Динамические системы — прошлое и настоящее[1]

Ю. Мозер

Пленарная лекция на Международном конгрессе математиков (Берлин, 1998, 18–27 августа)

Введение

Мне оказали большую честь, пригласив прочитать лекцию на Международном конгрессе математиков, здесь, в Берлине. Этот город (вместе со своей Академией) заставляет вспомнить богатую математическую традицию прошлого века. Мне хотелось бы упомянуть имена Якоби, Дирихле и Вейерштрасса; все они внесли свой вклад в ту область науки, о которой я буду говорить в начале моей лекции.

В последний раз Международный конгресс математиков проходил в Германии 94 года назад. Это было в 1904 году в Гейдельберге (одновременно с празднованием 100-летия со дня рождения Якоби).

Конечно, такая долгая пауза не случайна, если вспомнить, что Германия послужила ареной Первой мировой войны, Второй мировой войны и нацистского террора. В те времена Германия распространяла по всему миру опустошение и страх. В те времена — говоря словами моего друга Стефана Гильдебрандта — Германия вышла из сообщества цивилизованных стран. И хотя те события отделены от нас более чем половиной столетия, я считаю себя обязанным напомнить о тех страшных временах, потому что я сам? пережил этот мрачный период, родившись в этой стране.

В те времена наука тоже была растоптана, и многих выдающихся ученых выбросили с занимаемых мест, что причинило непоправимый ущерб. Между 1933 и 1938 годами пришлось распустить более чем одну треть факультетов в университетах Германии! Это напоминает мне об истории Гильберта, о которой я узнал от своего учителя из Геттингена Франса Реллиха. Когда недавно назначенный нацистский министр образования на одном из вечеров спросил Гильберта, уже старого и вышедшего в отставку: «Господин тайный советник, как обстоят дела с математикой в Геттингене сейчас, когда он освобожден от еврейского влияния?» — Гильберт ответил: «Математика в Геттингене? Да ее больше *не существует*!»

[1]Перевод с английского. Оригинальное издание: J. Moser, Dynamical Systems — Past and Present, *Doc. Math. J.*, DMV, Extra Volume ICM I, 1998, pp. 381–402. ©Ю. Мозер, 1998.

Мы не должны забывать об этой низменной странице немецкой истории, но в то же время мы должны оставить ее позади и смотреть вперед. Я очень рад видеть, как много математиков приехали в Берлин, чтобы принять участие в этом конгрессе. Давайте же будем считать это событие новым началом в конце нашего столетия.

⋆ ⋆ ⋆

В своей лекции я хочу представить наиболее значительные, с моей точки зрения, достижения в области динамических систем за последние 50 лет. В настоящее время эта область настолько обширна, что без строгих ограничений моя задача была бы невыполнимой. Я ограничусь системами Гамильтона — именно так Биркгоф интерпретировал данное понятие в своей книге «Динамические системы» 1927 года! Но даже при этом я не пытаюсь дать общий обзор, а скорее выберу несколько тем, которые, на мой взгляд, иллюстрируют серьезные изменения, произошедшие в этой области за последнюю половину столетия. Конечно, моя лекция предназначена не для специалистов, а для широкой аудитории.

Моей путеводной нитью будет проблема устойчивости гамильтовых систем, в которой все еще есть много привлекательных задач. После нескольких исторических замечаний я хочу обсудить некоторые приложения теоремы Колмогорова об инвариантных торах (1954 год). Затем, в третьем разделе, я рассмотрю решение Ша (также Кша) задачи Пенлеве, в четвертом разделе — полностью интегрируемые системы и, если позволит время, в пятом разделе — роль *минимизаторов*[2] в теории Обри–Мазера. Поскольку мое время ограничено, мне придется опустить много смежных тем, хотя некоторые из них очень интересны. В других лекциях на этом заседании будут обсуждаться достижения симплектической геометрии, источником которых отчасти послужила теорема Пуанкаре–Биркгофа о неподвижной точке, что привело к совершенно замечательным результатам, кроме того, я совершенно не буду касаться таких активно развивающихся областей, как эргодическая теория и гиперболические системы.

1. Исторические замечания

а) Проблема устойчивости гамильтоновых систем — это старая нерешенная задача, привлекавшая внимание многих математиков прошлого. Она возникла из потребностей небесной механики и из задачи об устойчивости планетной системы. Ее можно представить как задачу N тел, в которой N материальных точек (с положительными массами m_j) движутся в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^2$ или $\mathbf{R}^3$. Чтобы избежать столкновений, орбиты должны быть ограничены. Точнее, если r_{ij} обозначает расстояние между i-ой и j-ой материальными точками, мы требуем, чтобы вдоль орбит выражение

$$\Delta = \max\nolimits_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \{r_{ij}, \frac{1}{r_{ij}}\}$$

все время было ограничено!

Простейшие решения подобного рода — периодические, в фазовом пространстве им соответствуют замкнутые кривые. Вот почему доказательство существования периодических решений возбуждало такой интерес. Для решения этой задачи Пуанкаре изобрел метод возмущений, а также и топологические доказательства. Однако периодические решения образуют в фазовом пространстве особое множество, и поэтому они не очень интересны для понимания динамического поведения — разве что мы сможем доказать их устойчивость.

[2]Решения, минимизирующие действие. — *Прим. ред.*

Для ответа на вопрос об устойчивости необходимо найти не только отдельные орбиты с ограниченным Δ, но и открытое множество в фазовом пространстве всех таких решений, потому что начальные значения нам известны неточно. Иными словами, нас интересует открытое множество в фазовом пространстве, у которого Δ ограничено и в котором орбиты остаются навсегда!

Несмотря на последние достижения в этой области, данная задача *все еще не решена*! Можно понять, что (при $N \geqslant 3$) дополнение множества орбит, существующих всегда и с ограниченным Δ, будет плотным в фазовом пространстве. А это должно означать, что при сколь угодно малых изменениях начального состояния мы получим орбиты, которые в конце концов уходят на бесконечность или завершаются столкновениями!

В связи с этим интересно процитировать слова Шарлье, высказанные в 1907 году по поводу вопроса об устойчивости планетной системы: «Эту задачу все еще следует считать открытой, хотя не надо быть выдающимся пророком, чтобы предсказать, что ее решение не заставит себя ждать много десятилетий». Не стоит делать предсказаний о нерешенных задачах!

b) Чтобы действовать более конструктивно, вместо периодических решений стали искать квазипериодические. Их можно задать обобщенными рядами Фурье вида

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j\in Z^d} c_j e^{i(j,\omega)t}\right), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d), \tag{$*$}$$

где частоты $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d$ — рационально независимые действительные числа. В классической механике теория возмущений позволяла получать решения, допускающие такое разложение в ряд, еще в прошлом веке. Однако доказательство сходимости этих рядов превратилось в печально известную задачу. Сложность возникает из-за так называемых малых знаменателей — степеней слагаемых вида (j, w), $j \in \mathbf{Z}^d \backslash (0)$, — входящих в запись коэффициентов. Поскольку частоты рационально независимы, эти выражения отличны от нуля, но они могут быть сколь угодно малыми. В конце прошлого века эта задача о сходимости — ведущая к существованию квазипериодических решений — занимала центральное положение в работах таких ученых, как Дирихле, Вейерштрасс (здесь, в Берлине), Пуанкаре и других.

c) Полвека спустя эту задачу *решили*! Обратимся к фундаментальной теореме Колмогорова, которая как раз и утверждает существование таких решений для гамильтоновых систем

$$\dot{q}_k = H_{p_k}, \quad \dot{p}_k = -H_{q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

или, если объединить q, p в вектор $x \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^{2n}$, принимающих вид

$$\dot{x} = JH_x, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \Omega.$$

Мы будем обозначать соответствующий поток через φ^t.

