Многочастичные системы. Алгебра интегралов и интегрируемые случаи

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев
Институт компьютерных исследований,
Удмуртский государственный университет
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mails: borisov@rcd.ru, aka@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Получено 11 июля 2008 г.

В данной работе рассматриваются системы материальных точек в евклидовом пространстве, взаимодействующих как друг с другом, так и с внешним полем. Для случая произвольного парного взаимодействия между телами, зависящего только от их взаимного расстояния, указаны новые интегралы, образующие вектор *галилеева момента*. Приведена соответствующая алгебра интегралов, которую образуют интегралы импульса, момента импульса и галилеева момента.

Рассмотрены системы частиц, взаимодействие между которыми описывается однородным потенциалом степени однородности $\alpha = -2$. Для этих систем приведена наиболее общая форма дополнительного первого интеграла движения, называемого нами интегралом Якоби. Указана новая нелинейная алгебра интегралов, включающая интеграл Якоби. Систематически описана новая процедура редукции и возможность ее применения в динамике для понижения порядка гамильтоновых систем.

В статье также приводится ряд новых интегрируемых и суперинтегрируемых систем, являющихся обобщением классических. Приведен ряд обобщений тождества Лагранжа для систем с однородным потенциалом степени однородности $\alpha = -2$, а также с помощью компьютерных экспериментов доказана неинтегрируемость задачи Якоби на плоскости.

Ключевые слова: многочастичные системы, интеграция Якоби

A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev
Multiparticle Systems. The Algebra of Integrals and Integrable Cases

Systems of material points interacting both with one another and with an external field are considered in Euclidean space. For the case of arbitrary binary interaction depending solely on the mutual distance between the bodies, new integrals are found, which form a *Galilean momentum* vector. A corresponding algebra of integrals constituted by the integrals of momentum, angular momentum, and Galilean momentum is presented. Particle systems with a particle-interaction potential homogeneous of degree $\alpha = -2$ are considered. The most general form of the additional integral of motion, which we term the Jacobi integral, is presented for such systems. A new nonlinear algebra of integrals including the Jacobi integral is found. A systematic description is given to a new reduction procedure and possibilities of applying it to dynamics with the aim of lowering the order of Hamiltonian systems.

Some new integrable and superintegrable systems generalizing the classical ones are also described. Certain generalizations of the Lagrangian identity for systems with a particle-interaction potential homogeneous of degree $\alpha = -2$ are presented. In addition, computational experiments are used to prove the nonintegrability of the Jacobi problem on a plane.

Keywords: multiparticle systems, Jacobi integral
Mathematical Subject Classifications: 70Hxx, 70G65

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В данной работе рассматриваются системы материальных точек в евклидовом пространстве, взаимодействующих как друг с другом, так и с внешним полем. В частности, к этим задачам сводятся многие задачи небесной механики. Для случая произвольного парного взаимодействия между телами, зависящего только от их взаимного расстояния, указаны новые интегралы, образующие вектор *галилеева момента*. Приведена соответствующая алгебра интегралов, которую образуют интегралы импульса, момента импульса и галилеева момента. Для определения возможности редукции по указанным интегралам мы следуем классической процедуре, основанной на общей теореме Ли—Картана и связанной с алгеброй Ли первых интегралов. Эта процедура, в свою очередь, фактически базируется на процедуре редукции Рауса. Отметим, что в небесной механике указанная нами алгебра не рассматривалась в связи с тем, что все известные ранее задачи, как правило, обладали галилеевой инвариантностью и решались с помощью приведения задачи к системе центра масс. Однако имеется ряд задач, связанных с динамикой частиц в пространствах постоянной кривизны, в которых галилеева инвариантность пропадает, а компоненты галилеева момента становятся адиабатическими инвариантами. Это дает возможность применить к задачам небесной механики в пространствах постоянной кривизны развитую гамильтонову теорию возмущения.

Оказывается, что дополнительной симметрией обладают и системы частиц, взаимодействие между которыми описывается однородным потенциалом степени однородности $\alpha = -2$. Такого рода системы рассматривались еще Ньютоном и, в более систематической форме, Якоби, Шази, Воронцом. Для этих систем существует дополнительная скрытая симметрия, которой соответствует первый интеграл движения, называемый нами интегралом Якоби. Данный интеграл указывался ранее в различных работах, начиная с Якоби, однако мы приводим его в более общем виде. Кроме того, нами была указана новая нелинейная алгебра интегралов, включающая интеграл Якоби. После нахождения алгебры интегралов мы систематически описываем новую процедуру редукции и возможность ее применения в динамике для понижения порядка гамильтоновых систем. Данная процедура имеет достаточно общую форму и связана именно со степенью однородности потенциала $\alpha = -2$. К сожалению, способы применения этой процедуры в общей форме пока не выяснены. Отметим лишь, что данная редукция существенно отличается от редукции Рауса, так как связана с квадратичным по импульсам интегралом движения и носит в нашем представлении негамильтонов характер.

В статье также приводится ряд новых интегрируемых и суперинтегрируемых систем, являющихся обобщением классических. Приведен ряд обобщений тождества Лагранжа для систем с однородным потенциалом степени однородности $\alpha = -2$, а также с помощью компьютерных экспериментов доказана неинтегрируемость задачи Якоби на плоскости. Кроме того, в ходе статьи указывается на ряд новых нерешенных вопросов и направлений исследования в небесной механике.

1. Задача *N* тел

1.1. Интегралы движения, редукция, алгебра интегралов

Рассмотрим классическую задачу N тел произвольных масс m_i, $i = 1..N$, движущихся в пространстве $\mathbb{R}^n$ под действием потенциальных сил, зависящих от взаимных расстояний между телами. Стандартным образом обозначим положение и импульс i-того тела n-мерными векторами $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{p}_i$. Тогда уравнения движения в гамильтоновой форме имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \qquad i = 1\ldots N,$$
$$H = \frac{1}{2}\sum \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{m_i} + U(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|), \tag{1.1}$$

где гамильтониан H задает полную энергию системы тел.

Хорошо известно, что уравнения (1.1) инвариантны относительно группы $E(n)$ движений пространства $\mathbb{R}^n$. Вследствие этого, по теореме Нётер [74], они допускают $n + \dfrac{n(n-1)}{2}$ первых интегралов движения

$$\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p}_i, \qquad M_{\mu\nu} = \sum_i r_\mu^{(i)} p_\nu^{(i)} - r_\nu^{(i)} p_\mu^{(i)}, \tag{1.2}$$

выражающих законы сохранения полного импульса и момента импульса системы тел. Здесь и далее латинские индексы нумеруют тела, а греческие — компоненты векторов и тензоров.

Кроме того, уравнения (1.1) инвариантны относительно преобразований к равномерно движущейся (относительно исходной) системе координат. Совместно с движениями пространства эти преобразования образуют группу преобразований Галилея. Соответствующие (по теореме Нётер) интегралы движения

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{P}}{\sum m_i} t, \qquad \text{где} \qquad \boldsymbol{R} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i} \tag{1.3}$$

являются неавтономным (явно зависящим от времени) и связаны с равномерным и прямолинейным движением центра масс $\boldsymbol{R}$.

Интегралы (1.2) и (1.3) позволяют провести редукцию на $n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n(n-1)}{2} + \left[\dfrac{n}{2}\right]\right)$ степеней свободы (квадратными скобками здесь и далее обозначена целая часть числа).

Классическая процедура редукции в рассматриваемом случае состоит из двух этапов.

1. Редукция по группе трансляций и группе Галилея на n степеней свободы. Данная редукция проводится с помощью предложенного Якоби [32] перехода к барицентрическим (связанным с центром масс) координатам

$$\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{R}_k, \qquad k = 1..N-1, \qquad \text{где} \qquad \boldsymbol{R}_k = \sum_{i=1}^{k} m_i \boldsymbol{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} m_i. \tag{1.4}$$

2. Редукция по группе вращений $SO(n)$ на $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n(n-1)}{2} + \left[\dfrac{n}{2}\right]\right)$ степеней свободы. В случае задачи о движении трех тел в $\mathbb{R}^3$ данная процедура называется *исключение узла* и может быть проведена различными способами [12, 55, 70].

Отметим, что интегралы (1.3) являются неавтономными. Это, в частности, не позволяет применить принадлежащий Пуанкаре алгебраический метод понижения порядка, являющийся гамильтоновым вариантом понижения порядка по Раусу и обобщенный Е. Картаном на случай некоммутативной алгебры интегралов [17].

Приведем основную теорему, на которую опирается алгебраическая процедура редукции. Рассмотрим гамильтонову систему с первыми (автономными) интегралами $F_1, \ldots, F_k$, такими, что $\{F_i, F_j\} = a_{ij}(F_1, \ldots, F_k)$. Набор интегралов $F_1, \ldots, F_k$ задает естественное отображение $F : M \to \mathbb{R}^k$, а функции a_{ij} в общем случае нелинейны. При этом, как показал Картан, справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (Ли–Картан). *Пусть точка $c \in \mathbb{R}^k$ не является критическим значением отображения F и в ее окрестности ранг матрицы $||a_{ij}||$ постоянен. Тогда в малой окрестности $U \subset \mathbb{R}^k$ точки c найдутся k независимых функций $\varphi_s : U \to \mathbb{R}$, таких, что функции $\Phi_s = \varphi_s \circ F : N \to \mathbb{R}$, $N = F^{-1}(U)$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = \ldots = \{\Phi_{2q-1}, \Phi_{2q}\} = 1, \tag{1.5}$$

все остальные скобки $\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0$. Число $2q$ равно рангу матрицы $||a_{ij}||$.

Доказательство можно найти в работе [17].

Теорема Ли–Картана, вообще говоря, обобщает некоторые общие наблюдения, возникшие при понижении порядка в небесной механике, которые восходят к Лагранжу, Лиувиллю, Бертрану, Буру, Ли и многим другим. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом многогранном вопросе, однако отметим, что с этой точки зрения сама процедура редукции и смысл нахождения алгебры интегралов состоит в том, что если найдены первые интегралы системы и описана алгебра интегралов, то мы сразу можем понять, на сколько степеней свободы можно понизить порядок системы. А также можем выполнить конструктивную редукцию.

Надо сказать, что в классической задаче трех тел все эти соображения, имеющие в начале неформальный характер, активно использовались еще Лагранжем, который вводил взаимные расстояния между телами и соответствующие проекции скоростей при редукции задачи трех тел. В наиболее симметричной форме классическая процедура редукции содержится в работах [36, 37]. А в наиболее систематической и развернутой форме — в замечательной работе Бура [12], где им существенно используются таблицы коммутации и пуассонова структура. В некотором смысле статья Бура была плохо оценена с точки зрения процедуры Ли, хотя в ней он предвосхитил многие моменты, развитые потом в работах [1, 8].

В чем же состоит смысл этой процедуры? Если мы имеем алгебру интегралов, то дальнейшая схема редукции состоит в нахождении функций инвариантных относительно действия этой алгебры интегралов. Именно эти функции являются координатами редуцированной системы.

Если алгебра интегралов линейна, то есть представляет собой алгебру Ли, то в качестве координат просто берутся инварианты действия соответствующей группы Ли. Если же алгебра нелинейна, то ищутся инвариантные функции фазовых потоков, порождаемых первыми интегралами. При этом сначала выделяется некоторый набор функций (обычно выбираемый из каких-то естественных соображений), который затем пополняется, используя так называемый метод Якоби. При этом в качестве новых берутся функции, получаемые при коммутации уже известных функций (или их комбинации). Пополнение происходит до тех пор, пока набор функций не замкнется, после чего мы получаем замкнутую алгебру. Как правило, это и будет алгебра, на которой определена приведенная система. Необходимо только, чтобы гамильтониан полностью выражался через найденные функции (являющиеся переменными приведенной системы). Подробно данный алгоритм описан, например, в книге [76], где также указано приложение данного метода для теории вихрей.

