел, к которому стремится область, содержащая вихрь, по мере того, как ограничивающий ее контур стягивается к одной точке. Отметим, что Громека получает уравнения движения вихря в достаточно сложных областях на сфере. Похожие уравнения были получены в современных работах [25,30].

К сожалению, замечательные работы И. С. Громеки были малодоступны и оказались забытыми даже в России [13, 15]. Говоря о забытых исследованиях Громеки отметим еще его статью [16], в которой он изучает стационарные трехмерные течения, ныне называемые ABC-течениями (Арнольда—Бельтрами—Чилдреса). С исторической точки зрения это название следовало бы связать и с именем Громеки.

Результаты Цермело были переоткрыты В. А. Богомоловым в его работах [3, 4], цитируемых в литературе как первое строгое, систематическое исследование динамики точечных вихрей на сфере. Как мы видим теперь, эта задача была полностью разрешена гораздо раньше. Конечно, это указание на приоритет Цермело не умаляет ценности работы Богомолова. Рассуждения Богомолова весьма интересны и оригинальны (хотя идейно его рассуждения в чем-то схожи с рассуждениями Громеки): он рассматривает течение от источника, помещенного между концентрическими сферами. Чтобы на поверхностях сфер выполнялось условие непротекания на луче с началом в центре сфер, и проходящим через источник, необходимо разместить еще бесконечное количество источников. Устремляя затем расстояние между сферами к нулю, получаем в пределе луч, состоящий из источников, интенсивность которых убывает как $1/R^2$. На поверхности сферы, таким образом, получено течение от ей ортогонального нитевидного источника. Течение от источника затем стандартно преобразовывается в течение от точечного вихря (на плоскости функции тока от источника и вихря — сопряженные гармонические функции).

Как мы видим, оба исследователя идут к цели своим собственным путем. Подход Цермело более фундаментален: сначала он систематически выстраивает общую гидродинамику на сфере, а потом постулирует точечный вихрь; в то же время его метод более интуитивен и физически естественнен.

Цермело постулирует вихрь таким способом, что постоянная завихренность распределяется по всей поверхности сферы, поэтому вихрь получается без антиподальной компоненты. В недавней работе Борисова, Килина и Мамаева [23] предложен другой способ физической реализации точечного вихря на сфере, так называемая антиподальная модель движения.

Кроме случая сферы, мы пока не имеем ясного понимания, как конструктивно постулировать вихрь на других поверхностях. Попытки подступиться к проблеме вихревых движений на замкнутых поверхностях, в частности, на эллипсоиде, содержатся в недавней работе [19]. Авторы отмечают, что на поверхности непостоянной кривизны вихрь может двигаться под действием самого себя. Однако это неудивительно: в случае сферы этот эффект не наблюдается в силу симметрии, но, как уже отмечалось, если один вихрь поместить на произвольную компактную поверхность, то появляется еще «фоновая» завихренность, приводящая к тому, что вихрь движется под действием потока, вызванного им самим.

Стационарные движения

В последнем разделе первой части диссертации Цермело изучает так называемые стационарные течения (когда завихренность остается постоянной вдоль линий тока). Для этого он решает уравнение

$$D\psi = f(\psi),$$

где оператор D определен в (1).

Предполагая функцию f линейной вида $k\psi$ и ограничившись случаем $\psi = \psi(\theta)$, он заключает, что получившееся обыкновенное дифференциальное уравнение имеет непрерывные решения только при определенных видах постоянной k. Для каждого такого допустимого k он получает решение, разбивающее всю сферу на параллельные пояса, в каждом из которых жидкость течет в своем направлении (рис. 1). Комбинируя такие зональные течения он получает вихревую структуру ячеистого типа: поверхность сферы условно разбивается на четырехугольники, в каждом из которых жидкость имеет свой знак завихренности. В проекции Меркатора получившееся