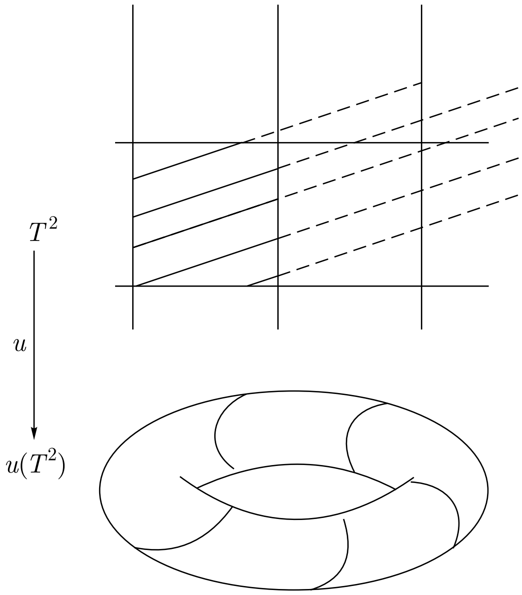
Квазипериодическим решениям можно придать более геометрический вид, используя вложение тора $T^d = \mathbf{R}^d / \mathbf{Z}^d$,

$$u : T^d \to \Omega,$$

при котором «поток Кронекера» $k^t : \theta \to \theta + wt$ на T^d переходит в поток φ^t, ограниченный на тор $u(T^d)$, т. е.

$$u \circ k^t = \varphi^t \circ u.$$

Теперь $u(T^d)$ — это инвариантный тор данного потока, и орбиты на нем действительно квазипериодичны. Более того, по теореме Кронекера каждая из этих орбит является плотной на торе; это означает, что данный тор представляет собой минимальное множество для потока φ^t.



Вложение тора

На Международном конгрессе математиков, проходившем в 1954 году в Амстердаме, Колмогоров сформулировал замечательную теорему: для гамильтоновой системы с гамильтонианом H и n степенями свободы, близкой к «интегрируемой» системе с гамильтонианом H_0 и компактными поверхностями энергии, существует множество таких инвариантных торов, размерности $d = n$. Более того, они образуют множество положительной меры в фазовом пространстве.

Мы придем к понятию интегрируемых систем в разделе 4. Пока достаточно упомянуть, что гамильтоновы системы будут интегрируемыми, если у них достаточно много интегралов, у которых поверхности уровня (в случае когда они компактны) представляют собой инвариантные торы, заполненные квазипериодическими орбитами. Теорема утверждает, что при малых возмущениях многие из этих квазипериодических орбит сохраняют свои свойства.

Здесь не имеет смысла приводить точную формулировку данного фундаментального результата. Но мы хотим указать несколько наиболее важных следствий.

1) В общем случае объединение этих торов открытым множеством не будет. Но оно образует множество положительной меры, так что эти торы не служат исключением!

2) Объединение этих торов в общем случае нигде не плотно, так что соседняя орбита не обязательно ограничена и при $n \geqslant 3$ может уйти на бесконечность. В то же время при $n = 2$ двумерные торы можно использовать как границы области на трехмерной поверхности энергии, что обеспечивает выполнение общих результатов, касающихся устойчивости (о некоторых из них мы упомянем ниже).

   Поскольку множество построенных нами инвариантных торов имеет относительно большую меру, мы можем несколько изменить понятие устойчивости. Мы не будем требовать, чтобы *все* орбиты из некоторой окрестности были все время ограничены, мы хотим, чтобы большая (с большей мерой) их часть была ограничена. Это условие можно назвать «устойчивостью по мере». Данное понятие успешно используется в приложениях. Его справедливость можно обеспечить и для систем с тремя или большим числом степеней свободы.

3) С помощью этой теоремы можно доказать сходимость рядов $(*)$ при условии, что часто-

ты ω удовлетворяют некоторому диофантовому условию. Таким образом, мы ответили на вопрос, поставленный в предыдущем столетии.

Доказательство теоремы Колмогорова было опубликовано В. И. Арнольдом в 1963 году. Доказательство похожей теоремы в более простой ситуации, а именно существование инвариантных кривых у отображений, сохраняющих площадь, на плоскости, было опубликовано в 1962 году докладчиком. За этой техникой закрепилось название «теория КАМ».

Для плоской задачи трех тел существование множества положительной меры, состоящего из квазипериодических орбит, было установлено Арнольдом в 1963 году, но при переходе к $\mathbf{R}^3$ даже в этой задаче мы сталкиваемся с трудностями, которые не преодолены до сих пор.

d) Возвращаясь к захватывающей истории этой задачи, я хочу упомянуть о том, что живейший интерес к ней испытывал Вейерштрасс. Здесь, в Берлине, в зимнем семестре 1880–1881 годов он прочитал курс лекций «О возмущениях в астрономии». В переписке с Софьей Ковалевской (1878) (Acta Math. 35, 30) он утверждает, что нашел разложение в ряд для решений задачи трех тел и попытался, хотя и безуспешно, доказать его сходимость. Он знал о том, что в 1858 году Дирихле сообщил Кронекеру, что нашел метод приближенного решения задачи N тел. Вскоре после этого Дирихле скончался, не оставив записей по данной проблеме. Позднее Вейерштрасс предлагал эту задачу Миттаг–Леффлеру как конкурсный вопрос. Награда, выплаченная шведским королем, была присуждена Пуанкаре, хотя на самом деле задачу он не решил. Но в его знаменитой конкурсной статье было так много новых идей, что его единодушно сочли победителем. Сегодня эта история упоминается во многих источниках; здесь мне хотелось указать на малоизвестную связь этой задачи с берлинскими математиками прошлого столетия!

2. Приложения, отображения

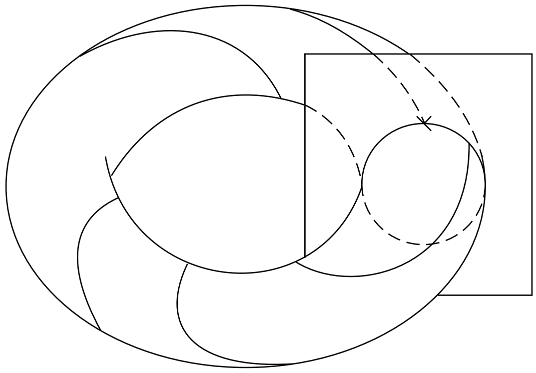
a) Существует много приложений теории КАМ к старым задачам небесной механики. Наибольший интерес представляют результаты об устойчивости систем с двумя степенями свободы. Хочется особо отметить доказательство устойчивости периодических решений в лунной теории Хилла.

Эти задачи интересны скорее с исторической точки зрения.

Сегодня они представляют для астрономов в основном академический интерес. Тем не менее многие физические явления можно описать с помощью гамильтоновых систем, поэтому не удивительно, что у теории устойчивости есть множество других приложений. Я хочу упомянуть только два из них.

b) В начале 1950-х годов в США, Европе (в Церне) и в других местах строились ускорители высокой энергии. В этих устройствах заряженные частицы помещались в очень большую круговую трубку и разгонялись до огромных скоростей. В этой трубке достигалось состояние, близкое к вакууму, чтобы молекулы газа не могли замедлять частицы. Для успешной работы ускорителя надо было добиться, чтобы частицы (в большинстве) не сталкивались со стенкой вакуумной камеры в течение долгого времени. Для этого использовали соответствующее магнитное поле, из-за которого частицы не могли покинуть внутренность вакуумной камеры. Поскольку движение заряженных частиц в магнитном поле описывается гамильтоновыми системами, пришлось решать вопрос об устойчивости.

В те времена предложили новый принцип, обеспечивающий бóльшую устойчивость поведения, и это привело к появлению «синхротрона с переменным градиентом» (AGS), построенного



Отображение сечения Пуанкаре

в Брукхейвене, штат Нью-Йорк. Это «настоящее» приложение, потому что при ответе на вопрос, можно ли построить такой механизм, существенным фактором было именно устойчивое поведение.

Поскольку теория в те времена была не так хорошо развита, пришлось обратиться к численным экспериментам. С вашего позволения я приведу пример из моего собственного опыта. Когда в 1953 году я впервые посетил институт Куранта, его сотрудники участвовали в бурной деятельности по вычислению итераций для отображений сечения, чтобы решить вопрос об устойчивости неподвижных точек. Все это делалось в связи с созданием AGS. Вычисления проводились на УНИВАКе с помощью перфокарт! Сегодня все то же самое можно сделать на персональном компьютере с помощью программы MATLAB за несколько минут. Я могу объяснить вам, к чему привели эти компьютерные картинки: по меньшей мере в двумерном случае результаты вычислений были слишком оптимистичны, чтобы быть правдой!