Сформированная алгебра приведенной системы может оказаться вырожденной, то есть содержать некоторые функции Казимира. В принципе такая система уже будет приведенной и ее можно исследовать. Однако для некоторых задач, например, в теории возмущений, удобнее иметь каноническое представление приведенной системы. В этом случае производится процедура редукции на симплектический лист. Для алгебр Ли это хорошо отлаженная техника, восходящая к Буру. В случае нелинейной алгебры это становится уже искусством и необходимы дополнительные соображения, которые как раз и развиваются нами ниже для случая систем с однородным потенциалом степени $\alpha = -2$. Здесь стандартные соображения по симплектизации не работают, но оказывается, что существует некоторая новая конструкция, связанная с проекцией на сферу и заменой времени. При этом все рассматриваемые нами процедуры редукции мы стремимся выполнить в конструктивном явном виде.

Рассмотрим в качестве примера движение трех тел в пространстве $\mathbb{R}^3$. Автономные интегралы (1.2) в этом случае образуют алгебру $e(3)$, при этом в теореме 1 следует положить $k = 6$, $q = 2$. Теорема Ли–Картана в этом случае позволяет провести редукцию на четыре степени свободы. В то же время классическая процедура редукции (см. стр. 56) позволяет исключить пять степеней свободы. Таким образом, для корректной редукции по Ли–Картану не хватает еще одного независимого автономного интеграла в инволюции с (1.2).

Оказывается, для произвольной системы N тел в $\mathbb{R}^n$ существует еще один набор автономных первых интегралов движения, на существование которых для задачи трех тел в $\mathbb{R}^3$ указал С. Ли в работе [46]. В этой же работе он привел коммутационные соотношения для указанных интегралов и построил набор из пяти независимых интегралов в инволюции. Тем самым Ли указал на возможность редукции задачи трех тел в $\mathbb{R}^3$ на пять степеней свободы алгебраическими методами. В дальнейшем алгебраические методы исследования свободного движения и редукции С. Ли планировал перенести на небесную механику в пространствах постоянной кривизны. В частности, в одной из сносок в своей работе [46] он пишет: *«В дальнейшем я разовью механику на n-мерных многообразиях постоянной кривизны. Интегралы, обусловленные свободным движением соответствующего пространства, можно вывести, следуя общим принципам, которые я опишу позднее. Настоящая же работа показывает, как лучше всего использовать полученные интегралы. Существует ли уже соответствующая теория, мне неизвестно»*. Однако затем он отказался от этой мысли в силу различных причин (с научной биографией С. Ли читатель может ознакомиться в книгах [89, 63]).

Приведем теперь теорему, обобщающую результаты С. Ли.

Теорема 2. *Уравнения* (1.1) *движения N тел в $\mathbb{R}^n$ помимо* (1.2) *допускают еще* $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *автономных интегралов движения*

$$Q_{\mu\nu} = R_\mu P_\nu - R_\nu P_\mu, \qquad \mu, \nu = 1 \ldots n. \tag{1.6}$$

Причем указанные интегралы связаны друг с другом и интегралами $\boldsymbol{P}$ соотношениями

$$\sum_{<\mu,\nu,\rho>} \varepsilon_{\mu\nu\rho} Q_{\mu\nu} P_\rho = 0, \tag{1.7}$$

где $\mu \neq \nu \neq \rho \neq \mu$, а суммирование ведется по циклическим перестановкам индексов.

Доказательство.

Доказательство первой части теоремы проводится с помощью исключения времени из различных пар интегралов (1.3). Действительно,

$$Q_{\mu\nu} = c_\mu P_\nu - c_\nu P_\mu = R_\mu P_\nu - R_\nu P_\mu. \tag{1.8}$$

Уравнения связи (1.7) при этом непосредственно следуют из вида интегралов (1.6). ■

Заметим, что интегралы (1.6) образуют тензор *усредненного* момента импульса системы, то есть представляют собой момент импульса тела массы $\mu = \sum m_i$, помещенного в центр масс и движущегося с импульсом, равным полному импульсу системы тел. Существование тензорного интеграла (1.6) (так же, как и (1.3)) связано с инвариантностью уравнений движения относительно группы Галилея, поэтому в дальнейшем мы будем называть его *галилеев момент*. Отметим также, что указанные интегралы зависят от выбора системы координат. Таким образом, классический переход к барицентрическим координатам можно рассматривать как конструктивную форму редукции по интегралам $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$.

Приведем теперь скобки Пуассона интегралов (1.2) и (1.6). Здесь и далее мы ограничимся случаем движения N тел в $\mathbb{R}^3$. Обобщение на случай более высоких размерностей не представляет сложности и может быть проведено, следуя, например, [90]. Стандартным образом перейдем от тензоров к векторам полного и галилеева моментов $M_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho} M_\rho$, $Q_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho} Q_\rho$. Скобка Пуассона при этом имеет вид

$$\begin{gathered} \{M_\mu,\, M_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\rho} M_\rho, \quad \{M_\mu,\, Q_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\rho} Q_\rho, \quad \{M_\mu,\, P_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\rho} P_\rho, \\ \{Q_\mu,\, Q_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\rho} Q_\rho, \quad \{Q_\mu,\, P_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\rho} P_\rho, \quad \{P_\mu,\, P_\nu\} = 0. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Алгебра интегралов (1.9) обладает тремя функциями Казимира

$$K_0 = (\boldsymbol{Q},\, \boldsymbol{P}), \qquad K_1 = (\boldsymbol{M},\, \boldsymbol{P}), \qquad K_2 = |\boldsymbol{M} - \boldsymbol{Q}|^2, \tag{1.10}$$

одна из которых необходимо равна нулю $K_0 = 0$ и представляет собой уравнение связи (1.7).

Рассмотрим теперь вопрос о понижении порядка системы (1.1) с помощью интегралов $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$. В случае $\mathbb{R}^3$ справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Интегралы* (1.2) *и* (1.6) *позволяют провести редукцию задачи о движении N тел в $\mathbb{R}^3$ на пять степеней свободы.*

Доказательство.

Вычислим ранг якобиана $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})}{\partial(\boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{p}_i)}\right) = 8$ и ранг матрицы скобки интегралов $\operatorname{rank}(\{(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}), (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})\}) = 6$. Из полученных значений рангов можно заключить, что из девяти интегралов $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ восемь являются независимыми, а алгебра интегралов (1.9) обладает двумя нетривиальными функциями Казимира. Следовательно, в общем случае из интегралов $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ можно построить $2 + \frac{6}{2} = 5$ независимых интегралов в инволюции. В качестве таких интегралов, следуя С. Ли, можно выбрать P_1, P_2, P_3, K_1 и K_2. Таким образом, по теореме Лиувилля задачу о движении N тел на сфере можно редуцировать на пять степеней свободы, что согласуется с классической процедурой редукции, использующей барицентрические координаты. ■

1.2. Задача двух тел в пространствах постоянной кривизны. Постановка задачи

Как уже говорилось выше, в работе Ли [46], посвященной исследованию плоской задачи N тел, в одном из комментариев имеется указание на задачу N тел в пространствах постоянной кривизны. Хорошо известно, что в этом случае отсутствует группа преобразований Галилея и нет аналога интеграла центра масс. Хотя само понятие центра масс в искривленном пространстве можно постулировать (вообще говоря, различными способами), что сделано, например, в работе Жуковского [82], а также в работе Г. А. Гальперина [79].

Основные результаты, постановки задач и систематические исследования механики точек и твердых тел в искривленных пространствах содержатся в фундаментальной работе Килинга [40]. Многие результаты этой работы потом переоткрывались, обзор современных исследований в данном направлении можно найти, например, в сборнике работ [78].

Надо отметить, что исследования механики в искривленных пространствах были весьма популярны в конце 19-го и начале 20-го века. Это было связано, в частности, с созданием неевклидовой геометрии. Еще ее создатели Лобачевский, Риман и Бельтрами ставили задачу описания не только геометрии и кинематики, но и динамики в искривленных пространствах. На этом пути возникло обобщение ньютоновского закона притяжения для пространств постоянной кривизны. В начале 20-го века интерес к этим исследованиям утих в связи с созданием сначала специальной, а затем и общей теории относительности. В общей теории относительности понятие кривизны играет существенную роль — тензор кривизны Римана входит в уравнения общей теории относительности. Однако смысл кривизны в теории относительности несколько другой, ей отводится некая динамическая роль, связанная с понятием гравитирующей массы.

Уже во времена Эйнштейна на базе теории относительности многие математики, в частности, Шази, Леви-Чивита и другие, пытались построить релятивистскую небесную механику и формулировали задачу N тел в релятивистском пространстве. При этом само пространство оставалось евклидовым, а наличие кривизны, вызванной присутствием гравитации, приводило к некоторым поправкам в закон притяжения. В частности, в качестве такой поправки возник потенциал, обратно пропорциональный квадрату расстояния между телами, который мы подробно исследуем ниже. Впервые эту поправку к потенциалу исследовал Ньютон, который ставил вопрос о виде потенциала, при котором движение материальной точки в центральном поле является замкнутым в некоторой равномерно вращающейся системе координат. Другая возможность введения этой добавки связана с учетом несферичности гравитирующих планет.

Помимо классического релятивистского подхода, когда евклидово пространство искривляется в присутствии гравитирующих масс, можно рассмотреть движение в изначально искривленном пространстве. В этом случае мы также можем получить уравнения теории гравитации и теории относительности, но уже в искривленном пространстве. Для простоты при этом стоит рассматривать пространства постоянной кривизны. Еще Эйнштейн, Эддингтон, де Ситтер предлагали соответствующие статические модели реального мира. В частности, за сферическим пространством $\mathbb{S}^3$ закрепилось название «мир Эйнштейна».

Введение кривизны в теорию гравитацию является вполне осмысленным. Действительно, одним из самых значительных достижений теории гравитации является идея Фридмана о рассмотрении изотропных вселенных. В рамках теории гравитации можно мыслить кривизну пространства как некоторое фоновое распределение массы вселенной. Наиболее полный и современный анализ теории гравитации в искривленном пространстве содержится в работе Н. А. Черникова [19], где он вместо евклидова пространства рассматривает пространство Лобачевского. В своей работе Н. А. Черников обобщает уравнения гравитации и исследует простейшие задачи в рассматриваемом пространстве. В этой же работе он приводит свое обоснование необходимости введения фоновой кривизны, связанное с тензорным анализом и независимостью псевдотензора энергии гравитационного поля от выбора системы координат.

Так же, как и в евклидовом пространстве, с помощью предельного перехода из уравнений общей теории относительности для искривленного пространства можно получить уравнения ньютоновской механики в пространстве постоянной кривизны. То есть рассматриваемая нами классическая механика в пространстве постоянной кривизны является промежуточной между ньютоновской механикой и теорией относительности в искривленных пространствах. С одной стороны, она существенно проще релятивистской, а с другой — может объяснить ряд релятивистских динамических эффектов, в частности смещение перигелия Меркурия. Отметим, что объяснение Эйнштейна для смещения перигелия Меркурия в конечном итоге сводится к возмущению потенциала взаимодействия плоской задачи, которое связано с кривизной пространства. И в этом смысле объяснение с точки зрения классической механики в пространстве постоянной кривизны также имеет право на существование, и в некотором смысле является даже более строгим. Эта и некоторые другие задачи небесной механики в пространствах постоянной кривизны рассматривались нами в работах [9, 10, 11, 39].

Рассмотрим теперь задачу N тел в пространствах постоянной кривизны. Для этого параметризуем сферу $\mathbb{S}^3$ (псевдосферу $\mathbb{L}^3$), используя избыточные координаты четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ (пространства Минковского $\mathbb{M}^4$) со связью

$$\Phi(q) = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}q^\mu q^\nu \mp R^2\right) = \frac{1}{2}\left(\langle \boldsymbol{q},\, \boldsymbol{q}\rangle \mp R^2\right) = 0, \tag{1.11}$$

где $g = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1)$ $(g = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1))$ — соответствующая метрика. Здесь и далее верхний знак соответствует сфере, а нижний знак — псевдосфере. Метрика соответствующего пространства $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ индуцирует метрику сферы на $\mathbb{S}^3$ и метрику Лобачевского на псевдосфере $\mathbb{L}^3$.