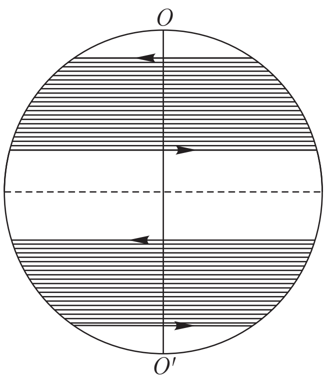

Рис. 1

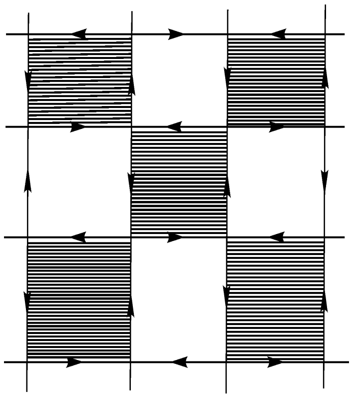

Рис. 2

изображение (напоминающее, по словам Цермело, «шахматную доску») приведено на рис. 2. В заключение Цермело отмечает практическую важность изучения вращательно-стационарных течений для проблем метеорологии.

Часть 2 (главы 3 и 4)

Здесь систематически развита динамика точечных вихрей на сфере. В частности, Цермело подробно исследовал задачу 3-х точечных вихрей в относительном и абсолютном пространствах (фактически, распространив на сферу ряд результатов, полученных примерно двадцатью годами ранее В. Грёбли в его диссертации [28][8]). Он также получил ряд интересных результатов, нетипичных для плоской постановки задачи.

Равновесие и движение вихря

В первых параграфах Цермело формулирует некоторые простые утверждения, касающиеся точечного вихря. Он рассматривает потоки, задаваемые точечными вихрями с непрерывным дисперсным распределением вихревой плотности по сфере. Для системы n простых вихрей на сфере он находит функцию тока и показывает, что аналогично случаю плоскости линии уровня соответствующей функции тока представляют собой лемнискатические кривые.

Далее Цермело ставит целью получить уравнения движения n точечных вихрей на сфере (п. 3.3). Он пользуется теми же соображениями, что и для плоскости: имея функцию тока и считая, что каждый вихрь системы движется со скоростью, индуцируемой остальными точечными вихрями, он, исходя из структуры функции тока, сразу же получает уравнения движения в гамильтоновой форме:

$$\begin{cases} \varepsilon_i \sin\theta_i \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i} \\ \varepsilon_i \sin\theta_i \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь (λ_i, θ_i) — сферические координаты i-того вихря интенсивности $\Gamma_i = 2\pi\varepsilon_i$, а гамильтониан,

[8]Докторская диссертация, содержащая решение задачи трех вихрей на плоскости, была защищена В. Грёбли в Гёттингене в 1877 г. и впоследствии надолго забыта. Ей посвящена интересная статья [17]. Цермело работу Грёбли не цитирует.

который Цермело называет «собственным потенциалом», имеет вид

$$H=\sum_{i,j}\varepsilon_i\varepsilon_j\ln\sin\frac{r_{ij}}{2}, \tag{3}$$

где r_{ij} — хордовое расстояние между i-тым и j-тым вихрем.

Как уже отмечалось, уравнения Цермело по своей форме тождественны уравнениям Боголюбова, имеющим вид [3]:

$$\dot\theta_k=\{H,\theta_k\},\qquad \dot\lambda_k=\{H,\lambda_k\},$$

$$\{\lambda_k,\cos\theta_k\}=\frac{\delta_{ik}}{R^2\Gamma_i},$$

здесь H лишь несущественным множителем отличается от (3).

Особенно изящно уравнения (2) выглядят в (избыточных) декартовых координатах $\boldsymbol{r}_i = (x_{i1},x_{i2},x_{i3})$, $\boldsymbol{r}_i{}^2=R^2$. В этой форме их указал П. Ньютон [39]:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{1}{4\pi R}\sum_{j\neq i}^{N}\Gamma_j\frac{\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{r}_i}{R^2-(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_i)},$$

где $(.\,,.)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Эти уравнения также гамильтоновы со скобкой $\{x_{i\alpha},x_{i\beta}\}=\dfrac{\delta_{i,j}}{R\Gamma_i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}x_{j\gamma}$.