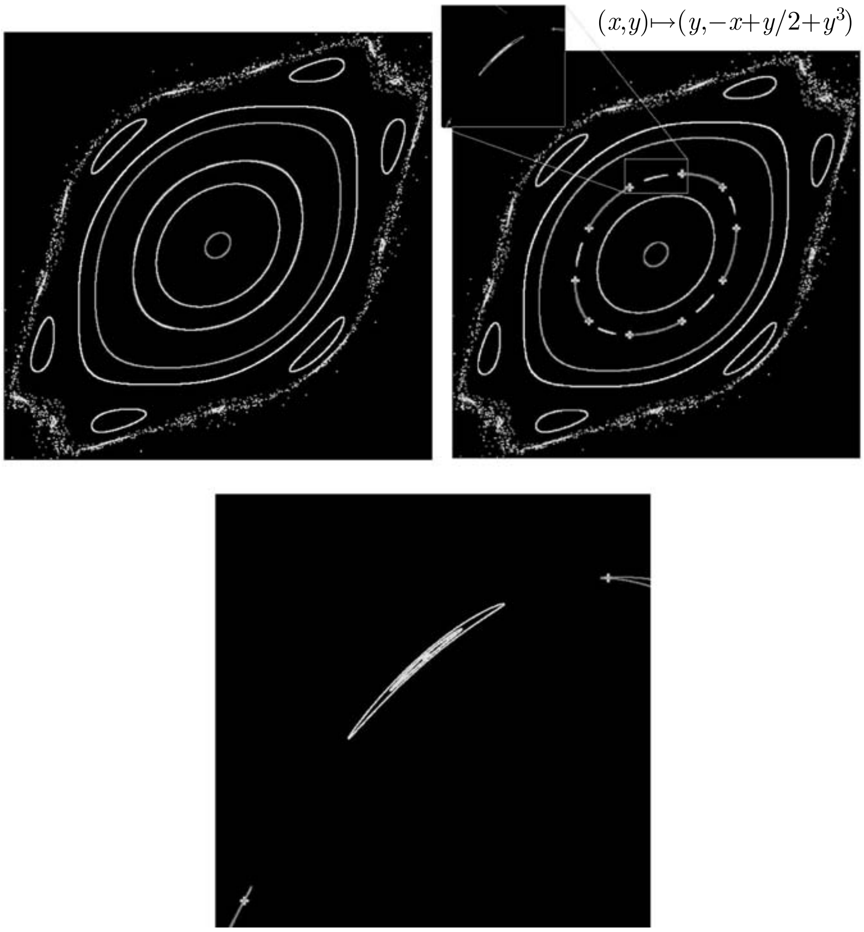
c) Существует стандартная процедура, с помощью которой исследование потока можно свести к исследованию изображения. Это так называемое «отображение Пуанкаре». Оно особенно интересно при изучении устойчивости неподвижной точки у сохраняющего площадь отображения, назовем его φ, на плоскости.

Необходимое условие устойчивости при итерациях отображения φ состоит в том, чтобы линеаризованное отображение было подобно вращению. Речь идет об эллиптической неподвижной точке. Сейчас я покажу вам несколько картинок, полученных в результате примерно тысячи итераций точек под действием нелинейного, сохраняющего площадь отображения. Вблизи неподвижной точки результаты итераций, судя по всему, образуют гладкую кривую при условии, что мы достаточно близко к неподвижной точке, а это указывает на устойчивость. Мы выбрали простое полиномиальное отображение, но полученный результат типичен для подобных отображений.

Как показывают вычисления, итерации произвольной точки попадают на кривые, лежащие вокруг неподвижной точки, что делает очевидной ее устойчивость. На некотором расстоянии эта картинка нарушается и мы покидаем определенную область устойчивости. В те времена поставили следующую задачу: найти метод, позволяющий построить эти кривые и область устойчивости!

Но даже тогда мы не могли не знать, что семейство замкнутых кривых существовать не может и что вычисления слишком все упрощают. Если повысить точность вычислений и использовать микроскоп, то мы поймем, что между такими кривыми существуют области с более сложной динамикой (области неустойчивости, в терминологии Дж. Д. Биркгофа).

Тем не менее, как следует из теории КАМ, множество инвариантных кривых имеет отно-



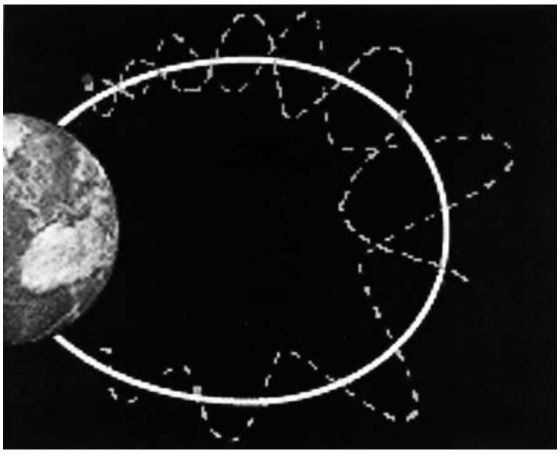
сительно большую меру, что гарантирует устойчивость неподвижной точки. Однако структура орбит на удивление сложна даже для таких простых отображений, как вышеупомянутое полиномиальное! В то же время область неустойчивости содержит «множество Мазера» и сложные движения, которые сегодня принято называть «хаотическими». То, что эти явления действительно имеют место для типичных, сохраняющих площадь отображений, даже в случае действительных аналитических отображений, установил Цендер (1973) и, в более явной форме, Genecand (1990).

Итак, в этом случае предварительные вычисления вводили нас в заблуждение, упрощая ситуацию. Но все-таки они сыграли большую роль, пробудив интерес к этой теме.

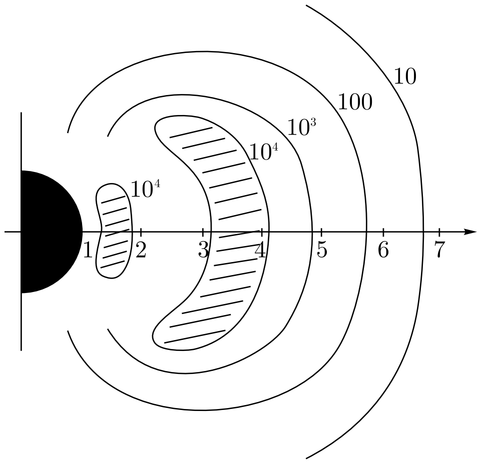
d) Задача Штермера.

Как известно, в магнитном поле Земли существует еще одна область скопления заряженных частиц, довольно большая по размерам. В 1957 году появились первые спутники, и вскоре после этого было обнаружено, что Землю окружают (два) пояса заряженных частиц, возникших из-за ее магнитного поля. Еще в начале столетия было известно о наличии таких заряженных частиц в верхних слоях атмосферы и о том, что именно они служат причиной северных (и южных) полярных сияний. Именно Штермер (кстати, он был председателем Международного конгресса математиков в 1936 году в Осло) вычислил орбиты этих заряженных частиц, движущихся в магнитном поле Земли, которое он представлял как магнитный диполь. Получилась интересная нелинейная гамильтонова система.

Наблюдения со спутников привели к открытию двух окружающих Землю областей, так на-



Задача Штермера



Пояс ван Аллена

зываемых поясов ван Аллена, в которые попадают заряженные частицы. Как оказалось, эти пояса представляют собой пример магнитной бутылки, к которой можно применять теорию устойчивости (М. Браун 1970).

Интересно узнать о размерах этих поясов. Для электронов «радиус циклотрона» имеет порядок нескольких километров, а соответствующий период колебаний составляет около одной миллионной доли секунды! «Период отскока», то есть время, необходимое для перехода с северного полюса на южный и обратно, составляет доли секунды.