Движение N частиц в избыточных координатах в потенциале $U(\boldsymbol{q}_1,\, \ldots,\, \boldsymbol{q}_N)$ описывается лагранжианом

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\langle \dot{\boldsymbol{q}}_i,\, \dot{\boldsymbol{q}}_i\rangle - U(\boldsymbol{q}_1,\, \ldots,\, \boldsymbol{q}_N)$$

со связью (1.11). Используя гамильтонов формализм систем со связями [74], получаем гамильтониан

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\langle \boldsymbol{p}_i,\, \boldsymbol{p}_i\rangle - \frac{\langle \boldsymbol{p}_i,\, \boldsymbol{q}_i\rangle^2}{\langle \boldsymbol{q}_i,\, \boldsymbol{q}_i\rangle}\right) + U(\boldsymbol{q}_1,\, \ldots,\, \boldsymbol{q}_N). \tag{1.12}$$

Уравнения движения $\dot{\boldsymbol{q}} = \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}$, $\dot{\boldsymbol{p}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}$ в переменных $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ являются каноническими.

Как хорошо известно [47, 31, 80, 40, 42, 59], аналогом ньютоновского потенциала взаимодействия между телами на сфере является

$$U(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j) = -\gamma \operatorname{ctg}\theta_{ij} = -\gamma\frac{\langle \boldsymbol{q}_i,\, \boldsymbol{q}_j\rangle}{\sqrt{R^2 \mp \langle \boldsymbol{q}_i,\, \boldsymbol{q}_j\rangle^2}}, \qquad i, j = 1,\, \ldots,\, N, \quad i \neq j. \tag{1.13}$$

Напомним, что потенциал (1.13) может быть получен либо из решения уравнения Лапласа–Бельтрами на сфере $\mathbb{S}^3$, инвариантного относительно группы $SO(3)$ и имеющего особенность в полюсе $\theta = 0$, либо при перенесении теоремы Бертрана на сферу [84, 47]. Таким образом, классическая задача N тел в пространствах постоянной кривизны описывается гамильтонианом

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\langle \boldsymbol{p}_i,\, \boldsymbol{p}_i\rangle - \frac{\langle \boldsymbol{p}_i,\, \boldsymbol{q}_i\rangle^2}{\langle \boldsymbol{q}_i,\, \boldsymbol{q}_i\rangle}\right) - \gamma\sum_{i>j=1}^{N}\frac{\langle \boldsymbol{q}_i,\, \boldsymbol{q}_j\rangle}{\sqrt{R^2 \mp \langle \boldsymbol{q}_i,\, \boldsymbol{q}_j\rangle^2}}. \tag{1.14}$$

Как было показано в [11], задача двух тел в пространствах постоянной кривизны является неинтегрируемой. Однако в пределе $R \to \infty$ она переходит в интегрируемую классическую задачу двух тел. Отметим, что при обратном переходе от плоской к искривленной задаче сохраняются интегралы типа момента, однако пропадает галилеева инвариантность. В связи с этим было бы интересно построить стандартную теорию возмущения для плоской задачи, используя в качестве параметра возмущения кривизну пространства, а интегралы галилеева момента (или их комбинации) — в качестве адиабатических инвариантов.

2. Натуральная система с однородным потенциалом степени $\alpha = -2$

2.1. Интегралы движения

Рассмотрим натуральную систему с потенциалом $U_\alpha(\boldsymbol{r})$, являющимся однородной функцией степени однородности α по переменным r_i, $i = 1..N$

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{m_i} + U_\alpha(\boldsymbol{r}). \tag{2.1}$$

Как известно, для потенциала $U_\alpha(\boldsymbol{r})$ справедливо тождество Эйлера

$$(\boldsymbol{r},\, \frac{\partial U_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}}) = \alpha U_\alpha. \tag{2.2}$$

Эволюция центрального момента инерции $I = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ для таких систем описывается *формулой Лагранжа*

$$\ddot{I} = 4H - 2(\alpha + 2)U_\alpha. \tag{2.3}$$

Некоторые обобщения формулы Лагранжа на системы со связями на случай, когда потенциальная энергия квазиоднородна по координатам, а также на континуум взаимодействующих частиц можно найти в недавней работе [41].

В рассматриваемом случае $\alpha = -2$ формула Лагранжа упрощается, при этом уравнение для момента инерции может быть проинтегрировано явно

$$I(t) = 2Ht^2 + at + b, \tag{2.4}$$

здесь a и b — константы интегрирования. Из (2.4) следует восходящее к Якоби утверждение для системы N частиц с потенциалом $U_{-2}(\boldsymbol{r})$.

Утверждение 1 (Якоби). *В случае отрицательных энергий $H < 0$ все частицы системы столкнутся за конечное время, а в случае положительной энергии $H > 0$ по крайней мере одно взаимное расстояние между телами будет бесконечно возрастать при стремлении $t \to \pm\infty$.*

Константы интегрирования a и b являются неавтономными (явно зависящими от времени) интегралами движения. Впервые на их существование указал Якоби [33], при исследовании задачи трех тел на прямой с потенциалом $U = \sum\limits_{i,j=1, i>j}^{N} \dfrac{m_i m_j}{(x_i - x_j)^2}$. В явном виде для произвольного потенциала $U = U_{-2}(\boldsymbol{r})$ интегралы a и b записываются следующим образом:

$$a = 2(\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{p}) - 4Ht, \qquad b = 2Ht^2 - 2(\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{p})t + I, \tag{2.5}$$

где H — гамильтониан системы.

Заметим, что при $\alpha = -2$ на фиксированном уровне интеграла энергии формула Лагранжа (2.3) принимает вид уравнения Ньютона с постоянной силой. Данное уравнение допускает очевидный интеграл энергии

$$h = \frac{1}{2}\dot{I}^2 - 4IH = \frac{a^2}{2} - 4bH, \tag{2.6}$$

который будет являться интегралом движения и для всей системы. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Натуральная система* (2.1) *с потенциалом* $U_{-2}(\boldsymbol{r})$ *допускает первый интеграл движения*

$$J = -h/2 = 2IH - (\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{p})^2, \tag{2.7}$$

который можно интерпретировать как энергию радиального движения рассматриваемой системы.

Можно показать, что уравнения движения системы (2.1) с потенциалом $U_{-2}(\boldsymbol{r})$ инвариантны относительно однопараметрических групп преобразований координат и времени следующего вида

$$G_a : \begin{cases} \boldsymbol{r} \to e^{\lambda}\boldsymbol{r}, \\ t \to e^{2\lambda}t; \end{cases} \qquad G_b : \begin{cases} \boldsymbol{r} \to \dfrac{\boldsymbol{r}}{1-\lambda t}, \\ t \to \dfrac{t}{1-\lambda t}, \end{cases} \tag{2.8}$$

где λ — параметр растяжения. Указанным преобразованиям по теореме Нётер соответствуют неавтономные интегралы a и b (2.5). Скобки Пуассона этих интегралов друг с другом и с гамильтонианом имеют вид

$$\{H,\, a\} = -4H, \quad \{H,\, b\} = -a, \quad \{a,\, b\} = -4b, \tag{2.9}$$

они образуют скобку Ли–Пуассона, соответствующую алгебре $sl(2)$. Функцией Казимира этой алгебры является автономный интеграл (2.7). Причем, в отличие от интегралов (2.5), его существование связано со скрытой симметрией задачи, которой не соответствует никакой очевидной группы преобразований фазового пространства.

Замечание 1. Заметим, что для момента инерции I выполняется равенство $\dddot{I} = 0$. Таким образом, для произвольной системы дифференциальных уравнений можно сформулировать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функция фазовых переменных* $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ *удовлетворяет равенству* $\dfrac{d^3 f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})}{dt^3} = 0$. *Тогда, кроме интеграла* $J_1 = \dfrac{d^2 f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})}{dt^2}$, *уравнения движения допускают первый интеграл вида*

$$J_2 = 2f\ddot{f} - \dot{f}^2. \tag{2.10}$$

Исторический комментарий 1. Впервые интеграл (2.7) был получен Якоби [34] при исследовании задачи о движении материальной точки в $\mathbb{R}^3$ под действием центральных сил с добавлением произвольного однородного потенциала степени однородности $\alpha = -2$, то есть

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 + V(|\boldsymbol{r}|) + U_{-2}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{p},\, \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3. \tag{2.11}$$

В дальнейшем рядом авторов [13, 14, 50, 52, 88] с помощью построения представления Лакса была показана интегрируемость системы Калоджеро–Мозера и некоторых ее обобщений, которые также входят в рассматриваемый нами класс систем. Однако интеграл (2.7) для этих систем явно указан не был, хотя и содержится в полученном представлении Лакса.

В наиболее общем виде для произвольного однородного потенциала степени однородности $\alpha = -2$ интеграл (2.7) впервые был приведен Албуи и Шенсине в работе [1].

Исторический комментарий 2. Однородные потенциалы степени однородности $\alpha = -2$ рассматривались еще Ньютоном в связи с задачей нахождения таких законов движения, при которых орбиты системы будут замкнуты во вращающейся системе координат. Оказалось, что этому случаю соответствует добавление к классическому потенциалу слагаемого, обратно пропорционального квадрату расстояния между телами. Отдельно такого рода потенциал рассматривал современник Ньютона и издатель второго издания «Principia» Р. Котес, показавший, что движения в этом потенциале представляют собой спирали, названные позднее спиралями Котеса. Вообще, добавки к потенциалу вида $U(\boldsymbol{r}) \sim |\boldsymbol{r}|^{-2}$ постоянно рассматривались в небесной механике в качестве поправочных членов, необходимых для объяснения некоторых наблюдений, не укладывающихся в теорию Ньютона. В частности, такие поправки рассматривал еще А. Клеро для объяснения движения апсиды лунной орбиты. В дальнейшем П. Лаплас развил методы небесной механики, доказав, что закон всемирного тяготения полностью объясняет движение планет, если представить их взаимные возмущения математическими рядами.

Обсуждение поправок к ньютоновскому потенциалу, введенных Эйнштейном для объяснения смещения перигелия Меркурия, содержится в обзоре [20]. Отметим, что поправки к потенциалу вида $|\boldsymbol{r}|^{-2}$ использовал А. Эйнштейн при объяснении смещения перигелия Меркурия. Кроме того, такого же вида поправки рассматриваются и в релятивистской задаче двух тел (так называемой задаче Манева). Неинтегрируемость последней была показана в работе [21]. Квантовая механика с подобного рода потенциалом была рассмотрена в статье Дж. Шотли [60].

В наиболее систематическом виде классическую небесную механику с взаимодействием, описываемым однородным потенциалом степени однородности $\alpha = -2$, рассматривал П. В. Воронец [69, 70, 71, 72]. В частности, он подробно исследовал равнобедренные конфигурации в задаче трех тел, а также указал ряд интересных частных решений задачи N тел, которые можно до конца исследовать с помощью построения квадратур [70]. В работах [69, 71] им указаны новые нетривиальные решения плоской и пространственной задачи N тел, которые отсутствуют при ньютоновском законе притяжения. В работе [72] Воронец рассматривает закон $\alpha = -2$, если на систему наложены дополнительные связи. Дальнейшим изучением данных решений занимались Банахиевич [3], Билимович [5], Лонгли [48].

В дальнейшем идеи П.В.Воронца получили развитие в работах малоизвестного для западной науки киевского механика Ю. Д. Соколова [91, 92, 93], который интегрируемости задачи N тел. В частности, он нашел интегрируемый случай задачи трех тел на прямой, когда взаимодействие между телами описывается потенциалом $U(r) = Ar^2 + Br^{-2} + Cr^4$, а также показал, что при $C = 0$ эта задача интегрируется в эллиптических функциях. Развитие результатов Соколова имеется в работе Егервари [81].

Отдельным интересным исследованием, посвященным задаче N тел при $\alpha = -2$, является работа Шази [18]. Шази исследует устойчивость задачи N тел, попутно перенося на случай $\alpha = -2$ классическую теорию Зундмана. Эта статья содержит также любопытные исторические замечания.