В [21, 22] указана еще одна любопытная форма уравнений, соответствующая уравнениям Лауры [36] для плоскости, в которой вводятся взаимные расстояния между вихрями (хорды) и объемы тетраэдров. Интересно отметить, что влияние кривизны для таких уравнений сводится к добавлению квадратичных членов в скобку Пуассона, которая является линейной для движения вихрей по плоскости [11].

В п. 3.4 Цермело показывает, что, вследствие гамильтоновости уравнений, собственный потенциал системы вихрей остается постоянным, то есть имеется интеграл типа энергии. Он показывает также, что гамильтониан зависит только от расстояний и существуют три интеграла момента. Далее следует доказательство теоремы о сохранении так называемого центра тяжести системы вихрей (аналог центра завихренности на плоскости).

Любопытно заметить, что, выражаясь современным языком, эти три интеграла некоммутативны и образуют алгебру $so(3)$. То есть, для доказательства интегрируемости задачи следует использовать самый общий, некоммутативный вариант теоремы Лиувилля (см., например, в [2, 5, 8]). Локальный вариантом этой теоремы, как известно, является теория Ли.

Конечно, в ту эпоху этими понятиями владели недостаточно, и потому, констатируя тот факт, что для $2n$ уравнений движения точечных вихрей имеется только три (помимо энергии) первых интеграла, Цермело не замечает, что этого достаточно для интегрируемости в квадратурах задачи о движении трех вихрей. То есть, получив уравнения в канонической форме, Цермело строго утверждения о интегрируемости по Лиувиллю задачи 3-х вихрей на сфере не сформулировал. Ссылаясь на Пуанкаре, он отмечает, что эти три интеграла «центра масс» на плоскости дают лишь два независимых интеграла, а недостающий интеграл получается с помощью «закона о постоянстве момента инерции» [43]. Однако в лекциях Пуанкаре мы не находим точного доказательства интегрируемости системы трех вихрей по Лиувиллю, вопреки обратным утверждениями, встречающимся при цитировании [43] (см., например, [17]). Создается впечатление, что Пуанкаре осознавал, что задача 3-х вихрей интегрируема по Лиувиллю, но в его лекциях [43] ни четкой формулировки этого утверждения, ни как такового доказательства мы не находим. Хотя Пуанкаре выписал некоторые интегралы, он не показал их инволютивность. Кроме того, один из приводимых им интегралов является не интегралом, а тождеством. Возможно, что эти лекции Пуанкаре были не очень тщательно записаны.

Четкое доказательство интегрируемости задачи трех вихрей на плоскости было получено в 1902 г. в работе Лауры [36]. Он вычислил скобку Пуассона первых интегралов, применил теорию Ли, и вывел уравнения в частных производных типа Гамильтона–Якоби, интегрирование которых равносильно интегрированию системы канонических уравнений. В следующей работе [37] Лаура получил уравнения движения в относительных расстояниях и указал новый интеграл уравнения для n точечных вихрей, который, конечно, выражается через полученные ранее интегралы. Эти уравнения в относительных расстояниях были в современной форме получены в [20], что позволило рассмотреть новые случаи движения в задаче 4-х вихрей. Эта форма уравнений Лауры, выражаясь современным языком пуассоновых структур, является редуцированной системой на орбите, определяемой линейной скобкой Ли–Пуассона. Как показано в этой работе, в случае сферы к скобке добавляются еще квадратичные члены. Вопросы применения методов теории пуассоновых структур, теории алгебры Ли, топологии к изучению задач вихревой динамики подробно рассматриваются в книге [7]. Систематическое описание результатов Лауры и некоторые новые интересные соображения высказаны в обширной работе русского механика Н.С. Васильева [12]. (В [12] Васильев, в частности, получил каноническую форму уравнений движения вихревых колец).

Последние разделы главы 3 представляют особенный интерес. Здесь Цермело занимается задачей о равновесии n вихрей на сфере, для чего он переходит (п. 3.5) к системе стереографических и комплексных координат. В п. 3.6 рассматриваются статические конфигурации вихрей. Цермело указывает на геометрическую и механическую интерпретации этой задачи (утверждение 3.6.1). Геометрическая интерпретация состоит в том, чтобы расположить на окружности n точек с массами $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ (где $\varepsilon_i = \dfrac{\Gamma_i}{2\pi}$, где Γ_i — интенсивность i-го вихря) таким образом, чтобы произведение $r_{\lambda\mu}^{\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu}$, где $r_{\lambda\mu}$ — расстояние от точки λ до точки μ, было максимальным или минимальным.