С 1958 года в дополнение к естественным поясам ван Аллена возникло несколько искусственных поясов радиации из-за взрывов ядерных бомб в высоких слоях атмосферы. Некоторые из созданных таким образом поясов просуществовали несколько лет — что указывает на долговременную устойчивость таких экспериментов, а также на безответственность тех, кто их проводит! Около тридцати лет назад эти испытания были прекращены.

e) Лунная задача Хилла.

В 1878 году Хилл создал теорию движения Луны, которая привлекла к себе внимание и произвела большое впечатление на Пуанкаре. Позднее Дж. Д. Биркгоф писал о ней: «Исследования по лунной теории Хилла, появившиеся в 1878 году, открыли новую, очень важную главу в теоретической динамике». Он установил, что на поверхности энергии

$$\frac{1}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) - \frac{1}{r} - \frac{3}{2}u^2 = \mathrm{const} < 0$$

у модельного уравнения уравнений Луны

$$\begin{cases} \ddot{u} - 2\dot{v} = -\dfrac{u}{r^3} + 3u, \\ \ddot{v} + 2\dot{u} = -\dfrac{v}{r^3}, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{u^2 + v^2}$, существуют 2 периодических решения. Конечно, сегодня этот результат можно получить и более простым путем. Однако прошел почти целый век, прежде чем удалось доказать устойчивость орбит Хилла. Здесь теория КАМ применяется в довольно необычной ситуации (см. работы Conley, Kummer).

3. Задача Пенлеве

a) Наряду с устойчивым поведением в гамильтоновых системах, в частности, в задаче N тел, конечно, можно найти и неустойчивые движения. Сейчас я хотел бы обсудить недавно открытую крайнюю форму неустойчивости, а именно движение в задаче N тел, при котором самое большое из взаимных расстояний становится неограниченным за конечное время! Это довольно неожиданный результат, его трудно себе представить и кажется, что он противоречит нашим (наивным) энергетическим соображениям!

b) В действительности он связан со старой задачей, которую поставил в 1895 году Пенлеве в своих лекциях по небесной механике. (Заметим, что позднее, в 1904 году, Пенлеве делал один из четырех пленарных докладов на Международном конгрессе математиков в Гейдельберге). Почему стали искать такие странные решения? Изначально Пенлеве интересовало изучение *всех* возможных сингулярностей у решений задачи N тел. Очевидно, сингулярности возникают при столкновении двух или более материальных точек. Это так называемые «сингулярности столкновения». Все они обладают тем общим свойством, что положения материальных точек в пространстве конфигураций близки к какому-то определенному положению. Эти сингулярности, особенно когда они возникают при двойных и тройных столкновениях, интенсивно изучались (см. работы Леви–Чивита, К. Л. Зигеля и др.).

Пенлеве задался вопросом, могут ли существовать и другие сингулярности, кроме вызванных столкновениями. Заголовок данного раздела связан как раз с этим вопросом. Очевидно, что в задаче Кеплера их не существует, кроме того, Пенлеве знал, что таких сингулярностей не бывает и в задаче трех тел. Итак, его вопрос был связан с задачей N тел только при $N \geqslant 4$.

Чтобы вкратце описать ситуацию, обозначим через $q_j \in \mathbf{R}^3$, $j = 1, 2, \ldots, N$, положения материальных точек с массами m_j, а через $r_{ij} = |q_i - q_j| > 0$ — расстояния между ними. Ньютонов потенциал записывается по формуле

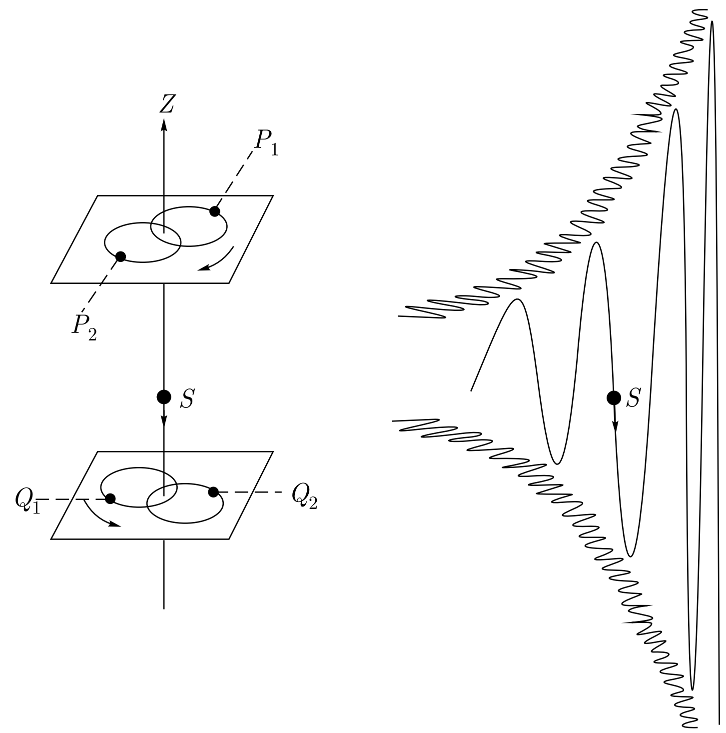
$$-U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Если в момент времени $t = T$ возникает сингулярность, то мы получим $U \to -\infty$, то есть $\min r_{ij} \to 0$ при $t \to T-0$. В 1908 году фон Цейпель обнаружил, что сингулярность, не связанная со столкновением, может возникнуть только в том случае, когда выполняется еще одно условие:

$$\max_{i<j} r_{ij} \to \infty \text{ при } t \to T.$$

На самом деле это свойство и характеризует сингулярность, не связанную со столкновением! Таким образом, поиск сингулярностей, не связанных со столкновением, идентичен поиску крайних форм неустойчивости, с которых мы и начали этот раздел!

c) Не похоже, чтобы все это прояснило ситуацию! Тем не менее Джеффу Ша удалось построить такое необычное решение для задачи пяти тел в $\mathbf{R}^3$. Объясним схематично, как выглядит решение, найденное Ша в 1992 году. Рассмотрим две двойные звезды (P_1, P_2) и (Q_1, Q_2), обе с одинаковыми массами, движущиеся симметрично по двум плоскостям, перпендикулярным оси z. Их почти эллиптические орбиты выбраны так, чтобы угловой момент был равен нулю. Теперь добавим пятую материальную точку, «челнок», который движется взад-вперед по оси z между этими двойными звездами.



Модель Ша

При подходящем подборе параметров можно добиться того, что при каждом сближении с двойной звездой (почти тройное столкновение!) «челнок» будет испытывать огромное ускорение, и время возврата начнет расти настолько быстро, что превысит любое конечное число.

d) Сегодня история этого решения выглядит уже не так прямолинейно. Она началась около двадцати пяти лет назад с совершенно независимых исследований, основанных на работах Конли, МакГихи и Мазера. Около 1974 года Конли и МакГихи, исследуя окрестность тройных столкновений, обнаружили, что вблизи такого тройного столкновения существует гиперболическое поведение, которое для индивидуального решения уже наблюдал Зигель. С помощью этого гиперболического поведения Мазеру и МакГихи в 1974 году удалось построить сингулярность, не связанную со столкновением, причем в коллинеарной задаче четырех тел! Однако у этого решения был недостаток: оно содержало бесконечно много двойных столкновений, неизбежных в одномерной ситуации. Тем не менее это был первый прорыв в решении данной задачи. Поиск решения, свободного от этого недостатка, занял более 18 лет! В 1992 году Джеффу Ша удалось построить решение без столкновений в задаче пяти тел, решив тем самым задачу почти столетней давности! Доказательство очень запутанное и хитроумное, но основной принцип состоит в том, чтобы проходить вблизи последовательности тройных столкновений и на каждом шаге использовать их неустойчивость, чтобы заставить челнок возвращаться с огромным ускорением. Убедиться в том, что столкновений действительно можно избежать, чрезвычайно сложно.

Более раннюю попытку предпринимал Джервер (1984 год). Он построил другую конфигурацию в задаче пяти тел, приводящую к сингулярности без столкновений, однако детали полной версии доказательства не опубликованы до сих пор.

