Двумерное установившееся движение вязкой жидкости[1]

Дж. Б. Джеффри

Цель данной работы заключается в поиске некоторых новых решений уравнений движения вязкой жидкости. Имеется большое количество результатов в предположении о том, что движение медленное и, следовательно, можно пренебречь квадратами компонент скоростей и их произведениями. С тех пор как уравнения движения были получены на основе допущения линейности связи между напряжениями и деформациями, это было в самом деле единственным полезным и, возможно, оправданным продвижением в теории. С другой стороны, в случае жидкостей нет больших оснований считать линейный закон поведения неверным, да и в любом случае единственный возможный способ проверить его справедливость — анализ решений, не удовлетворяющих требованию медленности движения. Таким образом, было бы весьма важно получить решения, свободные от данных ограничений.

В данной работе внимание сосредоточено на плоском движении. Используются ортогональные криволинейные координаты и обсуждается возможность такого их выбора, чтобы либо линии тока либо линии постоянной завихренности совпадали с одним из семейств координатных линий. К наиболее важным полученным решениям относятся те, которые соответствуют: (1) движению вдоль канала со стенками в форме круговых дуг; (2) движению между вращающимися круговыми цилиндрами с заданным нормальным расходом через поверхности (центрифужный насос); (3) течению между двумя бесконечными пластинами, наклонёнными друг к другу под произвольным углом.

Обозначив u и v компоненты скорости, p — давление, V — потенциал внешних сил, ν — кинематическую вязкость и ρ — плотность жидкости, запишем двумерные уравнения движения в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial x}+\nu\nabla^2 u,\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial y}+\nu\nabla^2 v.\end{aligned}\tag{1}$$

Исключив давление из этих уравнений, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi)+\frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,y)}=\nu\nabla^4\psi,$$

[1]*Jeffery G. B.* The Two-Dimensional Steady Motion of a Viscous Fluid // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Ser. 6, vol. 29. 1915 (January–June). P. 455–465.

где ψ — функция тока Эрншоу:

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Возьмём систему ортогональных криволинейных координат, определённых сопряжёнными функциями α, β от x, y. Уравнение для ψ можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(\alpha, \beta)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\left(\nu\nabla^2\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\right),$$

или в стационарном случае

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(\alpha, \beta)} = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\nabla^2\psi. \tag{2}$$

§ 1. Решения, для которых линии постоянной завихренности принадлежат множеству эквипотенциальных линий

Координаты могут быть выбраны так, что кривые $\alpha = \mathrm{const}$ совпадают с любым заданным множеством эквипотенциальных линий в свободном пространстве. Следовательно, характерным свойством данного решения является возможность выбрать систему координат α, β таким образом, что $\nabla^2\psi$ есть функция только от α, т. е.

$$\nabla^2\psi = f(\alpha).$$

Подставляя в (2), получим

$$-\frac{\partial\psi}{\partial\beta}f'(\alpha) = \nu f''(\alpha),$$

или

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = -\nu\frac{d}{d\alpha}(\log f'(\alpha)).$$

Проинтегрируем по β:

$$\psi = -\nu\beta\frac{d}{d\alpha}(\log f'(\alpha)) + F(\alpha).$$

Следовательно,

$$\nabla^2\psi = \left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right\}\left\{-\nu\beta\frac{d^3}{d\alpha^3}(\log f'(\alpha)) + F''(\alpha)\right\} = \\ = f(\alpha)$$

или, используя хорошо известное свойство сопряжённых функций,

$$\left|\frac{d(x+iy)}{d(\alpha+i\beta)}\right|^2 = -\nu\beta\frac{1}{f(\alpha)}\frac{d^3}{d\alpha^3}(\log f'(\alpha)) + \frac{F''(\alpha)}{f(\alpha)}.$$

Таким образом, необходимо найти такую функцию от $\alpha + i\beta$, что квадрат её модуля линеен по β. Дж. Н. Ватсон, к которому я обратился с этой задачей, представил мне её полное решение. Если

$$|\phi(\alpha + i\beta)|^2 = A\beta + B,$$

где A, B — действительные функции от α, то

$$\phi(\alpha+i\beta)=\kappa\,\mathrm{e}^{\lambda(\alpha+i\beta)},$$

где λ действительно, а κ может быть комплексно. В этом случае

$$A=0,\quad B=|\kappa|^2\,\mathrm{e}^{2\lambda\alpha}.$$

Применим этот результат в исследуемой проблеме:

$$\frac{d(x+iy)}{d(\alpha+i\beta)}=\kappa\,\mathrm{e}^{\lambda(\alpha+i\beta)},$$

$$\frac{d^3}{d\alpha^3}(\log f'(\alpha))=0,\quad F''(\alpha)=|\kappa|^2\,\mathrm{e}^{2\lambda\alpha}f(\alpha).$$