При механической интерпретации рассматриваются проекции вихрей на стереографическую плоскость. Здесь приводится теорема 3.6.2, которая гласит, что n вихрей $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ находятся в равновесии только в том случае, когда $\forall i \in \overline{1, n}$ стереографическая проекция вихрей $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \ldots \varepsilon_n$ на экваториальную плоскость относительно вихря ε_i имеет своим центром тяжести центр сферы (считается, что при проекции интенсивность ε_j заменяется на равную ей по величине массу).

Далее Цермело уточняет полученные результаты для малых n. Он доказывает простое утверждение (3.6.3), что два вихря находятся в равновесии друг с другом, когда они расположены в противоположных концах диаметра, а также теорему (3.6.4) о равновесии трех вихрей на сфере.

В п. 3.7 систематически рассматривается задача о равновесии вихрей равных интенсивностей. Пользуясь комплексными переменными, Цермело получает некоторое дифференциальное уравнение на полином n-го порядка, корни которого как раз и дают решение задачи.

Насколько нам известно, это уравнение более нигде в литературе не приведено. Из современных работ по этой проблематике мы рекомендуем работы О'Нейла [40–42], который существенно развил результаты Цермело для случаев равных и разных интенсивностей.

Анализируя это дифференциальное уравнение, Цермело сразу же получает несколько простых и естественных решений, составляющих утверждение 3.7.3. Его суть в том, что n одинаковых вихрей на сфере находятся в равновесии в трех следующих случаях: 1) если вихри образуют правильный многоугольник, вписанный в большую окружность, 2) если они образуют правильный $(n-2)$-угольник на большой окружности и под одному вихрю в концах диаметра, перпендикулярного ее плоскости, 3) если они являются вершинами правильного многогранника с $n = 4, 6, 8, 12, 20$.

Все эти достаточны простые результаты указаны в современных работах, см., например, [7, 38, 39].

Конечное утверждение 3.7.4 представляет собой любопытную теорему для $n = 4$, которую Цермело доказывает методами элементарной геометрии: четыре одинаковых вихря находятся в равновесии тогда и только тогда, когда они образуют либо квадрат, вписанный в большую окружность, либо правильный тетраэдр.

Сформулируем интересную задачу, навеянную рассуждениями Цермело. Итак, известно, что для $n \leqslant 4$ все статические вихревые конфигурации являются симметричными. Для $n > 4$ мы можем допустить существование, наряду с симметричными (частично указанными Цермело), несимметричных статических конфигураций равновесия. В этом предположении можно сослаться на аналогию со случаем относительных фигур равновесия (стационарных конфигураций, при которых системы вихрей вращаются как твердое тело), где существование несимметричных конфигураций уже установлено: соответствующие примеры были получены для плоскости, см., например, [18, 27]. Современные исследования стационарных и статических вихревых конфигураций на плоскости и сфере см. в [21, 39].

Отдельный вопрос, поставленный еще У. Томсономом (1878 г.), представляет анализ устойчивости стационарного вращения правильного вихревого n-угольника (томсоновских конфигураций). Окончательно он был разрешен в работе [34].

Задача 3-х вихрей на сфере

Глава 4 посвящена проблеме интегрируемости трех вихрей на сфере.

Как уже отмечалось, не владея общим подходом, Цермело по сути передоказывает для частного случая теорему Лиувилля об интегрируемости. Он вводит взаимные расстояния, разделяет задачу на относительное и абсолютное движения и занимается непосредственно интегрированием уравнений для взаимных расстояний в явном виде (п. 4.2). Он отмечает, что полученные им уравнения вполне аналогичны уравнениям Эйлера, описывающим вращение твердого тела вокруг неподвижной точки, и пользуясь этой аналогией действует так же, как при изучении полодий в уравнениях Эйлера–Пуансо (первая интерпретация Пуансо).