Конечно, это решение не имеет никакого значения для астрономии. Почему же я рассказал о нем? Оно служит примером того, к какому прогрессу может привести изучение гиперболических динамических систем, которое дает нам понимание и методы решения данной задачи. Кроме того, этот пример напоминает нам, сколько усилий было потрачено на изучение сингулярностей у уравнений в частных производных, например в уравнении Навье–Стокса, при условии, что они существуют! Обычно принято считать, что сингулярности — это явление локальное, однако даже в этом (простом!) классическом примере обыкновенных дифференциальных уравнений обнаруживаются настолько сложные сингулярности не локального типа, что их существование долгое время было под сомнением.

4. Интегрируемые системы

а) Все результаты об устойчивости гамильтоновых систем — если оставить в стороне тривиальные исключения — зависят от того, насколько хорошо данную систему можно приблизить с помощью интегрируемой! Но поскольку интегрируемые системы встречаются очень редко, положение кажется безнадежным.

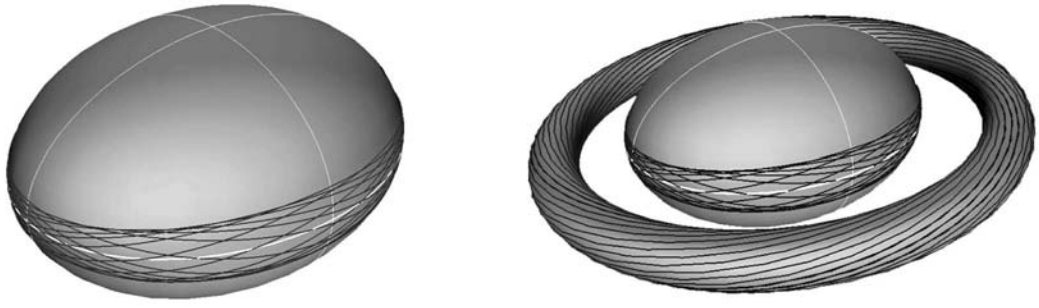
За последние 30 лет эта тема вызывала живейший интерес как у математиков, так и у физиков. Ее бурное развитие повлияло на многие области математики, такие как теория уравнений в частных производных, теория рассеяния, дифференциальная геометрия, даже алгебраическая геометрия и другие. Более того, у нее нашлись технические приложения, например, передача оптических импульсов в волокнах.

Это одна из областей математики, ставшая довольно популярной. Большинство ученых слышали такие ключевые слова, как «солитоны», «уравнения Кортевега–де Фриза».

Тем большее удивление вызывает тот факт, что эта тема очень старая и исследования были начаты еще в прошлом веке! Во времена Эйлера и Якоби интегрируемые системы вызывали большой интерес, потому что их можно было решить «в квадратурах», то есть более или менее явно. Это было очень важно, поскольку теорем существования тогда еще не было. Грубо говоря, гамильтонова система с n степенями свободы называется «полностью интегрируемой», если у нее есть n интегралов движения и их взаимные скобки Пуассона обращаются в ноль. С точки зрения теоремы Э. Нетер это означает, что данные системы допускают n-мерную коммутативную группу действия (через симплектические преобразования). В компактном случае это будет действие тора. Короче говоря, это особенно простые системы, и структуру потока для них очень легко описать. Для двух степеней свободы системы, обладающие симметрией вращения, будут полностью интегрируемыми, потому что они допускают в качестве интегралов угловой момент и энергию. В этом случае «интегрируемость» очевидна.

Кроме того, сегодня существует определенное число интегрируемых систем, у которых интегралы и симметрии не настолько очевидны. Тогда неформально говорят о «скрытой симметрии». Кто бы мог ожидать, что геодезический поток на эллипсоиде с разными осями будет интегрируемым! Это обнаружил Якоби в 1838 году. Он писал Бесселю: «Вчера мне удалось решить в квадратурах уравнения для геодезических линий на эллипсоиде с тремя разными осями. Это самые простые формулы на свете, интегралы Абеля, которые при совпадении осей превращаются в эллиптические». Сегодня можно сказать, что эти решения лежат на двумерном торе, представляющем собой действительную часть многообразия Якоби гиперэллиптической кривой второго рода. За исключением геодезических, проходящих через фокусы, они будут квазипериодическими. Это утверждение можно обобщить на эллипсоиды любой размерности, что и было сделано еще в лекциях Якоби. Существует и много других примеров, таких как задача Эйлера двух неподвижных центров, в которой изучается движение материальной точки под действием ньютонова притяжения к двум неподвижным материальным точкам, или волчок Ковалевской.

Конечно, в этих примерах симметрия была «скрыта». Ее можно было обнаружить только аналитически, а именно решая уравнение Гамильтона–Якоби методом разделения переменных. Позднее это стало излюбленной темой хитроумных задач по механике. Не удивительно, что исследования в этой области прекратились.

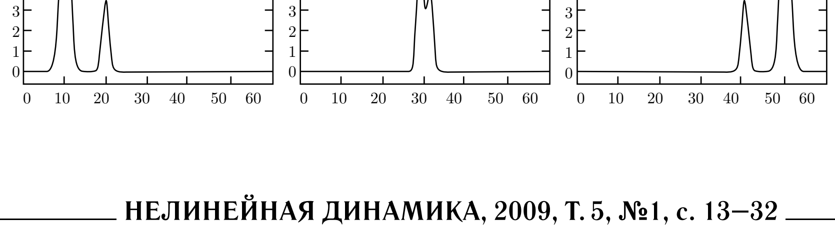


Геодезические на эллипсоиде. Подъем к единичному касательному расстоянию

Когда же Пуанкаре показал, что в общем случае у гамильтоновых систем нет интегралов, помимо самого гамильтониана, интерес к интегрируемым системам упал. Эта область стала считаться устаревшей.

b) Удивительно, каким образом произошло возрождение или новое открытие этой спящей области. Не будет преувеличением сказать, что все началось с эксперимента на компьютере! В 1965 году Крускал и Забуски исследовали уравнение в частных производных, полученное при замене члена вязкости в уравнении Бюргерса на слагаемое, содержащее производные третьего порядка (член дисперсии) $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$. Они хотели посмотреть, что произойдет с разрывными решениями.

В литературе это уравнение принято называть уравнением Кортевега–де Фриза, оно используется в теории волн на воде, однако открытия Крускала и других оказались абсолютно новыми и совершенно неожиданными. Они обнаружили, что при взаимодействии волновых решений возникает странный феномен:



Это уравнение допускает семейство волновых решений с разными скоростями. Казалось, что взаимодействие между ними должно быть абсолютно понятным, а после этого взаимодействия волны возникают вновь, сохранив прежнюю форму и внешний вид.

Говоря в целом и для других эволюционных уравнений, мы можем ожидать разброса и потери волн после взаимодействия. Крускал обозначил эти волны термином «солитон», так как они, судя по всему, сохраняют свою идентичность.

Узнав об этом наблюдении, основанном на численных расчетах, ученые стали искать объяснение этого экстраординарного явления. Я не стану рассказывать здесь всю драматическую историю этих поисков. Вот только несколько этапов. Во-первых, догадались о том, что для этого уравнения должны выполняться другие законы сохранения, помимо трех стандартных (энергии, массы и момента). После нескольких попыток и громоздких вычислений вручную было найдено около десяти интегралов. Наконец, их число удалось увеличить до бесконечности, а Крускал и его сотрудники предложили метод решения этих уравнений, основанный на обратной задаче рассеяния (1968 год).