Следовательно,

$$f(\alpha)=\int \mathrm{e}^{a\alpha^2+b\alpha+c}\,d\alpha,$$

$$F(\alpha)=|\kappa|^2\int\int(d\alpha)^2\,\mathrm{e}^{2\lambda\alpha}\int \mathrm{e}^{a\alpha^2+b\alpha+c}\,d\alpha.$$

Постоянные κ, λ просто определяют масштабы измерений в различных координатных системах, так что имеется лишь два разных решения: (1) $\kappa=1$, $\lambda=0$, (2) $\kappa=1$, $\lambda=1$.

Первый случай даёт

$$\alpha+i\beta=x+iy,$$

и в декартовых координатах имеет место решение

$$\psi=-\nu y(2ax+b)+\int\int\int \mathrm{e}^{a\alpha^2+b\alpha+c}\,(dx)^2.$$

При $a=0$ это даёт

$$\psi=-b\nu y+A\,\mathrm{e}^{bx}+Bx^2+Cx, \tag{I}$$

в то время как при a, отличном от нуля, сдвиг начала координат даёт следующее:

$$\psi=-2\nu axy+A\int\int\int \mathrm{e}^{ax^2}\,(dx)^3. \tag{II}$$

Решения (I) и (II) представляют собой единственную пару отличных друг от друга решений, для которых линии постоянной завихренности являются параллельными прямыми. Во втором случае при $\kappa=1$ и $\lambda=1$

$$\alpha+i\beta=\log(x+iy).$$

Для полярных координат r, θ:

$$\alpha=\log r,\quad \beta=\theta,$$

и

$$\psi=-\nu\theta(2a\log r+b)+\int\frac{dr}{r}\int r\,dr\int \mathrm{e}^{a(\log r)^2+b\log r+c}\,\frac{dr}{r}.$$

Это приводит к двум следующим различным решениям, соответствующим случаям $a = 0$ и $a \neq 0$. При $a = 0$

$$\begin{aligned} \psi &= -b\nu\theta + Ar^{b+2} + Br^2 + C\log r, \quad b \neq 0 \text{ или } -2 \\ \psi &= 2\nu\theta + A(\log r)^2 + Br^2 + C\log r, \quad b = -2, \end{aligned} \tag{III}$$

а при $a \neq 0$ преобразование масштаба по r даёт

$$\psi = -2\nu a\theta \log r + A\int \frac{dr}{r}\int r\,dr \int \mathrm{e}^{a(\log r)^2}\,\frac{dr}{r}. \tag{IV}$$

Решения (III) и (IV) представляют собой единственную пару отличных друг от друга решений, для которых линии постоянной завихренности — концентрические окружности. Таким образом, получены все решения, для которых линии постоянной завихренности являются эквипотенциальными линиями в свободном пространстве.

§ 2. Решения, для которых линии тока принадлежат множеству эквипотенциальных линий

Характерным свойством этого типа решений является существование таких криволинейных координат, при которых $\psi = f(\alpha)$. Не представляется возможность исследовать данный случай с такой же общностью, как в предыдущем параграфе. Из (2) имеем

$$f'(\alpha)\frac{\partial}{\partial\beta}(\nabla^2\psi) = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\nabla^2\psi,$$

или, обозначая

$$\mathrm{M} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2,$$

заметим, что α, β и f связаны условием того, что M должно удовлетворять уравнению

$$\begin{gathered} \nu f''(\alpha)\left(\frac{\partial^2\mathrm{M}}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\mathrm{M}}{\partial\beta^2}\right) + 2\nu f'''(\alpha)\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\alpha} - \\ -f'(\alpha)f''(\alpha)\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\beta} + \nu f^{(IV)}(\alpha)\mathrm{M} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Это будет происходить для произвольной системы α, β, если только $f'' = 0$, что соответствует другому очевидному факту, а именно: любое решение уравнения $\nabla^2\psi = 0$ есть решение уравнения (2). Следовательно, в вязкой жидкости возможно любое безвихревое движение.

Положим

$$\alpha + i\beta = (x + iy)^n,$$

тогда

$$\mathrm{M} = n^2(\alpha^2 + \beta^2)^{(n-1)/n},$$

и уравнение (3) даёт

$$\begin{gathered} 2\nu(n-1)(n-2)f''(\alpha) + 4\nu n(n-1)\alpha f'''(\alpha) - \\ -2n(n-1)\beta f'(\alpha)f''(\alpha) + \nu n^2 f^{(IV)}(\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) = 0. \end{gathered}$$

При $n = 1$ достаточно $f^{(IV)}(\alpha) = 0$, что ведёт к хорошо известному решению для случая движения между бесконечными параллельными пластинами:

$$\psi = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

С другой стороны, приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях β, будем иметь

$$f^{IV}(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha)f'' = 0, \quad f'''(\alpha) = 0.$$

Отсюда следует линейность функции $f(\alpha)$, что соответствует случаю безвихревого движения. Видно, что ни при каких значениях n, отличных от единицы, не существует новых решений данного класса.