Как это общепринято было в XIX веке, Цермело понимает интегрирование задачи как нахождение явного решения в тета-функциях (в современной динамике такая постановка отходит на второй план, уступая место более продуктивным методам исследования интегрируемости, таким как топологический и качественный анализ). Он отмечает, что в случае произвольных интенсивностей задача не решается и рассматривает различные частные случаи. Прежде всего он указывает случай, в котором задача, действительно, допускает эллиптическую квадратуру. Это, как легко видеть, случай совпадающих интенсивностей. Анализируя дискриминанты уравнений третьей степени, Цермело вычисляет периоды через обращения эллиптических интегралов. Подбирая параметры так, чтобы периоды стремились к бесконечности, он находит асимптотические решения, формулирует условие для устойчивости относительных равновесий и, собственно, таким образом относительные равновесия и находит.

Эти результаты тем более замечательны, что Цермело имел на вооружении лишь технологию тета-функций, мало приспособленную для получения информации о качественных свойствах движения. Конечно, с современной точки зрения его анализ кажется ограниченным и недостаточно использующим геометрическую. интерпретацию. В этом смысле труд Цермело принадлежит еще XIX столетию, когда современные методы, восходящие к Пуанкаре, только пробивали себе дорогу и еще не были в ходу у математиков.

Далее (п. 4.3) обсуждается общий случай различных интенсивностей. В отличие от случая равных интенсивностей решение невозможно получить в эллиптических квадратурах. Цермело отмечает, что относительное движение трех вихрей или периодично, или асимптотически стремится к фигуре относительного равновесия. В заключение приводится классификация этих периодических движений и предельных конфигураций.

Абсолютное движение

Основная часть диссертации Цермело посвящена анализу относительного движения вихрей. Но в заключительном разделе он также рассматривает абсолютное движение задачи 3-х вихрей (п. 4.5)[9]. Он формулирует несколько теорем (правил), некоторые из которых допускают обобщение на случай произвольного количества вихрей.

Первое правило является достаточно простым, оно гласит: центр тяжести системы вихрей представляет собой неподвижную в абсолютном пространстве точку. Второе правило устанавливает, что за каждый период относительного движения вся фигура совершает поворот вокруг центральной оси (диаметра, проходящего через центр тяжести) на один и тот же угол. Далее Цермело вводит понятие сферического цента: проведем радиус OA, который перпендикулярен плоскости треугольника, составленного из вихрей, тогда точка A на сфере будет называться сферическим центром. Третье правило говорит, что если сферический центр пересекает некоторую экваториальную плоскость, то его траектория симметрична относительно этой плоскости. Последние два правила имеют непосредственную аналогию с теоремами Дж. Синга [45]. Они подтверждают, что общую картину движения трех вихрей в абсолютном пространстве можно составить из отдельных кусков — траекторий на конечном промежутке времени, размножив эти куски с помощью некоторых законов симметрии. То есть, вообще говоря, достаточно описать траекторию на некотором фиксированном куске, который определяется периодом относительного движения, и затем получить всю траекторию уже в абсолютном пространстве.

Четвертое правило не имеет явного аналога для случая движения вихрей на плоскости. Оно гласит, что плоскость вихревого треугольника при движении заметает конус, вершиной которого служит центр тяжести. В некотором смысле, здесь прослеживается параллель с динамикой твердого тела. По своей геометрической и динамической сути, это правило близко ко второй интерпретации Пуансо движения свободного волчка. Как известно, Пуансо мыслил себе общее движение твердого тела вокруг неподвижной точки как движение некоего конуса, связанного с твердым телом, катящегося по другому неподвижному конусу (связанному с пространством). Причем мгновенная ось этого вращения заполняет некоторый конус как в теле, так и в пространстве (так называемые аксоиды). Здесь Цермело, видимо, пытается высказать аналогичные идеи для задачи движения трех вихрей. Его соображения довольно интересны, хотя не имеют той изящной формы, что присуща рассуждениям Пуансо.