Вскоре после этого К. Гарднер изобрел скобку Пуассона в функциональном пространстве, относительно которой уравнение Кортевега–де Фриза стало гамильтоновым. Более того, у интегралов скобка Пуассона обращалась в нуль, короче говоря, уравнение Кортевега–де Фриза (KdV) стало первым примером интегрируемой гамильтоновой системы с бесконечным числом степеней свободы! После этого началась интенсивная деятельность. Прежде всего выяснилось, что те интегралы, которые в динамике жидкостей принято называть законами сохранения, можно рассматривать как собственные значения простого оператора: одномерного оператора Шредингера $L = -D^2 + q(x)$, где $q = -u/6$, а в качестве потенциала в нем берется решение уравнения KdV. Иначе говоря, поток, заданный уравнением KdV, определяет сохраняющую спектр деформацию этого оператора. П. Д. Лакс наблюдал изоспектральные деформации, что привело ко многим другим открытиям, в частности к отрытию нескольким другим интегрируемым уравнениям в частных производных, и дало толчок возникновению новых идей.

c) По аналогии с конечномерным случаем можно ожидать, что и это уравнение в частных производных решается в явном виде! Каковы же (скрытые) симметрии? Я выделяю несколько наиболее важных моментов.

i) Если добавить к KdV периодическое граничное условие $u(x+1,t) = u(x,t)$, то есть если рассматривать решения на окружности, тогда все они почти-периодичны по t (Мак-Кин и Трубовиц, 1976). Это совершенно неожиданное свойство для нелинейного уравнения в частных производных. Оно отражает интегрируемость этого уравнения. Например, у геодезических на эллипсоиде все решения квазипериодичны, за исключением орбит, проходящих через фокусы. А в случае KdV таких исключений нет! Доказательство основано на том, что изоспектральные многообразия представляют собой бесконечномерные торы, которые можно понимать как действительную часть многообразия Якоби на римановой поверхности (комплексной кривой) бесконечного рода, а на ней поток будет линейным. Эта кривая получается следующим образом. Уже давно известно, что спектр одномерного оператора Шредингера с периодическим потенциалом является «полосатым», то есть в общем случае он содержит бесконечно много промежутков, сгущающихся на $+\infty$. Теперь рассмотрим двойное покрытие комплексной плоскости и склеим 2 его листа вдоль этих промежутков обычным способом. Это даст нам искомую комплексную гиперэллиптическую кривую, и ее род будет равен количеству промежутков — если оно конечно.

ii) Теория обращения спектра. Одна из старых задач спектральной теории — это построение потенциала оператора по его спектру. Она противоположна обычной задаче спектральной теории. Обычно ответ выглядит слишком сложно, либо решение не является единственным. Но в 1976 году С. Новиков и его сотрудники нашли решение для всех потенциалов, обладающих потенциалом «конечной лакуны».

А именно, пусть нам дано множество, состоящее из конечного числа непересекающихся промежутков, один из которых — это полуинтервал, уходящий на $+\infty$. Мы хотим найти все потенциалы, для которых эти промежутки образуют спектр. Ответ формулируется на языке гиперэллиптических функций на вышеупомянутой гиперэллиптической кривой. В случае одного (наполовину бесконечного) промежутка потенциал равен константе, для двух промежутков (род 1) потенциалом будет эллиптическая функция (уравнение Ламе) и т. д.

d) Еще один поразительный факт состоит в том, что теория солитонов положила на лопатки приложения в теории коммуникаций. Ее основное уравнение — не KdV, но нелинейное уранение Шредингера:

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0.$$

В 1971 году Захаров и Шабат, используя идеи П. Лекса, показали, что это интегрируемая система. У этого уравнения тоже есть «солитоны», обладающие необычайной устойчивостью, чем и воспользовались физики (Hazegewat (1973), Mollenauer (1980)) при передаче сигнала по оптическим волокнам. Здесь солитоны описывают огибающую волнового пакета.

Этот подход успешно применялся при передаче на большие расстояния (около 10000 км) ультракоротких импульсов. Потери оказались меньше, чем можно было рассчитывать с помощью стандартных методов.

e) Невозможно даже слегка затронуть многочисленные ответвления теории интегрируемых систем. Вопрос о том, почему изоспектральная деформация приводит к возникновению систем, связанных с симплектической формой, позволил получить интересные приложения алгебр Каца–Муди. Для старой задачи Шоттки необходима характеризация тех абелевых торов, которые представляют собой многообразия Якоби на некоторой алгебраической кривой. В 1986 году Шиота (Shiota) нашел ответ на этот вопрос в терминах решений «КР-уравнения», то есть уравнения в частных производных, обобщающего уравнение Кортвега–де Фриза. Таким образом, эта задача алгебраической геометрии взаимосвязана с интегрируемыми уравнениями в частных производных.

С аналитической точки зрения был поставлен (и разрешен) вопрос о том, можно ли применить технику КАМ к уравнениям в частных производных, например, можно ли установить существование квазипериодических решений у возмущенного уравнения KdV: $u_t + uu_x + u_{xxx} = \epsilon(g(x,u))_x$, где g — действительнозначная аналитическая функция, периодическая по x. Действительно, для малых значений у этого уравнения можно найти квазипериодические решения. Необходимая для этого теория высокотехнична. Ее создавали Куксин и, последовательно, Пёшель, Крейг, Вэйн и Бургейн (Pöschel, Craig, Wayne, Bourgain). Однако следует указать, что в данном случае полученные таким способом решения образуют «малое» подмножество фазового пространства.

5. Разрушение устойчивости

a) Что происходит, если постепенно увеличивать возмущение интегрируемой системы? Оказывается, структура инвариантных торов разрушается, как и устойчивость системы! Однако инвариантные торы вырождаются в некоторые инвариантные множества, в общем случае канторовы. Это так называемые множества Обри–Мазера. Их изучает теория, созданная независимо друг от друга физиком Обри и Джоном Мазером. Они искали ответ на совершенно разные вопросы: Обри изучал устойчивые состояния в простой модели одномерных кристаллов в статической физике твердого тела, тогда как Мазера интересовали инвариантные множества для отображений, сохраняющих площадь. В конце концов стало понятно, что это одна и та же теория. Эта теория (Обри–Мазера, 1982 год) стала значительным достижением для динамических систем, но, кроме того, она связана с интересными результатами в дифференциальной геометрии.

Основную идею этой теории можно продемонстрировать на примере простой задачи о геодезическом потоке на двумерном торе $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Зададим на $\mathbf{R}^2$ и обозначим ее через $\mathbf{Z}^2$ — периодическую метрику, g. Соответствующий геодезический поток приводит к появлению гамильтоновой системы на касательном расслоении $T^*(T^2)$ и к единично-касательному расслоению $\varepsilon = T^*(T^2_1)$ как трехмерной поверхности энергии. Для плоской метрики, обозначаемой через g_0, все геодезические — это прямые, и семейство параллельных прямых поднимается до инвариантного тора на ε. В соответствии с теорией КАМ некоторые из этих торов не разрушаются в результате возмущения. А именно это торы, у которых тангенс угла наклона представляет собой иррациональное число, плохо приближаемое рациональными. В частности, орбиты, находящиеся между двумя такими торами, запираются, и поток на ε, конечно, не эргодичен.

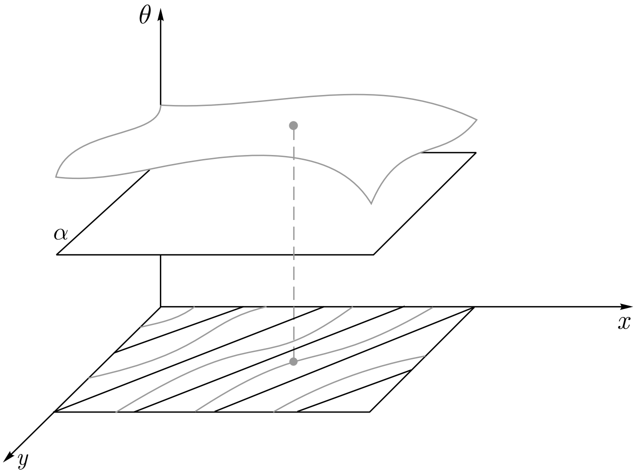
С другой стороны, около 10 лет назад В. Донней (V. Donnay) нашел на 2-торе гладкую метрику, назовем ее g_1, для которой геодезический поток эргодичен. Следовательно, при деформации, переводящей g_0 в g_1, структура инвариантных торов должна разрушаться.

b) Чтобы представить себе эту ситуацию, спроектируем поток на таком инвариантном торе на конфигурационное пространство, то есть в $\mathbf{R}^2$. Мы увидим, что орбиты на таком инвариантном торе проектируются в $\mathbf{Z}^2$ — инвариантное расслоение, состоящее из геодезических.