Рассмотрим далее полярные координаты r, θ. Уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(r, \theta)} = \nu r \nabla^4 \psi, \tag{4}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

Будем сначала искать решение в форме

$$\psi = f(r).$$

Из (4) получим

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\right)\right) = 0,$$

то есть

$$\psi = Ar^2\log r + Br^2 + C\log r. \tag{V}$$

Затем будем разыскивать решение ψ, зависящее только от θ. Пусть $\psi = \Theta$, тогда

$$\nabla^2\psi = \frac{\Theta''}{r^2}, \quad \nabla^4\psi = \frac{1}{r^4}(4\Theta'' + \Theta^{(IV)}).$$

После подстановки в (4)

$$2\Theta'\Theta'' = 4\nu\Theta'' + \nu\Theta^{(IV)}$$

и интегрирования

$$\Theta'^2 = 4\nu\Theta' + \nu\Theta''' + a$$

$$\frac{\Theta'^3}{3} = 2\nu\Theta'^2 + \nu\frac{\Theta''^2}{2} + a\Theta' + b$$

придём к равенству

$$\theta = \sqrt{\frac{3\nu}{2}}\int\frac{d\Theta'}{\sqrt{\Theta'^3 - 6\nu\Theta'^2 - 3a\Theta' - 3b}},$$

которое может быть записано в виде

$$\theta = \frac{\sqrt{6\nu}}{2}\int\frac{d\Theta'}{\sqrt{(\Theta' - \lambda)(\Theta' - \mu)(\Theta' - 6\nu + \lambda + \mu)}},$$

где λ, μ — постоянные.

Представим

$$\Theta' = \lambda \sin^2 \phi + \mu \cos^2 \phi,$$

тогда

$$\sqrt{\frac{6\nu - \lambda - 2\mu}{6\nu}}(\theta - \theta_0) = \int\limits_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - (\lambda - \mu)\sin^2\phi/(6\nu - \lambda - 2\mu)}}.$$

Вводя, наконец, новые постоянные k, m

$$k^2 = \frac{\lambda - \mu}{6\nu - \lambda - 2\mu}, \quad m^2 = \frac{6\nu - \lambda - 2\mu}{6\nu},$$

будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \Theta' = 2\nu(1 - m^2 - k^2m^2) + 6\nu k^2 m^2 \,\mathrm{sn}^2\{m(\theta - \theta_0)\}, \tag{VI}$$

где постоянные k, m, θ_0 произвольны.

§ 3. Решения, не зависящие от степени вязкости

Рассматривая движение жидкости между двумя концентрическими цилиндрами, вращающимися с заданными угловыми скоростями, заметим, что возрастание вязкости жидкости влечёт за собой увеличение момента, обеспечивающего вращение цилиндров. Но кинематика движения при этом не изменится. Это справедливо для любого решения ψ, не зависящего от вязкости ν, т. е. обе части уравнения (2) по отдельности обращаются в нуль. В декартовых координатах это записывается следующим образом:

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, y)} = 0, \tag{5}$$

$$\nabla^4\psi = 0. \tag{6}$$

Обратим внимание на то, что уравнение (6) традиционно для двумерного движения вязкой жидкости в квазистатическом приближении (квадратами и произведениями скоростей можно пренебречь). Так как точное решение должно удовлетворять уравнению (5), то

$$\nabla^2\psi = f(\psi),$$

т. е. завихренность неизменна вдоль каждой линии тока. Подставляя в (6), получим

$$f''(\psi)\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\} + f'(\psi)f(\psi) = 0.$$

Таким образом, либо (1) получающаяся скорость есть функция ψ и, следовательно, постоянна вдоль каждой линии тока, либо (2) f'' и f' равны нулю. В последнем случае

$$\nabla^2\psi = \mathrm{const} = 4a,$$

а общее решение имеет вид

$$\psi = a(x^2 + y^2) + \chi,$$

где χ — произвольное решение уравнения $\nabla^2\chi = 0$. Отсюда следует, что возможным движением вязкой жидкости может быть суперпозиция любого вращения как твёрдого целого и безвихревого движения. К другим движениям этого класса относятся только те, для которых скорость и завихренность постоянны вдоль каждой линии тока.