Надо сказать, что в небесной механике случай потенциала степени однородности $\alpha = -2$ существенно выделяется и требует особого рассмотрения при изучении центральных и гомографических конфигураций (см., например, книгу Д. Саари [58]). Кроме того, еще А. Уинтнер [65] показал, что для такого рода потенциала группа Галлилея является подгруппой всех «инерциальных» преобразований, содержащих время. Этим он, в частности, объяснял существование дополнительных интегралов движения, найденных Якоби для рассматриваемого потенциала.

Отметим, что потенциалы степени однородности $\alpha = -2$, имеющие другую форму, возникают в задаче о движении газообразных эллипсоидов [23, 24]. Интересно, что в этом случае так же, как и для небесной механики, работает рассмотренная ниже процедура редукции, с помощью которой мы показываем интегрируемость ряда задач.

Приведем теперь наиболее общий вид интеграла (2.7), обобщающий как случай Якоби (2.11), так и результат Албуи и Шенсине[1].

Теорема 5. *Натуральная система* (2.1) *с потенциалом*

$$U(\boldsymbol{r}) = U_{-2}(\boldsymbol{r}) + V(I) \tag{2.12}$$

допускает первый интеграл движения

$$J = 2I(H - V) - (\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{p})^2. \tag{2.13}$$

[1] Это и некоторые другие обобщения более подробно изложены в разделе 6

Доказательство.

Вычислим вторую производную I по времени в силу рассматриваемой системы

$$\ddot{I} = 4(H - V) - 4I\frac{\partial V}{\partial I}. \tag{2.14}$$

На фиксированном уровне интеграла энергии $H = \mathrm{const}$ снова получаем систему с одной степенью свободы и уравнением ньютоновского типа. При этом интеграл (2.13) с точностью до константы совпадает с энергией системы (2.14), а явная зависимость $I(t)$ задается квадратурой

$$t + t_0 = \int \frac{dI}{2\sqrt{-J + 2I(H - V)}}. \tag{2.15}$$

■

2.2. Процедура редукции

Еще раз отметим, что классическая процедура редукции, которая проводится в общей форме, основываясь на теореме Ли–Картана, тесно связана с наличием линейных по импульсам интегралов, теоремой Нётер и алгеброй Ли скобок Пуассона первых интегралов. Эта процедура хорошо изучена и проработана (см.,например, [74, 49, 76]). Здесь мы систематически обсудим новый тип редукции, который имеет негамильтонов характер и существенно отличается от классической процедуры. Проблема конструктивной редукции при наличии квадратичных по импульсам первых интегралов в общем случае является очень сложной и, видимо, не может быть разрешена. Но в некоторых частных случаях процедура, оказывается, может быть доведена до конца.

Таким образом, интеграл (2.13) позволяет выполнить редукцию уравнений движения на одну степень свободы. Впервые неявным образом это было сделано Якоби при интегрировании системы (2.11). В дальнейшем процедура редукции обсуждалась рядом авторов [1, 24] в связи с исследованием различных конкретных динамических систем. В частности, Б. Гаффе привел такую редукцию для системы трех одинаковых тел на прямой в потенциале $U = (x_1x_2x_3)^{-2/3}$, возникающей при исследовании задачи о расширении эллипсоидального газового облака. Отметим, что в указанных работах редукция, как правило, проводилась в несимметричном виде, существенно связанном с локальными координатами рассматриваемой системы.

Приведем здесь наиболее симметричный вид данной редукции, обобщенный нами на случай произвольной системы с потенциалом вида (2.12).

Теорема 6. *Натуральная система вида* (2.1) *с потенциалом* (2.12) *допускает редукцию на одну степень свободы с помощью замены времени и координат*

$$dt = I d\tau, \qquad q_i = \sqrt{\frac{m_i}{I}} r_i, \qquad \boldsymbol{q},\, \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^N. \tag{2.16}$$

Уравнения движения в новых переменных описывают движении материальной точки по $(N-1)$*-мерной сфере* $(\boldsymbol{q},\, \boldsymbol{q}) = 1$

$$\boldsymbol{q}'' = -\frac{\partial \widetilde{U}_{-2}}{\partial \boldsymbol{q}} + \lambda \boldsymbol{q}, \tag{2.17}$$

где $\lambda = (\boldsymbol{q}, \dfrac{\partial \widetilde{U}_{-2}}{\partial \boldsymbol{q}}) - \boldsymbol{q}'^2$ *— неопределенный множитель Лагранжа,*

$$\widetilde{U}_{-2}(\boldsymbol{q}) = IU_{-2}(\boldsymbol{r}) = U_{-2}(\frac{q_i}{\sqrt{m_i}}), \tag{2.18}$$

а штрих обозначает дифференцирование по новому времени. При этом интеграл (2.13) *принимает вид*

$$J = \boldsymbol{q}'^2 + 2\widetilde{U}_{-2}(\boldsymbol{q}) \tag{2.19}$$

и с точностью до константы совпадает с полной энергией приведенной системы.

Доказательство теоремы проводится с помощью прямой подстановки (2.16) в уравнения движения и интеграл (2.13).

Гамильтоново представление системы (2.17)получается с помощью преобразования Лежандра на сфере для функции Лагранжа вида

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}'^2 - \widetilde{U}_{-2}(\boldsymbol{q}).$$

При этом интеграл (2.19) с точностью до множителя совпадает с гамильтонианом приведенной системы.

Отметим, что приведенная процедура редукции отличается от классического понижения порядка по Раусу и связана со скрытой симметрией системы в расширенном (включающем время) фазовом пространстве. Действительно, после замены (2.16) интеграл J становится гамильтонианом приведенной системы, тогда как при стандартной редукции Рауса гамильтониан системы не меняется, а лишь параметрически зависит от значения первого интеграла.

Рассмотрим отдельно случай $N = 3$ движения трех тел по прямой. В этом случае уравнения приведенной системы (2.17) описывают движение материальной точки по двумерной сфере S^2, и, в силу хорошо известной аналогии с динамикой твердого тела [75], их можно представить в гамильтоновом виде со скобкой Пуассона, определяемой алгеброй $e(3)$. Действительно, введем новые переменные $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q}'$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{q}$. Гамильтониан в этих переменных имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2 + \widetilde{U}_{-2}(\boldsymbol{\gamma}), \tag{2.20}$$

а скобки Пуассона

$$\{M_i,\, M_j\} = e_{ijk}M_k, \quad \{M_i,\, \gamma_j\} = e_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i,\, \gamma_j\} = 0 \tag{2.21}$$

являются вырожденными и обладают двумя функциями Казимира $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c$ и $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$. Уравнения, задаваемые (2.20) и (2.21), при этом совпадают с уравнениями движения шарового волчка в потенциале $\widetilde{U}_{-2}(\boldsymbol{\gamma})$. Кроме того, в рассматриваемом случае необходимо выполняется $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Задача о движении трех тел на прямой, взаимодействие которых описывается потенциалом вида* (2.12)*, с помощью замены* (2.16) *приводится к задаче о движении шарового волчка в потенциале* $\widetilde{U}_{-2}(\boldsymbol{\gamma}) = U_{-2}(\frac{\gamma_i}{\sqrt{m_i}})$ *на нулевом уровне интеграла площадей* $c = (M, \gamma) = 0$.

Заметим также, что приведенная система на сфере (2.17) не содержит слагаемого $V(I)$, входящего в исходный потенциал (2.12). Таким образом, натуральные системы с различными добавками $V(I)$ редуцируются к одной и той же системе на сфере, и, следовательно, справедливо следующее следствие.

Следствие 1. *Натуральная система вида* (2.1) *с потенциалом* $U(\boldsymbol{r}) = U_{-2}(\boldsymbol{r}) + V(I)$ *с точностью до дополнительной квадратуры эквивалентна системе без дополнительного слагаемого* $V(I)$.

Это следствие обобщает результат А. М. Переломова [54] о том, что система одинаковых частиц на прямой с потенциалом $U(\boldsymbol{r}) = U_{-2}(\boldsymbol{r}) + \omega^2\boldsymbol{r}^2$ эквивалентна такой же системе без квадратичного слагаемого в потенциале. Данное утверждение было им доказано с помощью замены времени и замены переменной, зависящей от времени и связанной с фиктивным переходом во вращающуюся систему координат.

Укажем интересный факт, который пригодится нам в дальнейшем. В случае движения трех тел равных масс $m_1 = m_2 = m_3 = m$ по прямой или, что то же самое, движения одного тела в $\mathbb{R}^3$, преобразование (2.16) не изменяет вектор кинетического момента $\boldsymbol{M}$, то есть выполняется равенство

$$\boldsymbol{M} = m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q}'. \tag{2.22}$$

Таким образом, переменные $\boldsymbol{M}$ являются наиболее удобными для явного выполнения редукции (2.16)

2.3. Система Рософатиуса

Рассмотрим в качестве примера систему Рософатиуса [57], описывающую движение материальной точки по двумерной сфере $\mathbb{S}^2$, с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}({M_1}^2 + {M_2}^2 + {M_3}^2) + \frac{c_1}{{\gamma_1}^2} + \frac{c_2}{{\gamma_2}^2} + \frac{c_3}{{\gamma_3}^2}. \tag{2.23}$$

Соответствующие уравнения движения на алгебре $e(3)$ на уровне $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ обладают тремя квадратичными по импульсам интегралами (см., например, [77])

$$K_i = \frac{1}{2}{M_i}^2 + \frac{c_j{\gamma_k}^2}{{\gamma_j}^2} + \frac{c_k{\gamma_j}^2}{{\gamma_k}^2}, \quad \text{где} \quad i = 1\ldots 3. \tag{2.24}$$

Коммутация этих интегралов на уровне $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ приводит к еще одному, уже кубическому по импульсам интегралу

$$F = M_1M_2M_3 - \gamma_1\gamma_2\gamma_3\left(\frac{c_1M_1}{{\gamma_1}^3} + \frac{c_2M_2}{{\gamma_2}^3} + \frac{c_3M_3}{{\gamma_3}^3}\right). \tag{2.25}$$

Можно показать, что среди этих интегралов только три являются независимыми. Таким образом, данная система является суперинтегрируемой, что было показано Ю. Мозером в работе [51] для более общего случая — задачи Неймана с добавками Рософатиуса.

Сделаем теперь замену переменных, обратную к (2.16). После чего, в силу аналогии системы на сфере и задачи о движении N тел на прямой (см. теорему 6), получим задачу о движении трех тел на прямой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(\frac{{p_1}^2}{m_1} + \frac{{p_2}^2}{m_2} + \frac{{p_3}^2}{m_3}) + \frac{c_1^*}{r_1^2} + \frac{c_2^*}{r_2^2} + \frac{c_3^*}{r_3^2}, \tag{2.26}$$

которая разделяется на три одностепенных системы.

2.4. Система Гаффе

В качестве еще одного примера рассмотрим задачу о движении трех одинаковых тел по прямой, гамильтониан которой имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{c}{(x_1 x_2 x_3)^{2/3}}. \tag{2.27}$$

Впервые данная система была рассмотрена Б. Гаффе в связи с исследованием частного случая задачи о расширении эллипсоидального газового облака [24]. В этой работе он свел рассматриваемую систему к задаче о движении частицы по двумерной сфере и указал дополнительный интеграл движения, кубичный по импульсам. Пара Лакса для данной задачи была найдена А. В. Цыгановым в работе [94]. В более поздней работе Б. Гаффе [25] к первоначальной модели было добавлено вращение облака вокруг одной из главных осей инерции. Для получающейся при этом системы на сфере он указал новый интеграл движения шестой степени по импульсам. И наконец, наиболее общий результат Б. Гаффе, изложенный в работах [26, 27], заключается в том, что задача о расширении произвольно вращающегося безвихревого эллипсоидального газового облака является интегрируемой. Для этой задачи им были указаны два дополнительных интеграла шестой степени по импульсам.