Цермело также пытается выписать общие уравнения для угловой скорости такого движения. Однако, как он пишет сам, ему не удалось записать дифференциальное уравнение, с помощью которого определяется ω, в простом с аналитической точки зрения виде, позволяющем более точно исследовать форму возникающего конуса. Возможно, эту интерпретацию стоит изучить подробнее и сделать более прозрачной. В любом случае, замечания Цермело очень интересны.

[9]Текст Цермело по абсолютному движению представляет собой скорее предварительный набросок. Он был обнаружен в виде отдельной довольно неразборчивой рукописи.

В заключение, Цермело рассматривает простейшие движения, именуемые в динамике твердого тела перманентными вращениями (в случае Эйлера) или вращениями Штауде (в более общем случае тяжелого тела). (В общем случае это относительные равновесия, которые были систематически рассмотрены Раусом [44], см. также [6].) Пятое правило указывает три случая, когда система трех вихрей с произвольными интенсивностями твердотельно вращается вокруг своей центральной оси: 1) когда треугольник является равносторонним; 2) когда главная точка этого треугольника (центр тяжести треугольника, в вершины которого поместили массы, равные котангенсам соответствующих углов) лежит на центральной оси, а его плоскость на большой окружности, 3) центр тяжести совпадает с центром сферы. Когда ω обращается в нуль, мы приходим к случаю абсолютного равновесия: вихревой треугольник лежит на большой окружности, а его центр тяжести совпадает с главной точкой.

Отметим, что В. Грёбли, изучая задачу движения n вихрей на плоскости, рассматривал абсолютное движение только для некоторых конкретных интегрируемых задач, которые он смог разрешить в квадратурах [28]. Общие теоремы, касающиеся глобальных свойств движения системы, были получены существенно позже Дж. Сингом в его статье [45] (1949 г.), также посвященной задаче 3-х вихрей на плоскости. Как мы видим, утверждения и теоремы Цермело во многом обобщают результаты Синга. Насколько нам известно, нигде в литературе подобные результаты не приводились. Как правило, исследование задачи 3-х вихрей на сфере ограничивалось относительным движением. В [24] дается общее представление об абсолютном движении системы 3-х или более вихрей на основе методов качественного анализа. Показано существование достаточно обширного класса движений — так называемых *хореографий* — когда в некой вращающейся системе координат вихри равной интенсивности движутся друг за другом по некоторой фиксированной замкнутой кривой на сфере. Эти хореографии могут быть устойчивы и играют важную роль при анализе перехода к хаосу и качественном понимании других типов движений [10].

Работа А. В. Борисова выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных научных исследований (коды проектов 08-01-00651 и 07-01-92210). Работа С. М. Рамоданова поддержана грантом РФФИ 08-01-00025.

Список литературы

[1] Арнольд В.И., Хесин Б.А, *Топологические методы в гидродинамике,* М.: МЦНМО, 2007, 392 с.

[2] Арнольд В.И., *Математические методы классической механики*, М.: «Наука», 1989.

[3] Богомолов В.А., Динамика завихренности на сфере, *Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа*, 1977, № 6, с. 57–65.

[4] Богомолов В.А., О двумерной гидродинамике на сфере, *Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана*, 1979, т. 15, № 1, с. 29–35.

[5] Болсинов А.В., Фоменко А.Т., *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, М.-Ижевск: Изд-во «РХД», 1999, т. 1,2.

[6] Борисов А.В., Мамаев И.С., *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, М.-Ижевск: Изд-во «РХД», ИКИ, 2005, 576 с.

[7] Борисов А.В., Мамаев И.С., *Математические методы динамики вихревых структур*, М.-Ижевск: Изд-во «РХД», ИКИ, 2005, 368 с.

[8] Борисов А.В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*, Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999, 464 с.

[9] Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С., Абсолютные и относительные хореографии в задаче о движении точечных вихрей на плоскости, *Доклады РАН*, 2005, Том, 400, №4, с. 457–462.

[10] Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С., Переход к хаосу в динамике четырех точечных вихрей на плоскости, *Доклады РАН*, 2006, Том 408, №1, с. 49-54.

[11] Борисов А.В., Мамаев И.С., Рамоданов С.М., Алгебраическая редукция систем на двумерной и трехмерной сферах, *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, №4, с. 407–416.