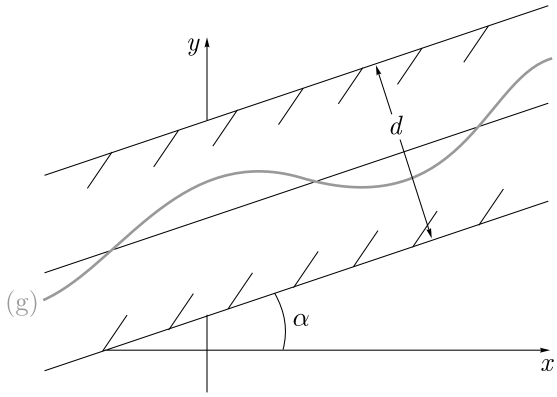
В терминологии вариационного исчисления это «поле экстремалей». Классический результат, восходящий к Вейерштрассу, состоит в том, что геодезические, принадлежащие полю экстремалей, служат «минимизаторами», то есть на любом отрезке такой геодезической достигается минимум расстояния между его концами. Иначе говоря, все орбиты, принадлежащие инвариантному тору, при проектировании переходят в минимизаторы. Это и есть — по крайней мере так можно считать — ключ к теории Обри–Мазера. Таким образом, ее цель — изучение минимизаторов на множестве всех геодезических. В общем случае это собственное подмножество данного множества. На самом деле классическая теорема Э. Хопфа говорит нам, что метрика, в которой все геодезические служат минимизаторами, обязательно будет плоской ($K = 0$). Минимизаторы на торе когда-то изучал Хедлунд, опиравшийся на более ранние работы своего учителя М. Морса (1924 год). Он называл их «геодезические класса А».

c) Эти минимизаторы (или геодезические класса А) пересекают друг друга не более одного раза, как и прямые. Более того, они обладают тем существенным свойством, что попадают в полосу, ограниченную двумя прямыми линиями, расстояние между которыми D зависит только от метрики, но не от конкретного минимизатора.

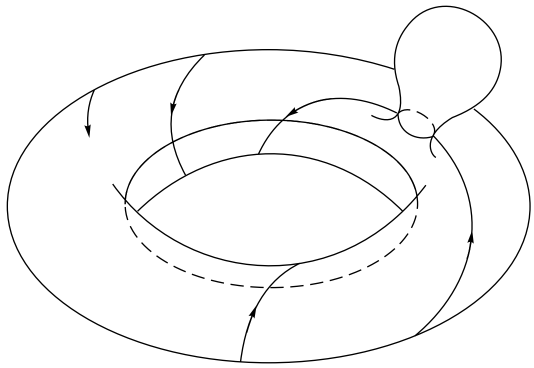
В частности, каждому минимизатору можно поставить в соответствие направление, которое мы обозначим $\theta \pmod{2\pi}$. Более того, можно показать, что для каждого значения $\alpha = \theta/2\pi \pmod{2\pi}$ множество этих минимизаторов, $\mathcal{M}_\alpha$, не пусто. Теперь по меньшей мере для иррациональных α мы можем объединить соответствующее поле экстремалей, состоящее из этих непересекающихся минимизаторов из $\mathcal{M}_\alpha$, и получить минимальное расслоение при условии, что эти минимизаторы плотны на торе и что поднятие данного расслоения покрывает инвариантный тор. Однако, как показывают простые примеры «шишковидной» метрики, бывает, что при проектировании на тор эти минимизаторы не плотны. В этом случае они обеспечивают только «расщепление», покрывая только часть тора.



Проекция инвариантного тора в минимальное расслоение



«Захват» минимизаторов



«Шишковидная» метрика по Бенгарту

Тогда эти рекурентные элементы из $\mathcal{M}_\alpha$ поднимаются до инвариантного множества, на самом деле единственного. Оказывается, это минимальное множество, которое можно сопоставить любому значению α. Есть предположение, что при деформации метрики инвариантный тор вырождается в множество Мазера.

Я рассказываю об этом, потому что хочу показать, что множества Мазера получаются совершенно естественным путем, если из множества всех орбит выбирать только те, которые служат минимизаторами (и как раз не стационарны).

d) Этот принцип выбора минимизаторов из класса всех решений уравнений Эйлера очень полезен, в частности, для эллиптических уравнений в частных производных, возникающих в вариационной задаче, удовлетворяющей условию Лежандра. Он доказал свою необходимость и в дифференциальной геометрии. Теорию Мазера можно обобщить на минимальные расслоения на торе более высокой размерности, если заменить орбиты минимальными поверхностями коразмерности 1. Еще интереснее изучать такие минимизаторы коразмерности 1 на многообразиях, у которых кривизна соответствующей метрики меньше нуля. Вышеупомянутое ключевое свойство улавливания сохраняется и здесь и позволяет получить новые очень интересные результаты. Развитие этой области обеспечивал Громов, который и ввел термин «захват». Я не хочу и не буду подробнее описывать эту область исследований, поскольку о ней было рассказано на Международном конгрессе математиков в 1994 году в лекции В. Бангерта. С тех пор он и Урс Ланг (Urs Lang) получили очень общие результаты в так называемой асимптотической задаче Плато.

6. Заключительные замечания

Я надеюсь, мне удалось показать вам, что у теории динамических систем есть множество разнообразных связей с другими областями — даже если учесть, что я наложил на себя ряд ограничений.

Меня больше всего поражает развитие теории интегрируемых систем (около 30 лет назад), толчок которому дала не одна из известных задач, а явление, обнаруженное с помощью численных экспериментов в задаче, связанной с динамикой жидкости. Тщательные исследования и глубокое проникновение в суть вещей привели к появлению новой области, тесно связанной с дифференциальной геометрией, алгебраической геометрией и математической физикой, имеющей приложения, например, в теории коммуникаций с помощью оптических волокон. Это показывает, как глупо было бы пытаться руководить развитием математики или предсказывать его. Во времена чудовищной специализации мы должны чувствовать в себе свободу использовать все, доступные нам, орудия и использовать их с надлежащим вкусом. На мой взгляд, не имеет смысла спорить, что предпочтительнее: решать глобальные задачи, строить абстрактные структуры или работать над приложениями. Скорее мы должны стремиться к новым задачам, сохраняя наш ум открытым, и не забывать о единстве математики. Как говорил Биркгоф: «Какое счастье, что мир математики настолько велик».

Благодарности

Я выражаю признательность друзьям и коллегам из геометрического центра в Миннеаполисе за помощь при подготовке компьютерных рисунков. Директор этого центра Р. МакГихи оказывал мне всяческую поддержку. Эдуардо Табакмен помог мне с подготовкой большинства фигур, Джефф Шефер — с рисунками, изображающими геодезические на эллипсоиде. Я признателен Девиду Саттингеру из университета Минесотты за программу взаимодействия солитонов, созданную с помощью программы MATLAB.

Я благодарен П. Рабиновичу и Э. Цендеру за их поддержку и терпение. Мои наилучшие пожелания каждому из них.

Список литературы

Введение

[1] Die Elite der Nation im Dritten Reich, Leopoldina–Symposium, Acta Historica Leopoldina 22, Hrsg. C. S. Scriba, Halle (Saale) 1995, [in particular, p. 16].

[2] JACOBI C., «Vorlesungen über Integration der Differentialgleichungen» WS 1842/43, published by Clebsch as «Vorlesungen über Dynamik» in 1866. (Имеется рус. пер.: Якоби К. Лекции по динамике. — М.–Л., 1936 (2-е изд., УРСС, 2004))

[3] PIEPER H., Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851). Die Albertus-Universität zu Königsberg und ihre Professoren, Hrsg. D. Rauschning, D. v. Nerée, Dunkerfe Humblot, Berlin 1995, 473–488.