Как видно из (2.27), потенциал системы Гаффе является однородной функцией степени однородности $\alpha = -2$. Следовательно, система допускает интеграл (2.7) и может быть сведена к системе на сфере с помощью замены (2.16). Интересно, что спустя сто лет после Якоби неавтономный интеграл вида (2.4) для данной задачи был независимо указан в работе [73].

Гамильтониан приведенной системы в переменных $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\gamma}$ записывается следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}({M_1}^2 + {M_2}^2 + {M_3}^2) + \frac{c}{(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{2/3}}, \tag{2.28}$$

а дополнительный, кубичный по импульсам интеграл —

$$F_3 = M_1 M_2 M_3 - 2\,\frac{c\,(\gamma_2\gamma_3 M_1 + \gamma_1\gamma_3 M_2 + \gamma_1\gamma_2 M_3)}{(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{2/3}}. \tag{2.29}$$

Интеграл (2.29) приведен Гаффе только для системы (2.27) на сфере. Таким образом, для исходной системы им была показана только интегрируемость в квадратурах. Чтобы показать интегрируемость полной системы (2.27) по Лиувиллю, необходимо указать для нее дополнительный третий интеграл движения (помимо (2.7)), обобщающий интеграл (2.29) в исходных переменных $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{x}$. Для этого с помощью преобразования, обратного к (2.16), запишем интеграл (2.29) для полной системы трех тел на прямой (2.27)

$$\begin{aligned} F_3 =& \frac{1}{2}\,(-p_2x_3 + p_3x_2)\,(p_2x_1 - p_1x_2)\,(p_3x_1 - p_1x_3) - \\ &- \frac{c\left(x_1p_1\left(x_2^2 - x_3^2\right) + x_2p_2\left(x_3^2 - x_1^2\right) + x_3p_3\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right)}{(x_1x_2x_3)^{2/3}}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

С помощью непосредственных вычислений легко показать, что интегралы (2.7) и (2.30) коммутируют друг с другом. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 7. *Система* (2.27) *допускает два дополнительных интеграла движения в инволюции* (2.7) *и* (2.30) *и, следовательно, интегрируема по Лиувиллю.*

Приведем теперь обобщение системы (2.28), указанное Гаффе и обладающее интегралом шестой степени по импульсам. Соответствующий гамильтониан системы на сфере имеет вид

$$H = \frac{1}{2}({M_1}^2 + {M_2}^2 + {M_3}^2) + \frac{c}{(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{2/3}} + \frac{a\left({\gamma_2}^2 + {\gamma_3}^2\right)}{\left({\gamma_2}^2 - {\gamma_3}^2\right)^2}, \tag{2.31}$$

а дополнительный интеграл

$$F_6 = (F_{3N} + F_a)^2 + 4\,\frac{f\,\left({\gamma_2}^2\theta + 2\,c{\gamma_1}^2\right)\left({\gamma_3}^2\theta + 2\,c{\gamma_1}^2\right)}{{\gamma_1}^4}, \tag{2.32}$$

где

$$\begin{gathered}
F_{3N} = N_1N_2N_3 - 2\,c(N_1 + N_2 + N_3), \quad f = 2\,\frac{a\,(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{2/3}\,{\gamma_1}^2}{\left({\gamma_2}^2 - {\gamma_3}^2\right)^2},\\
F_a = N_1 f, \quad \theta = N_2N_3 - 2\,c + f, \quad N_i = \sqrt[3]{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\frac{M_i}{\gamma_i}.
\end{gathered} \tag{2.33}$$

Так же, как и выше, проведем преобразование, обратное к (2.16), и получим интегрируемую по Лиувиллю систему в $\mathbb{R}^3$ с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{c}{(x_1x_2x_3)^{2/3}} + \frac{a\left(x_2^2 + x_3^2\right)}{\left(x_2^2 - x_3^2\right)^2}. \tag{2.34}$$

Данная система обладает двумя дополнительными интегралами. Первый из них — интеграл Якоби (2.7), а второй — интеграл (2.32), в котором γ_i необходимо заменить на x_i, и, в силу инвариантности моментов относительно замены (2.7) (см. равенство (2.22)), просто выразить M_i через импульсы p_i стандартным образом $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$.

3. Задача N тел с однородным потенциалом степени -2, зависящим от взаимных расстояний

3.1. Алгебра интегралов

Рассмотрим задачу N тел, потенциал взаимодействия между которыми зависит только от взаимных расстояний и одновременно является однородной функцией степени однородности $\alpha = -2$, то есть

$$H = \frac{1}{2}\sum\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{m_i} + U_{-2}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|). \tag{3.1}$$

Частным случаем такой задачи является система трех тел на прямой, интегрируемость которой на нулевом уровне интеграла энергии была показана в работах [86, 83]. Рассмотрим теперь общую задачу движения N тел в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. В этом случае справедлива следующая

Теорема 8. *Система* (3.1)*, описывающая движение N тел в $\mathbb{R}^3$ с однородным потенциалом взаимодействия степени однородности $\alpha = -2$, допускает десять функционально независимых автономных интегралов движения.*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p}_i, \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{p}_i) - 2H\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i,\\ \boldsymbol{M} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i, \qquad J = 2IH - \left(\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{p}_i)\right)^2.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Доказательство.

Для рассматриваемого потенциала уравнения (1.1) обладают неавтономными интегралами движения

$$\begin{gathered}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{P}}{\sum m_i}t, \qquad a = 2\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{p}_i) - 4Ht,\\ b = 2Ht^2 - 2\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{p}_i)t + I.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Исключая время из различных пар интегралов a и c_i, помимо интегралов (1.6) и (2.7), получим еще три новых автономных интеграла:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{p}_i) - 2H\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i. \tag{3.4}$$

Интегралы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{S}$ и найденные ранее интегралы $\boldsymbol{Q}$ (1.6) не являются независимыми и связаны следующим образом:

$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{S} = 2H\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{Q}. \tag{3.5}$$

Таким образом, в качестве независимых лучше всего выбрать интегралы (3.2). Отсутствие дополнительных связей между ними легко показать, явно посчитав соответствующий якобиан. ■

Скобки Пуассона интегралов (3.2) имеют вид

$$\begin{gathered}\{M_\mu,\, M_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\rho}M_\rho,\ \{M_\mu,\, S_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\rho}S_\rho,\ \{M_\mu,\, P_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\rho}P_\rho,\ \{M_\mu,\, J\} = 0,\\ \{S_\mu,\, S_\nu\} = S_\mu P_\nu - P_\mu S_\nu,\ \{S_\mu,\, P_\nu\} = P_\mu P_\nu - 2H\left(\sum m_i\right)\delta_{\mu\nu},\ \{S_\mu,\, J\} = -2JP_\mu,\\ \{P_\mu,\, P_\nu\} = 0,\ \{P_\mu,\, J\} = 2S_\mu.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Как видно из (3.6), получившаяся алгебра интегралов является квадратичной. Ранг этой пуассоновой структуры равен восьми, следовательно, данная алгебра обладает двумя функциями Казимира

$$\begin{gathered}K_1 = \left(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{S} - 2H\left(\sum m_i\right)\boldsymbol{M}\right)^2,\\ K_2 = \boldsymbol{S}^2 + J\boldsymbol{P}^2 - 2(\boldsymbol{M},\, \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{S}) + 2H\left(\sum m_i\right)(\boldsymbol{M}^2 - J).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 9. *Уравнения движения* (1.1)*, описывающие движение N тел в $\mathbb{R}^3$ с потенциалом парного взаимодействия, являющимся однородной функцией степени однородности $\alpha = -2$, допускают редукцию на шесть степеней свободы с помощью интегралов* (3.2).

Для доказательства теоремы достаточно предъявить шесть первых интегралов в инволюции. В качестве двух из них берутся функции Казимира (3.7), а оставшиеся четыре вводятся как координаты Дарбу на уровне функций Казимира алгебры интегралов, что всегда можно сделать по теореме Дарбу–Вейнстейна.

Выполнив аналогичные вычисления для $\mathbb{R}^2$, можно показать, что плоская задача N тел может быть редуцирована на четыре степени свободы. Таким образом, она сводится к системе с двумя степенями свободы. Соответствующая конструктивная процедура редукции для задачи трех тел с потенциалом

$$U = \sum_{i<j=1}^{3} \frac{a_{ij}}{(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2}, \qquad \boldsymbol{r}_i \in \mathbb{R}^2 \tag{3.8}$$

приведена в разделе 6. Там же с помощью построения отображения Пуанкаре показана неинтегрируемость полученной системы. Напомним, что ранее для данной задачи было показано [35] лишь отсутствие мероморфных интегралов движения для частного случая $m_1 \neq m_2 = m_3 = 1$, $a_{i,j} = 1$.

4. Задача Якоби на прямой

4.1. Интегрируемость и суперинтегрируемость

Рассмотрим в качестве примера задачу Якоби о движении трех тел на прямой с потенциалом вида

$$U = \sum_{i<j=1}^{3} \frac{a_{ij}}{(x_i - x_j)^2}. \tag{4.1}$$

Интегрируемость данной задачи для частного случая $a_{ij} = \gamma m_i m_j$ была показана Якоби в работе [33], где он указал разделяющие переменные. Позднее рассмотрение вопросов квантования [13] привело Ф. Калоджеро к задаче о движении N тел по прямой с рассматриваемым потенциалом взаимодействия. Интегрируемость этой задачи в случае равных масс и констант взаимодействия была показана Ю. Мозером с помощью построения пары Лакса [50]. Интегрируемость аналогичных задач с потенциалами взаимодействия более сложного вида, в частности, связанных с системами корней полупростых алгебр Ли, была рассмотрена в работах [15, 16, 52, 53, 66, 44].

В дальнейшем интерес к этой задаче вознобновился уже в связи с вопросом ее суперинтегрируемости, то есть наличия избыточного числа первых интегралов. Отметим, что в последнее время вопрос о суперинтегрируемости гамильтоновых систем активно обсуждается как математиками, так и физиками. В связи с этим укажем работы Ранады [56], Гонера [30], Войцеховского [67], Винтерница [61], Козлова и Федорова [87]; следует отметить, что многие работы значительно перекрывают друг друга. Этот интерес обусловлен различными приложениями, как в классической, так и в квантовой механике. Это связано с тем, что ввиду замкнутости орбит суперинтегрируемые системы допускают наиболее простое квантование. В последнее время были найдены суперинтегрируемые системы, обладающие достаточно сложными интегралами движения. Среди них следует отметить открытые цепочки Тоды, суперинтегрируемость которых была недавно указана Домиану [22], а также суперинтегрируемые системы, связанные с задачами рассеяния [64], хотя значение такой суперинтегрируемости для исследования процесса рассеяния пока неясно. В конце раздела мы приводим некоторую гипотезу об общем виде суперинтегрируемых систем с интегралами сколь угодно высокой степени по импульсам.

Обобщенный нами на случай произвольных масс и констант взаимодействия полный набор интегралов (3.2) выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{p_i^2}{m_i} + \sum_{i<j=1}^{3}\frac{a_{ij}}{(x_i - x_j)^2}, \quad P = \sum_{i=1}^{3} p_i, \\ S = P\sum_{i=1}^{3} x_i p_i - 2H\sum_{i=1}^{3} m_i x_i, \quad J = 2H\sum_{i=1}^{3} m_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{3} x_i p_i)^2. \end{gathered} \tag{4.2}$$

В случае $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ и $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a$ к ним добавляется еще один кубический по импульсам интеграл

$$F = p_1 p_2 p_3 - \sum_{i<j=1}^{3}\frac{a p_k}{(x_i - x_j)^2}. \tag{4.3}$$

Таким образом, в этом случае система трех тел является суперинтегрируемой, или максимально суперинтегрируемой. Заметим, что в работе [61] указывается суперинтегрируемость, а в работе [4] — суперразделимость рассматриваемой задачи без использования интеграла третьей степени. Однако, как было позднее отмечено в [62], суперинтегрируемость невозможно установить без использования этого интеграла. Отметим, что, в отличие от рассматриваемого случая, в системе Рософатиуса (2.26) (которая получается из данной при помощи редукции по теореме 6) для суперинтегрируемости достаточно квадратичных по импульсам интегралов.