[12] Васильев Н.С., Движение бесконечно тонких вихрей, Одесса, 1913, 188 с.

[13] Васильев О.Ф., Об одной забытой работе И.С. Громеки, *Прикл. мат. мех*, 1951, т. 15, вып. 2, с. 261–263.

[14] Громека И.С., О вихревых движениях жидкости на сфере, *Ученые записки Казанского ун-та*, 1885; см. также: Громека И.С., *Собрание трудов*, Москва: АН СССР, 1952, с. 184–205.

[15] Громека И.С., *Собрание трудов*, Москва: АН СССР, 1952.

[16] Громека И.С., *Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости* (докторская диссертация), Отд. изд. Казань, 1881, 107 стр.; Громека И.С., *Собрание трудов*, Москва: АН СССР, 1952, с. 76–148.

[17] Aref H., Rott N., Thomann H., Gröbli's solution of the three-vortex problem, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1992, vol. 24, pp. 1–20. (Имеется русский перевод: Ареф Х., Ротт Н., Томанн Х., Решение Грёбли задачи трех вихрей, в сб. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* (ред. Борисов А.В., Мамаев И.С., Соколовский М.А.), М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «РХД», 2003, с. 677–703.)

[18] Aref H., Vainchtein D.L. Point vortices exhibit asymmetric equilibria [Scientific Correspondence] Nature, Vol. 392 (6678), 23 April 1998. pp. 769-770

[19] Boatto S., Koiller J., Vortices on closed surfaces, arXiv:0802.4313.

[20] Borisov A.V., Pavlov A.E., Dynamics and Statics of vortices on a Plane and a Sphere. I, *Regul. Chaotc Dyn.,* 1998, vol. 3, №1, pp. 28–39.

[21] Borisov A.V., Lebedev V.G., Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere. II. General compact case, *Regul. Chaotc Dyn.,* 1998, vol. 3, №2, pp. 99-–114.

[22] Borisov A.V., Lebedev V.G., Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere. III. General compact case, *Regul. Chaotc Dyn.,* 1998, vol. 3, №4, pp. 76—90.

[23] Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S., A new integrable problem of motion of point vortices on the sphere, in *IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence (Moscow, 25-30 August, 2006)*, Borisov A.V. *et al.* (eds.), Springer-Verlag, 2008, pp. 39—53.

[24] Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A., New periodic solutions for three or four identical vortices on a plane and a sphere, Supplement Volume 2005 of *DCDS* devoted to the 5th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations (Pomona, California, USA, June 2004), pp. 110–120.

[25] Crowdy D., Point vortex motion on the surface of a sphere with impenetrable boundaries, *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, 036602.

[26] Ebbinghaus H.-D., Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work, Springer, 2007.

[27] Glass K., Equilibrium configurations for a system of N particles in the plane Phys. Lett. A 235 (1997) 591-596.

[28] Gröbli W., Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden, Zürich: Züricher und Furrer, 1877, 86 pp. Also published in *Vierteljahrssch. d. Naturforsch. Gesellsch.*, 1877, vol. 22, pp. 37—81, 129–165.

[29] Helmholtz H., Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, *J. Reine Angew. Math.*, 1858, vol. 55, pp. 25–55. Reprinted in: *Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann Helmholtz*, Leipzig: Barth, 1882, I, pp. 101—134.

[30] Kidambi R., Newton P.K., Point vortex motion on a sphere with solid boundaries, *Phys. Fluids*, 2000, vol. 12, no. 3, pp. 581–588.

[31] Kidambi R., Newton P.K., Collapse of three vortices on a sphere, *Il Nuovo Cimento C*, 1999, vol. 22, no. 6, pp. 779–791.

[32] Kidambi R., Newton P.K., Streamline topologies for integrable vortex motion on a sphere, *Physica D*, 2000, vol. 140, pp. 95–125.

[33] Kidambi R., Newton P.K. Motion of three point vortices on a sphere, *Physica D*, 1998, vol. 116, pp. 143–175.