[4] BIRKHOFF G. D., Dynamical Systems, Coil. Lectures, AMS, 1927. (Имеется рус. пер.: Биркгоф Дж. Д. *Динамические системы*. — М.: Гостехиздат, 1941 (2-е изд., 1999))

1. Исторические замечания

[5] CHARLIER C. L., Die Mechanik des Himmels, Verlag von Veit&Comp., Leipzig 1907 [especially Band 2 p. vi]. (Имеется рус. пер.: Шарлье К. В. *Небесная механика*. — М.: Наука, 1966)

[6] LEJEUNE DIRICHLET, Werke, vol. 2 Berlin, 1897.

[7] BARROW–GREENE J., Poincaré and the three body problem, History of Mathematics, Am. Math. Soc., Providence, R. I.; London Math. Society, London, 1997.

[8] KOLMOGOROV A. N., Théorie générale des systémes dynamiques et mécanique classique. Proc. Int. Congress of Math. 1954, vol. 1 315–333, North Holland, Amsterdam 1957 [Russian]. (См также: Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика, *Доклады Международного математического конгресса*, 1954, т. 1, с. 315–333)

[9] ARNOLD V. I., Small denominators III. Small denominators and problems of stability of motions in classical and celestial mechanics, Russ. Math. Surveys 18, 1963, 213–284. (Имеется рус. пер.: Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, *УМН*, 1963, 18:6(114), 91–192.)

[10] SIEGEL C. L., Iterations of analytic functions, *Ann. Math.* 43, 1942, 607–612.

2. Приложения, отображения

[11] Proceedings CERN SYMPOSIUM vol.1: High energy accelerators (ed. Regen-streif), CERN, Genève 1956 [in particular p. 254].

[12] ZEHNDER E., Homoclinic points near elliptic fixed points, *Comm. Pure Appl. Math.* 26, 1973, 131–182.

[13] GENECAND C., Transversal homoclinc homoclinic points near fixed points of area preserving diffeomorphisms of the plane, Dynamics reporte, 1–30, Dynamics Report. Expositions Dynamical Systems (N. S.) 2, Springer Berlin 1993.

[14] STÖRMER C., The Polar Aurora, Clarendon Press, Oxford 1955.

[15] DRAGT A. J., Trapped orbits in a magnetic dipole field, *Reviews of Geophysics* 3, 1965, 255–298.

[16] HESS W. N., MEAD G. D. and NAKADA M. P., Advances in Particles and Field Research in the Satellite Era, *Reviews of Geophysics* vol. 3, No. 4, Nov. 1965, 521–570.

[17] BRAUN M., Particle Motion in a Magnetic field, *Journ. Diff. Equations* 8, 1970 294–332.

[18] STASSINOPOULOS E. G. and RAYMOND J. P., The space radiation environment for electronics, *Prod. IEEE*, Nov. 1988, 1423–1442.

[19] KUMMER M., On the stability of Hill's solutions of the plane restricted three-body problem, *Am. Journ. Math.* 101, 1979, 1333–1354.

[20] YOCCOZ J. C., Travaux de Herman sur les tores invariants, Séminaire Bourbaki, no.754, 1992, Astérisque 206, 1992, 311–345. (Имеется рус. пер.: Йоккоз Ж.-Кр. *Работы Эрмана об инвариантных торах*, Труды семинара Н. Бурбаки за 1992г.: Сб. статей с англ. и франц. под ред. В. Л. Попова — М.: Мир, 2001, 292–322.)

3. Задача Пенлеве

[21] PAINLEVÉ P., Leçons sur le Théorie Analytique des Équations Différentielles, A. Hermann, Paris 1897.

[22] MATHER J. and MCGEHEE R., Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time, Lecture Notes in Physics 38, Springer Verlag, 1975, 573–597.

[23] GERVER J., A possible model for a singularity without collisions in the five body problem, *Journ. Differential Equations* 52, 1984, 76–90.

[24] GERVER J., The existence of pseudocollisions in the plane, *Journ. Differential Equations* 89, 1991, 1–68.

[25] NCGEHEE R., van Zeipel's theorem on Singularities in celestial mechanics. Expos. Math. 4, 1986, 335–345.

[26] XIA J., The existence of noncollision singularities in newtonian systems, *Ann. Math.* 135, 1992, 411–468.

[27] CHENCINER A., Á l'infini en temps fini, Asterisque 245 1997, Séminaire Bour-baki, 1996/97, Expos. 832, 5, 323–353.

4. Интегрируемые системы

[28] KRUSKAL M. O. and ZABUSKY N. J., Interaction of solutions in collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Review Letters* 15,1965, 240–243.

[29] LAX P. D., Integrals of Nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* 21, 1968, 467–499.

[30] GARDNER C. S., Korteweg–de Vries equation as a Hamiltoninan systems, Journ. Math. Phys. 12, 1971, 1548–1557.

[31] FADDEEV L. and ZAKHAROV L. D., Korteweg–de Vries equation as completely integrable Hamiltonian system, Anal. i Prilizenia 5, 1971, 18–27. (Имеется рус. пер.: Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега-де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система, *Функц. анализ и его прил.*, 1971, 5:4, 18–27.)

[32] LAX P. D., Nonlinear Differential Equations of Evolution, *Actes Congress Int. Math.* 1970, vol. 2, 831-870, Gauthies–Villars, Paris 1971.

[33] ZAKHAROV V. E. and SHABAT A. B., Sov. Phys, JETP.34,1972, 62–69. (Имеется рус. пер.: Захаров В. Е. — *ЖЭТФ* 62, 1945 (1972).)

[34] GARDNER C. S. ET AL, Korteweg–de Vries equation and generalizations VI, Methods of exact solutions, *Comm. Pure Appl. Math.* 27, 1974, 97–133.

[35] MC KEAN H. P. and TRUBOWITZ E., Hill's Operator and Hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points, *Comm. Pure Appl. Math.* 29, 1976,143–226.

[36] DUBROVIN ET AL, Nonlinear equations of Korteweg–de Vries type, finite zone linear operators and Abelian varieties, Russian Math. Surveys 31, 1976, 59–146. (Имеется рус. пер.: Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, *УМН*, 1976, 31:1(187), 55–136.)

[37] AKIRA HASEGAWA, Optical Solitons in Fibers, Springer Verlag 1989.

[38] Optical solitons — theory and experiments, Cambridge Studies in Modern Optics 10, (ed. J. R. Taylor), Cambridge Univ. Press 1992.

[39] SHIOTA T., Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations. *Inv. math.* 83, 333–382 (1986).

[40] ARBARELLO–DE CONCINI Another proof of a conjecture of S. P. Novikov on periods of abelian integrals on Riemann surfaces. *Duke Math.* J. 54, 163–178 (1987).

[41] CRAIG W., WAYNE C. E., Newton's method and periodic solutions of nonlinear wave equations, Comm. Pure Appl. Math. 49, 1990, 1409–1498.

[42] KUKSIN S. and PÖSCHEL J., Invariant Cantor Manifolds of Quasi-Periodic Oscillations for a Nonlinear Schrodinger Equation, *Ann. Math.* 143, 1996, 149–179.

5. Разрушение устойчивости

[43] AUBRY S. and LEDAERON P. Y., The discrete Frenkel–Kontorova model and its extensions I: exact results for ground states, *Physica* D, 8, 1983, 381–422.

[44] MATHER J. N., Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus, *Topology* 21, 1982, 457–467.

[45] MATHER J. N. and FORNI J., Action minimizing orbits in Hamiltonian systems, Lecture Notes in Mathematics 1589, Springer Verlag 1991, 92–186. [contains further references]

[46] MOSER J., Minimal solutions of variational problems on a torus, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. nonlinéaire*, vol 3, 1986, 229–272.

[47] GROMOV M. Foliated Plateau Problem, Part I, Minimal Varieties, *Geom. Functional Analysis*, 1991, 14–79

[48] BANGERT V., Minimal Foliations and Laminations, Proc. ICM 1994, vol.1, Birkhäuser Verlag 1995, 453–464

[49] BANGERT V. and LANG U., Trapping quasi-minimizing submanifolds in spaces of negative curvatures, *Commentarii Math. Helv.* 71, 1996, 122–143