Заметим также, что кубические интегралы (2.25), (4.3) и (2.29) для разных систем довольно схожи друг с другом. Было бы интересно получить некую универсальную форму данного интеграла и условие на потенциал, при котором данный интеграл может существовать.

4.2. Редукция к системе на сфере

Рассмотрим теперь систему на сфере $\mathbb{S}^2$, получающуюся из задачи Якоби после преобразования (2.16). Как было сказано выше, интеграл J при преобразовании становится гамильтонианом системы на сфере и принимает вид

$$\widetilde{H} = J/2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2 + V(\boldsymbol{\gamma}), \tag{4.4}$$

где

$$V(\boldsymbol{\gamma}) = IU(\boldsymbol{x}) = \sum_{i<j=1}^{3}\frac{a_{ij}^*}{(\gamma_i\sqrt{m_j} - \gamma_j\sqrt{m_i})^2}. \tag{4.5}$$

Остальные интегралы преобразуются следующим образом:

$$\begin{gathered} H = \frac{\widetilde{H}}{I} + \frac{I'^2}{8I^3}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{I}}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i' + \frac{I'}{2I^{3/2}}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i, \\ S = \frac{I'}{2I^{3/2}}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i' - \frac{2\widetilde{H}}{\sqrt{I}}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i, \end{gathered} \tag{4.6}$$

где $f' = \dfrac{df}{d\tau}$.

Как видно из (4.6), интегралы H, P и S после замены становятся неавтономными, так как зависят от величин I и I'. В свою очередь, зависимость этих величин от нового времени можно получить, используя соотношение (2.4) и замену времени, входящую в (2.16). В общем случае из неавтономных интегралов (4.6) можно построить один автономный интеграл:

$$G = \frac{S^2 + JP^2}{2E} = 2\widetilde{H}\left(\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i'\right)^2. \tag{4.7}$$

Таким образом, после редукции (2.16) мы получили интегрируемую систему на сфере, обладающую дополнительным первым интегралом (4.7). Более того, можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 3. *Любая система на сфере с гамильтонианом вида* (4.4) *и потенциалом, являющимся однородной функцией степени однородности* -2*, зависящим от разностей* $(\gamma_i - \gamma_j)$, $i, j = 1\ldots3$*, является интегрируемой и обладает дополнительным интегралом* (4.7).

4.3. Задача Якоби как суперпозиция гуковских центров на сфере и ее обобщения

Как было указано в п.4.1, в случае $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ и $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a$ исходная система обладает дополнительным интегралом третьей степени (4.3). Для того чтобы «опустить» этот интеграл на сферу, рассмотрим нулевой уровень интеграла P. На нулевом уровне P радиус-вектор центра масс R становится первым интегралом, и после замены (2.16) становится справедливо равенство

$$R = \mathrm{const} = \frac{\sqrt{I}}{\sum m_i}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i. \tag{4.8}$$

Взяв производную от (4.8) по новому времени, можно выразить I и I' в зависимости от новых переменных:

$$\frac{1}{\sqrt{I}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i}{R\sum m_i}, \quad \frac{I'}{I^{3/2}} = -2\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i'}{R\sum m_i}. \tag{4.9}$$

Подставив получившиеся выражения в интеграл F, записанный в новых переменных, с точностью до констант получим

$$F = \prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\gamma_i'\gamma_j - \gamma_i\gamma_j') - a\left(\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\right)^2\sum_{i>j,k\neq i,j}^{3}\sum_{l=1}^{3}\frac{(\gamma_k'\gamma_l - \gamma_k\gamma_l')}{(\gamma_i - \gamma_j)^2}. \tag{4.10}$$

Рассмотрим подробнее получившуюся систему на сфере в случае равных масс и констант взаимодействия $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ и $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a$. Для этого повернем систему координат так, чтобы вектор $(1,1,1)$ принял вертикальное положение

$$\widetilde{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1 - \gamma_2),\ \widetilde{\gamma}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3),\ \widetilde{\gamma}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3). \tag{4.11}$$

Опустив тильды, запишем гамильтониан в новых переменных следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2 + \frac{a}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{(\boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{\gamma})^2}\right), \tag{4.12}$$

где

$$\boldsymbol{r}_1 = (1,\, 0,\, 0), \quad \boldsymbol{r}_2 = (1/2,\, -\sqrt{3}/2,\, 0), \quad \boldsymbol{r}_3 = (-1/2,\, -\sqrt{3}/2,\, 0). \tag{4.13}$$

Как видно из (4.12), задача Якоби представляет собой не что иное, как задачу о движении точки по сфере в поле трех одинаковых гуковских центров, расположенных на экваторе в углах правильного треугольника. Под гуковским центром на сфере мы понимаем потенциал вида $\frac{1}{(\boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{\gamma})^2}$, который пропорционален квадрату тангенса углового расстояния от частицы до центра.

Более общий случай движения частицы на сфере в поле N гуковских центров, расположенных на одном экваторе, рассматривался в работе [9]. В частности, была показана интегрируемость данной задачи для произвольного числа гуковских центров различных интенсивностей, а также указан дополнительный первый интеграл движения, являющийся частным случаем интеграла (4.7).

В связи с приведенной аналогией суперинтегрируемой задачи Якоби и задачи о движении тела в поле трех гуковских центров возникает следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Задача о движении частицы по сфере в поле* $2N+1$ *одинаковых гуковских центров, расположенных в углах правильного* $(2N+1)$*-угольника, допускает два независимых первых интеграла движения и является суперинтегрируемой. При этом первый из интегралов имеет вид* (4.7)*, а второй является полиномом* $(2N+1)$*-ой степени по импульсам.*

В подтверждение этой гипотезы нами был проведен ряд численных экспериментов. По их результатам с достаточной степенью достоверности можно говорить о правильности гипотезы для случая пяти и семи гуковских центров.

4.4. Задача Эйлера–Якоби

Приведем еще одно интересное обобщение задачи Якоби. В работе [28] была рассмотрена система многих частиц с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \sum_{i<j=1}^{N} \frac{\mu_{ij}^2}{(x_i - x_j)^2}, \tag{4.14}$$

где константы взаимодействия μ_{ij} теперь являются динамическими переменными, а соответствующая пуассонова структура в случае $N=3$ имеет вид

$$\begin{gathered} \{\mu_i,\, \mu_j\} = e_{ijk}\mu_k, \quad \{\mu_i,\, x_j\} = 0, \quad \{\mu_i,\, p_j\} = 0, \\ \{x_i,\, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i,\, p_j\} = 0, \quad \{x_i,\, x_j\} = 0, \end{gathered} \tag{4.15}$$

где, как обычно, введены обозначения $\mu_{ij} = e_{ijk}\mu_k$. В статье [28] авторы доказали интегрируемость этой системы, указав для нее представление Лакса. Позднее С.Войцеховский показал суперинтегрируемость данной задачи [68], а в ряде работ [6, 7, 2, 43] для данной задачи и некоторых ее обобщений был разработан R-матричный формализм. В дальнейшем подобного рода введение дополнительной внутренней степени свободы было сделано и для других обобщений системы Калоджеро–Мозера, в том числе и для потенциалов, связанных с системами корней полупростых алгебр Ли. Наиболее полное изложение этих результатов можно найти в работе [45]. Также следует отметить, что частный случай такого потенциала связанный с алгеброй D_3, рассматривался в работах [29, 38] в связи с исследованием четырехмерной $SU(2)$-теории Янга–Милса в предположении о пространственной однородности калибровочного поля.

Несложно показать, что наличие дополнительных степеней свободы системы (4.14) не препятствует редукции на основе теоремы 6 п. 2.2. Таким образом, применив указанную теорему, мы получим новую суперинтегрируемую систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2 + \sum_{i<j=1}^{3} \frac{\mu_{ij}^2}{(\gamma_i - \gamma_j)^2}, \tag{4.16}$$

определенную на прямом произведении $e(3) \times so(3)$, то есть

$$\begin{gathered} \{M_i,\, M_j\} = e_{ijk}M_k, \quad \{M_i,\, \gamma_j\} = e_{ijk}\gamma_k, \quad \{M_i,\, \mu_j\} = 0, \\ \{\mu_i,\, \mu_j\} = e_{ijk}\mu_k, \quad \{\mu_i,\, \gamma_j\} = 0, \quad \{\gamma_i,\, \gamma_j\} = 0. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Рассмотрим обобщение данной системы, добавив в потенциал произвольные константы взаимодействия: a_{ij}

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2 + \sum_{i<j=1}^{3} \frac{a_{ij}\mu_{ij}^2}{(\gamma_i - \gamma_j)^2}. \tag{4.18}$$

Получившаяся система обладает тремя функциями Казимира $\boldsymbol{\gamma}^2$, $(\boldsymbol{M},\, \boldsymbol{\gamma})$, $\boldsymbol{\mu}^2$ и как минимум одним интегралом движения (4.7), что позволяет редуцировать эту систему к двум степеням свободы. Естественно предположить, что какие-то комбинации, включающие оставшиеся три интеграла системы (4.14), могут остаться интегралами и для обобщенной системы (4.18). Однако этот вопрос пока остается открытым.

5. Задача Якоби на плоскости

Рассмотрим задачу трех тел на плоскости с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{m_i} + \sum_{i>j} \frac{a_{ij}}{(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2}, \qquad \boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^2. \tag{5.1}$$

Как было показано в п. 3, данная система обладает шестью первыми интегралами движения

$$\begin{gathered} \boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{p}_i, \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) - 2H\sum_{i=1}^{3} m_i\boldsymbol{r}_i, \\ M = \sum_{i=1}^{3}(x_i p_{y_i} - y_i p_{x_i}), \quad J = 2IH - \Big(\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i)\Big)^2, \end{gathered} \tag{5.2}$$

где $I = \sum\limits_{i=1}^{3} m_i\boldsymbol{r}_i^2$ — центральный момент инерции системы тел. Докажем следующую теорему о редукции рассматриваемой системы.

Теорема 10. *Система* (5.1) *допускает редукцию на четыре степени свободы с помощью интегралов* (5.2). *Гамильтониан редуцированной системы имеет вид*

$$H = \frac{1}{2}p_\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{(p_\psi + M)^2}{\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{(p_\psi - M)^2}{\cos^2\theta} + \frac{\mu_1 a_{12}}{\cos^2\theta} + \\ + \frac{\mu_2 m_1^2 a_{13}}{m_1^2\sin^2\theta + \mu_1\mu_2\cos^2\theta + m_1\sqrt{\mu_1\mu_2}\sin 2\theta\cos\psi} + \\ + \frac{\mu_2 m_2^2 a_{23}}{m_2^2\sin^2\theta + \mu_1\mu_2\cos^2\theta - m_2\sqrt{\mu_1\mu_2}\sin 2\theta\cos\psi}, \tag{5.3}$$

где $\theta \in (0,\ \frac{\pi}{2})$, $\psi \in [0,\ \pi)$, $\mu_1 = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\mu_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Доказательство.

Для доказательства теоремы проведем ряд последовательных преобразований.

1. Редукция по интегралам $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{S}$ выполняется с помощью классического перехода к барицентрическим координатам (координатам Якоби):

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{R}_i, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{R}_i = \sum_{k=1}^{i} m_k \boldsymbol{r}_k \Big/ \sum_{k=1}^{i} m_k, \quad i = 1..2.$$

2. Редукция по интегралу момента импульса M осуществляется следующим образом: перейдем к полярным координатам $\tilde{\boldsymbol{r}}_i = (\rho_i\cos\varphi_i, \rho_i\sin\varphi_i)$ и и сделаем замену переменных $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \psi = \varphi_1 - \varphi_2$. При этом φ — циклическая переменная, соответствующая интегралу $M = p_\varphi$. Исключая ее, получим редуцированную систему.