[34] Kurakin L.G., Yudovich V.I., The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon, *Chaos*, 2002, vol. 12, no. 3, pp. 574-–595. (См. также расширенный русскоязычный вариант статьи: Куракин Л.Г., Юдович В.И., Устойчивость стационарного вращения правильного вихревого многоугольника, в сб. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* (ред. Борисов А.В., Мамаев И.С., Соколовский М.А.), М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «РХД», 2003, с. 238-299.)

[35] Lamb H., *Hydrodynamics*, New York: Dover Publications, 1932. Пер. на рус: Г. Ламб, *Гидродинамика*, М.: Гостехиздат, 1947; доступн. изд.: М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2003.

[36] Laura E., Sul moto parallelo ad un piano di un fluido in cui vi sono N vortici elementari, *Atti Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 1902, vol. 37, pp. 469–476.

[37] Laura E., Sulle equazioni differenziali canoniche del moto di un sistema di vortici elementari, rettilinei e paralleli, in un fluido incompressibile indefinito, *Atti Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 1905, vol. 40, pp. 296–312.

[38] Lim Ch.C., Montaldi J., Roberts M., Relative equilibria of point vortices on the sphere, *Physica D*, 2001, vol. 148, pp. 97–135.

[39] Newton P.K., *The N-Vortex Problem. Analytical Techniques*, Springer-Verlag, 2001.

[40] O'Neil K.A., Relative equilibrium and collapse configurations of four point vortices, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, №2, pp. 117–126.

[41] O'Neil K.A., Equilibrium configurations of point vortices on a sphere, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, №1, pp. 1-8.

[42] O'Neil K.A., Relative equilibria of point vortices that lie on a great circle of a sphere, *Nonlinearity*, 2008, vol. 21, no. 9, pp. 2043–2051.

[43] Poincaré H., *Théorie des Tourbillions*, ed. G. Carré, Paris: Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 1893. (Имеется русский перевод: Пуанкаре А., *Теория вихрей*, М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2000.)

[44] Routh E.J., *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion, Particularly Steady Motion,* London: MacMillan & Co., 1877.

[45] Synge J.L., On the motion of three vortices, *Can. J. Math.,* 1949, vol. 1, pp. 257—270.

[46] Zermelo E., *Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche*, Habilitation thesis, 1899.

[47] Zermelo E., Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1902, vol. 47, pp. 201–237. (Имеется русский перевод: Цермело, Э., Гидродинамические исследования вихревых движений на поверхности сферы, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, № 1, с. 81–110.)

[48] Zermelo E., Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche (Zweite Mitteilung), Manuscript with pages 61—117, Universitätsarchiv Freiburg, Zermelo *Nachlass*, C 129/225.
§ 5. Die absolute Bewegung, Manuscript with pages 119—131, Universitätsarchiv Freiburg, Zermelo *Nachlass*, C 129/253.

[49] Zermelo E., *Untersuchungen zur Variations-Rechnung*, Ph.D. Thesis, Berlin, 1894.

[50] Zermelo E., Ueber einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie, *Annalen der Physik und Chemie*, 1896, Bd. 57, pp. 485-–494.

[51] Boltzmann L., Entgegnung auf die wärmetheoretischen Betrachtungen des Hrn. E. Zermelo, *Annalen der Physik und Chemie*, 1896, Bd. 57, pp. 773-786. Reprinted in *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. 3, pp. 567–578.

[52] Zermelo E., Ueber mechanische Erklärungen irreversibler Vorgänge. Eine Antwort auf Hrn. Boltzmann's 'Entgegnung', *Annalen der Physik und Chemie*, 1896, Bd. 59, pp. 793-–801.

[53] Boltzmann L., Zu Hrn. Zermelo's Abhandlung "Ueber die mechanische Erklärung irreversibler Vorgänge", *Annalen der Physik und Chemie*, 1897, Bd. 60, pp. 392–398. Reprinted in *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. 3, pp. 579–586.

[54] Meleshko V.V., Aref H., Bibliography of Vortex Dynamics 1858–1956, *Advances in Applied Mechanics*, 2007, vol. 41, pp. 197–292.

[55] Kirchhoff G. R. Vorlesungen über Mathematische Physik. Teubner, Leipzig. 1876, v. I.