3. Редукция по интегралу Якоби J проводится с помощью применения теоремы 6 п. 2.2 к части фазовых переменных (ρ_1 и ρ_2). При этом необходимо сделать следующую замену переменных и времени:

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{I}{\mu_1}}\cos\theta, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{I}{\mu_2}}\sin\theta, \quad dt = I d\tau.$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что в результате проведенных преобразований получим гамильтонову систему с двумя степенями свободы и гамильтонианом (5.3). ■

Рассмотрим теперь вопрос об интегрируемости полученной двухстепенной системы (5.3). На рис. 1 приведено соответствующее отображение Пуанкаре. В качестве плоскости сечения выбрана плоскость $\theta = \frac{\pi}{4}$. Как видно из рисунка, даже в случае равных масс $m_i = 1$ и равных констант взаимодействия $a_{ij} = 1$ на нулевом уровне интеграла момента $M = 0$ фазовый портрет содержит хаотический слой. Таким образом, построенное отображение Пуанкаре может служить компьютерным доказательством неинтегрируемости системы (5.3).

6. Обобщение тождества Лагранжа и интеграла Якоби

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{m_i} + U_{-2}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) + V(I,\ \boldsymbol{R}), \qquad \boldsymbol{r}_i,\ \boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^n, \tag{6.1}$$

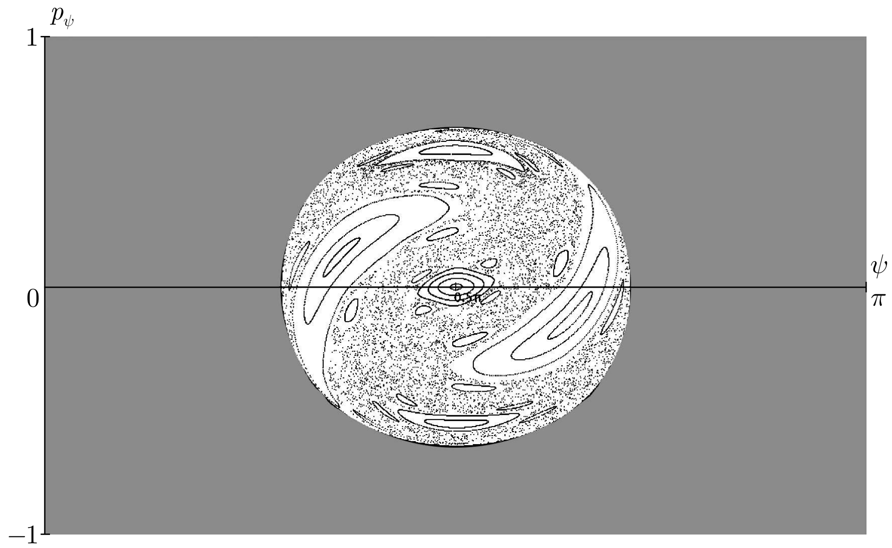

Рис. 1. Отображение Пуанкаре системы (5.3) при $m_1 = m_2 = m_3 = a_{12} = a_{23} = a_{13} = 1$ на нулевом уровне интеграла момента $M = 0$ и уровне энергии $H = 3.8$. В качестве плоскости сечения выбрана плоскость $\theta = \frac{\pi}{4}$

где $U_{-2}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ — однородная функция степени однородности $\alpha = -2$, зависящая только от взаимных расстояний $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$, $i, j = 1..N$, а $V(I, \boldsymbol{R})$ — произвольная функция момента инерции I и радиус-вектора центра масс $\boldsymbol{R}$. Запишем уравнения эволюции I и $\boldsymbol{R}$, обобщающие тождество Лагранжа (2.3):

$$\begin{cases} \ddot{I} = 4(H - V) - 4I\dfrac{\partial V}{\partial I} - 2(\boldsymbol{R}, \dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{R}}), \\ \ddot{\boldsymbol{R}} = -2\dfrac{\partial V}{\partial I}\boldsymbol{R} - \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{R}}, \end{cases} \tag{6.2}$$

где $\mu = \sum m_i$ — суммарная масса всех тел. Как видим, получившиеся уравнения отделились от общей системы и могут быть проинтегрированы отдельно. Следующая теорема описывает ряд частных случаев функции $f(I, \boldsymbol{R})$, при которых система (6.2) (а следовательно, и общая система) допускает дополнительные интегралы движения.

Теорема 11. *Система* (6.1) *допускает дополнительные интегралы движения в следующих случаях:*

1. *При* $V(I, \boldsymbol{R}) = f(I)$ *система* (6.1) *допускает дополнительные интегралы*

$$\begin{gathered} J = 4(H - f)I - \frac{1}{2}\dot{I}^2, \\ G_i = IP_i^2 - \mu P_i R_i \dot{I} + 2\mu^2 R_i^2 (H - f), \quad i = 1..n, \end{gathered} \tag{6.3}$$

где $\boldsymbol{P} = \mu\dot{\boldsymbol{R}}$.

2. *При* $V(I, \boldsymbol{R}) = kI + f(\boldsymbol{R})$, *где* k *— произвольный параметр, система* (6.1) *допускает дополнительный интеграл*

$$F = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}^2 + k\boldsymbol{R}^2 + \frac{1}{\mu}f(\boldsymbol{R}). \tag{6.4}$$

3. *При $V(I, \boldsymbol{R}) = f(x) + g(\boldsymbol{R})$, где введена новая переменная $x = \mu I - \mu^2 \boldsymbol{R}^2$, система* (6.1) *допускает дополнительные интегралы*

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{\mu}g(\boldsymbol{R}), \\ F_2 &= \frac{1}{2}\dot{x}^2 - 4\mu x(H - f(x) - \mu F_1). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Доказательство.

1. Существование первого интеграла (6.3) следует из теоремы 5 п. 2 настоящей статьи. А интегралы G_i являются аналогами интеграла (4.7) для различных пар уравнений

$$\begin{cases} \ddot{I} = 4(H - f) - 4I\dfrac{\partial f}{\partial I}, \\ \ddot{R}_i = -2\dfrac{\partial f}{\partial I}R_i, \end{cases} \tag{6.6}$$

на которые в данном случае разделяется система (6.2).

2. В этом случае второе из уравнений (6.2) принимает вид уравнения Ньютона

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = -2k\boldsymbol{R} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{R}} \tag{6.7}$$

и допускает очевидный интеграл энергии (6.4).

3. Запишем уравнения (6.2) в переменных x, $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 4\mu(H - f(x) - g(\boldsymbol{R})) - 4\mu x\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\mu^2\dot{\boldsymbol{R}}^2, \\ \ddot{\boldsymbol{R}} = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{R}}. \end{cases} \tag{6.8}$$

Как и в предыдущем пункте, второе уравнение допускает интеграл энергии

$$F_1 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{\mu}g(\boldsymbol{R}). \tag{6.9}$$

Выразив $\dot{\boldsymbol{R}}^2$ через полученный интеграл F_1 и подставив в первое уравнение (6.8), опять получим уравнение типа Ньютона

$$\ddot{x} = 4\mu(H - f(x) - x\frac{\partial f}{\partial x} - \mu F_1), \tag{6.10}$$

которое допускает интеграл

$$F_2 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - 4\mu x(H - f(x) - \mu F_1). \tag{6.11}$$

■

Приведем теперь ряд результатов по интегрируемости некоторых задач о движении N тел на прямой, следующих из изложенной выше теоремы.

Следствие 1. *Задача трех тел на прямой с потенциалом $U = U_{-2}(|x_i - x_j|) + f(I)$ допускает два дополнительных интеграла движения и является интегрируемой.*

Следствие 2. *Задача двух тел на прямой с потенциалом $U = U_{-2}(|x_1 - x_2|) + kI + f(\boldsymbol{R})$ допускает дополнительный интеграл движения и является интегрируемой.*

Следствие 3. *Задача трех тел на прямой с потенциалом $U = U_{-2}(|x_i - x_j|) + f(x) + g(\boldsymbol{R})$ допускает два дополнительных интеграла движения и является интегрируемой.*

Список литературы

[1] Albouy, A. and Chenciner, A., Le probl'eme des n corps et les distances mutuelles, *Invent. Math.*, 1998, vol. 131, p. 151–184.

[2] Avan, J. and Billey E., Observable Algebras for the Rational and Trigonometric Euler–Calogero–Moser Models, arXiv:hep-th/9404040v2, 26 Apr 1994.

[3] Banachiewitz, T., Sur un cas particulier du probleme des n corps, C. R. Acad. Sci. Paris, 1906, t. 142, p. 510–512.

[4] Benenti, S., Chanu, C., and Rastelli, G., The Super-Separability of the Three-Body Inverse-Square Calogero System, *J. Math. Phys.*, 2000, vol. 41, pp. 4654–4678.

[5] Bilimowitsch, A., Einige particuläre lösungendes Problems der n Körper, *Astron. Nachr.*, 1911, vol. 189, pp. 181–186.

[6] Billey E., Avan J., and Babelon O., The r-Matrix Structure of the Euler–Calogero–Moser Model, arXiv:hep-th/9312042v1, 6 Dec 1993.

[7] Billey E., Avan J., and Babelon O., Exact Yangian Symmetry in the Classical Euler–Calogero–Moser Model, arXiv:hep-th/9401117v1, 24 Jan 1994.

[8] Bolsinov, A. V., Borisov, A. V., and Mamaev, I. S., Lie Algebras in Vortex Dynamics and Celestial Mechanics: IV, *Regul. Chaotic Dyn.*, 1999, vol. 4, no. 1, pp. 23–50.

Mech. Dynamical

[9] Borisov, A. V. and Mamaev, I. S., Generalized Problem of Two and Four Newtonian Centers, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2005, vol. 92, no. 4, pp. 371–380.

[10] Borisov, A. V. and Mamaev, I. S., The Restricted Two-Body Problem in Constant Curvature Spaces, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2006, vol. 96, no. 1, pp. 1–17.

[11] Borisov, A. V., Mamaev, I. S., and Kilin, A. A., Two-Body Problem on a Sphere: Reduction, Stochasticity, Periodic Orbits, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2004, vol. 9, no. 3, pp. 265–280.

[12] Bour, E., Mémoire sur le probléme des trois corps, *J. École Polytechn.*, 1856, vol. 21, pp. 35–58.

[13] Calogero, F., Solution of the One-Dimensional N-Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials, *J. Math. Phys.*, 1971, vol. 12, pp. 419–436.

[14] Calogero, F. and Marchioro, C., Exact Solution of a One-Dimensional Three-Body Scattering Problem with Two-Body and/or Three-Body Inverse-Square Potentials, *J. Math. Phys.,* 1974, vol. 15, pp. 1425–1430.

[15] Calogero, F., Exactly Solvable One-Dimensional Many-Body Problems, *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, vol. 13, pp. 411–416.

[16] F. Calogero, Exactly Solvable Two-Dimensional Many-Body Problems, *Lett. Nuovo Cimento*, 1976, vol. 16, p. 35–38.

[17] Cartan, E., *Leçons sur les Invariants Intégraux*, Paris: Hermann, 1922, 210 p.

[18] Chazy, J., Sur la stabilité avec la loi du cube des distances, *Bull. Astron.*, ser. 2, 1920, vol. 1, pp. 151–163.

[19] Chernikov, N. A., The Relativistic Kepler Problem in the Lobachevsky Space, *Acta Phys. Polon. B*, 1993, vol. 24, pp. 927–950.

[20] Diacu, F., Pérez-Chavela, E., and Santoprete, M., The n-Body Problem in Spaces of Constant Curvature, arXiv:0807.1747v6, 22 Aug 2008.

[21] Diacu, F. and Santoprete, M., Nonintegrability and Chaos in the Anisotropic Manev Problem, *Phys. D*, 2001, vol. 156, pp. 39–52.

[22] Agrotis, M., Damianou, P. A., and Sophocleous, C., The Toda Lattices is Super-Integrable, arXiv:math-ph/0507051v1, 20 Jul 2005.

[23] Dyson, F. J., Dynamics of a Spinning Gas Cloud, *J. Math. Mech.*, 1968, vol. 18, no. 1, pp. 91–101.

[24] Gaffet, B., Expanding Gas Clouds of Ellipsoidal Shape: New Exact Solutions, *J. Fluid Mech.*, 1996, vol. 325, pp. 113–144.

[25] Gaffet, B., Spinning Gas Clouds Without Vorticity, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2000, vol. 33, pp. 3929–3946.

[26] Gaffet, B., Sprinning Gas Without Vorticity: the Two Missing Integrals, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2001, vol. 34, pp. 2087–2095.

[27] Gaffet, B., Sprinning Gas Clouds: Liouville Integrability, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2001, vol. 34, pp. 2097–2109.

[28] Gibbons, J. and Hermsen, Th., A Generallisation of the Calogero–Moser System, *Phys. 11D*, 1984, p.337-348

[29] Gogilidze, S. A., Khvedelidze, A. M., Mladenov, D. M., and Pavel, H.-P., Hamiltonian Reduction of $SU(2)$ Dirac–Yang–Mills Mechanics, arXiv:hep-th/9707136 v1, 15 Jul 1997.

[30] Gonera, C., On the Superintegrability of Calogero–Moser–Sutherland Model, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1998, vol. 31, pp. 4465–4472.

[31] Higgs, P. W., Dynamical Symmetries in a Spherical Geometry: I, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1979, vol. 12, no. 3, pp. 309–323.

[32] Jacobi, C. G. J., Sur l'elimination des noeuds dans le problème des trois corps, *J. Reine Angew. Math.*, 1843, vol. 26, pp. 115–131.

[33] Jacobi, C. G. J., Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium, in *Gesammelte Werke*, vol. 4, Berlin: Reimer, 1886, pp. 531–539.

[34] Jacobi, C. G. J., Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi, *Gesammelte Werke*, vol. 4, Berlin: Reimer, 1886, pp. 319–509.

[35] Julliard-Tosel, E., Meromorphic Parametric Non-Integrability; the Inverse Square Potential, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2000, vol. 152, pp. 187–205.

[36] Kampen, E. R. van and Wintner, A., On a Symmetrical Canonical Reduction of the Problem of Three Bodies, *Amer. J. Math.*, 1937, vol. 59, no. 1, pp. 153–166.

[37] Kampen, E. R. van and Wintner, A., On the Reduction of Dynamical Systems by Means of Parametrized Invariant Relations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1938, vol. 44, no. 2, pp. 168–195.

[38] Khvedelidze, A. and Mladenov, D., Euler–Calogero–Moser System from $SU(2)$ Yang–Mills Theory, arXiv:hep-th/9906033v3, 20 Mar 2000.

[39] Kilin, A. A., Libration Points in Spaces S^2 and L^2, *Regul. Chaotic Dyn.*, 1999, vol. 4, no. 1, pp. 91–103.

[40] Killing, H. W., Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen, *J. Reine Angew. Math.*, 1885, vol. 98, no. 1, pp. 1–48.

[41] Kozlov, V. V., Lagrange's Identity and Its Generalizations, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 2, pp. 71–80.

[42] Kozlov, V. V. and Harin, A. O., Kepler's Problem in Constant Curvature Spaces, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 1992, vol. 54, pp. 393–399.

[43] Krichever, I., Babelon, O., Billey, E., and Talon, M., Spin Generalization of the Calogero–Moser System and the Matrix KP Equation, arXiv:hep-th/9411160v1, 22 Nov 1994.

[44] Levi, D. and Wojciechowski, S., On the Olshanetsky–Perelomov Many-Body System in an External Field *Phys. Lett.*, 1984, vol. 103A, no. 1–2, pp. 11–14.

[45] Li, L.-Ch. and Xu, P., Spin Calogero–Moser Systems Associated with Simple Lie Algebras, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.*, 2000, vol. 331, no. 1, pp. 55–60.

[46] Lie, S., Begründung einer invarianten Theorie der Berührungs-Transformationen, *Math. Ann.*, 1874, vol. 8, no. 2, pp. 215–303.

[47] Liebmann, H., Über die Zantalbewegung in der nichteuklidiche Geometrie, *Berichte d. Königl. Sächsischen Ges. d. Wiss., Math. Phys. Klasse*, 1903, vol. 55, pp. 146–153.

[48] Longley, W. R., Some Particular Solutions in the Problem of n Bodies, *Bull. Amer. Math. Soc., ser. 2*, 1906, vol. 13, pp. 324–335.

[49] Marsden, J. E. and Ratiu, T. S., *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, Texts Appl. Math., vol. 17, New York: Springer, 1994.

[50] Moser, J., Three Integrable Hamiltonian Systems Connected with Isospectral Deformations, *Adv. Math.*, 1975, vol. 16, pp. 197–220 [Мозер, Ю., *Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория*, М.–Ижевск: РХД, 1999, с. 36–63].

[51] Moser, J., Geometry of Quadrics and Spectral Theory, *The Chern Symposium 1979: Proc. Internat. Sympos., Berkeley, CA, 1979*, New York–Berlin: Springer, 1980, pp. 147–188.

[52] Olshanetsky, M. A. and Perelomov, A. M., Explicit Solution of the Calogero Model in the Classical Case and Geodesic Flows on Symmetric Spaces of Zero Curvature, *Lett. Nuovo Cimento*, 1976, vol. 16, no. 11, pp. 333–339.

[53] Olshanetsky, M. A. and Perelomov, A. M., Completely Integrable Hamiltonian Systems Connected with Semisimple Lie Algebras, *Invent. Math.*, 1976, vol. 37, pp. 93–109.

[54] Perelomov, A. M., The Simple Relation between Certain Dynamical Systems, *Comm. Math. Phys.*, 1978, vol. 63, pp. 9–11.

[55] Radau, R., Sur une transformation des équations differentielles de la dynamique, *Ann. Sci. .Ecole Norm. Sup., ser. 1*, 1868, vol. 5, pp. 311–375.

[56] Ranada, M. F., Superintegrability of the Calogero–Moser System: Constants of Motion, Master Symmetries and Time-Dependent Symmetries, *J. Math. Phys.*, 1999, vol. 40, pp. 236-247.

[57] Rosochatius, E., *Über die Bewegung eines Punktes*: Inaugural Dissertation, Univ. Göttingen, Berlin: Gebr. Unger, 1877.

[58] Saari, D. G., *Collisions, Rings, and Other Newtonian N-Body Problems*, Providence, R. I.: AMS, 2005.

[59] Serret, P., *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes a double courbure*, Paris: Mallet-Bachelier, 1860.

[60] Shortley, G. H., The Inverse-Cube Central Force Field in Quantum Mechanics, *Phys. Rev.*, 1931, vol. 38, pp. 120–127.

[61] Smirnov, R. and Winternitz, P., A Class of Superintegrable Systems of Calogero Type, *J. Math. Phys.*, 2006, vol. 47, 093505, 8 pp.

[62] Smirnov, R. and Winternitz, P., Erratum: "A Class of Superintegrable Systems of Calogero Type"[*J. Math. Phys.*, 2006, vol. 47, no. 9, 093505, 8 pp.], *J. Math. Phys.*, 2007, vol. 48, no. 7, 079902, 1 p.

[63] Stubhaug, A., *The Mathematician Sophus Lie*, New York: Springer, 2002, 555 pp.

[64] Tsiganov, A. V., On Maximally Superintegrable Systems, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 3, pp. 178–190.

[65] Wintner, A., Galilei Group and Law of Gravitation, *Amer. J. Math.*, 1938, vol. 60, no. 2, pp. 473–476.

[66] Wojciechowski S., Involutive Set of Integrals for Completely Integrable Many-Body Problems with Pair Interaction *Lett. Nuovo Cimento*, 1977, vol. 18, no. 4, pp. 103–107.

[67] Wojciechowski, S., Superintegrability of the Calogero–Moser System, *Phys. Lett. A*, 1983, vol. 95, no. 6, pp. 279–281.

[68] Wojciechowski, S., An Integrable Marriage of the Euler Equations with the Calogero–Moser System, *Phys. Lett. A*, 1985, vol. 111, no. 3, pp. 101-103.

[69] Woronetz, P., Über das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften, *Math. Ann.*, 1907, vol. 63, pp. 387–412.

[70] Воронец, П. В., *Преобразования уравнений динамики с помощью линейных интегралов (с приложением к задаче о трех телах)*, Киев, 1907, 192 с.

[71] Воронец, П. В., Некоторые частные случаи движения системы материальных точек, находящихся под действием взаимных сил, *Университетские известия*, 1905, т. 45, №11, с. 95–114.

[72] Woronetz, P., Sur le mouvement d'un point matériel, soumis à une force donnée, sur une surface fixe et dépolie, *J. de Mathem. Pures et Appl., ser. 7*, 1915, vol. 1, pp. 261–275.

[73] Анисимов, С. И., Лысиков, Ю. И., О расширении газового облака в вакуум, *Прикл. мат. мех.*, 1970, т. 34, с. 926–929.

[74] Арнольд, В. И., Козлов, В. В., Нейштадт, А. И., *Математические аспекты классической и небесной механики*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3, М.: ВИНИТИ, 1985.

[75] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., *Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, М.–Ижевск: ИКИ, 2005, 576 с.

[76] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*, Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999, 464 с.

[77] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., *Современные методы теории интегрируемых систем*, М.–Ижевск: ИКИ, 2003, 296 с.

[78] *Классическая динамика в неевклидовых пространствах*: Сб. стат. под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М.–Ижевск: ИКИ, 2004, 348 с.

[79] Galperin, G. A., A concept of the mass center of a system of material points in the constant curvature spaces, *Commun. Math. Phys.*, 1993, vol. 154, pp. 63–84.

[80] Грановский, Я. И., Жеданов, А. С., Луценко, И. М., Квадратичные алгебры и динамика в искривленном пространстве: I. Осциллятор, *ТМФ*, 1992, т. 91, № 2, с. 207–216; II. Проблема Кеплера, *ТМФ*, 1992, т. 91, № 3, с. 396–410.

[81] Егервари, Е., Об одном обобщении решения Лагранжа задачи трех тел, *ДАН СССР*, 1947, т. 55, № 9, с. 805–807.

[82] Жуковский Н.Е., О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы, *Полн. собр. соч., т. 1*, М.-Л.: ГТТИ, 1937, с. 490–535.

[83] Козлов, В. В., *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике,* Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1995, 429 с.

[84] Козлов, В. В., О динамике в пространствах постоянной кривизны, *Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1. Мат. Мех.*, 1994, вып. 2, с. 28–35.

[85] Kozlov, V. V., Lagrange's Identity and Its Generalizations, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 2, pp. 71–80.

[86] Козлов, В. В., Колесников, Н. Н., Об интегрируемости гамильтоновых систем, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика*, 1979, вып. 6, с. 88–91.

[87] Козлов, В. В., Федоров, Ю. Н., Интегрируемые системы на сфере с потенциалами упругого взаимодействия, *Матем. заметки*, 1994, т. 56, вып. 3, с. 74–79.

[88] Переломов, А. М., *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, М.: Наука, 1990.

[89] Полищук, Е. М., *Софус Ли*, Л.: Наука, 1983, 214 с.

[90] Садэтов, С. Т., О редукции n-мерной задачи $N+1$ тел к уравнениям Эйлера–Пуанкаре на алгебре Ли $sp(2N)$, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 3, c. 337-350.

[91] Соколов, Ю. Д., *Особые траектории системы свободных материальных точек*, Киев: Изд-во АН УССР, 1951.

[92] Соколов, Ю. Д., О новом случае интегрируемости в прямолинейной задаче трех тел, *ДАН СССР*, 1945, т. 46, № 8, с. 99–102.

[93] Соколов, Ю. Д., О пространственном гомографическом движении системы трех материальных точек, *ДАН СССР*, 1947, т. 58, № 3, с. 369-371.

[94] Цыганов, А. В., Об одной интегрируемой системе, связанной с шаровым волчком и цепочкой Тоды, *ТМФ*, 2000, т. 124, с. 310–322.