§ 4. Обсуждение полученных результатов

Течение между двумя плоскостями, наклонёнными друг к другу под произвольным углом. Рассмотрим сначала уравнение (VI). Без ограничения общности можно принять $\theta_0 = 0$, так что

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\theta} &= 2\nu(1 - m^2 - m^2k^2) + 6\nu k^2 m^2 \operatorname{sn}^2(m\theta, k) = \\ &= 2\nu(1 + 2m^2 - m^2k^2) - 6\nu m^2 \operatorname{dn}^2(m\theta, k).\end{aligned}$$

Линиями тока являются все прямые, проходящие через начало координат. Пусть u — скорость жидкости:

$$u = -\frac{1}{r}\frac{d\psi}{d\theta}.$$

Постоянные m, k могут быть выбраны так, чтобы скорость обращалась в нуль при $\theta = \alpha$, а следовательно, в силу чётности функции u от θ, и при $\theta = -\alpha$, в то время как значения ψ, соответствующие этим двум линиям тока, отличались бы на заданную величину. Таким образом, мы приходим к решению задачи о движении жидкости между двумя неподвижными плоскостями, расположенными под углом 2α друг к другу. Движение это вызвано тем, что прямая пересечения плоскостей есть линия источников заданной мощности. Если исключить начало координат, получим течение в канале со сходящимися берегами.

Обозначим через Q суммарный расход жидкости, вытекающей из начала координат:

$$Q = -4\nu\alpha(1 + 2m^2 - m^2k^2) + 12\nu m^2 \int\limits_0^\alpha \operatorname{dn}^2(m\theta, k)\, d\theta,$$

где

$$\int\limits_0^\zeta \operatorname{dn}^2(z, k)\, dz = \mathrm{E}(\zeta, k),$$

а E — эллиптический интеграл второго рода. Следовательно,

$$Q = -4\nu\alpha(1 + 2m^2 - m^2k^2) + 12\nu m\, \mathrm{E}(m\alpha, k).$$

Это соотношение вместе с

$$3k^2m^2 \operatorname{sn}^2(m\alpha, k) + 1 - m^2 - m^2k^2 = 0$$

достаточно для нахождения m и k (α должно быть выражено в радианах).

Если угол между плоскостями мал, можно принять $\operatorname{sn} z = z$ и прийти к приближению для почти параллельных плоскостей:

$$\frac{d\psi}{d\theta} = 2\nu\{1 - m^2 - m^2k^2(1 - 3m^2\theta^2)\}.$$

Поскольку угол между плоскостями равен 2α, имеем

$$1 - m^2 - m^2k^2(1 - 3m^2\alpha^2) = 0$$

или

$$k^2 = \frac{1 - m^2}{m^2(1 - 3m^2\alpha^2)}, \quad \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{6\nu m^2(1 - m^2)}{1 - 3m^2\alpha^2}(\theta^2 - \alpha^2).$$

Видно, что в этом приближении профиль скорости в любом поперечном сечении имеет такой же параболический вид, как и для течения между параллельными плоскостями.

Решения I, II и IV приводят к весьма интересным множествам линий тока. Однако они не могут быть физически реализованы и, по-видимому, не представляют большого интереса. Перейдём к рассмотрению решения III.

Центрифужный насос. Имеем

$$\psi = -b\nu\theta + Ar^{b+2} + Br^2 + c\log r,$$

так что компоненты скоростей следующие:

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{b\nu}{r},$$

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial r} = A(b+2)r^{b+1} + 2Br + \frac{C}{r}.$$

Из уравнений движения можно найти среднее давление. В отсутствие массовых сил

$$p = -4b\rho\nu B\theta + \rho f(r),$$

где функция $f(r)$ в случае необходимости легко определяется. Если включить в область всю окрестность начала координат, то из однозначности p сразу следует $B = 0$. В данном случае решение соответствует движению, получающемуся при вращении полого (проколотого) цилиндра, который равномерно вдоль своей поверхности либо всасывает, либо извергает жидкость. Последняя при этом или утекает на бесконечность, или поглощается соосным с предыдущим другим пористым цилиндром, который может оставаться в покое либо вращаться с любой угловой скоростью. Расход жидкости определяет постоянную b, а угловые скорости цилиндров — постоянные A и C.

Подобное устройство реализуется в центрифужном насосе. Если жидкость вязкая, то наличие лопаток (лопастей) не является абсолютно необходимым, однако они могут существенно повысить эффективность данной машины. В отсутствие второго цилиндра жидкость занимает область вплоть до бесконечности, так что необходимо положить $A = 0$ и $b > 0$ (если имеет место растекание, или движение от центра).

Обозначим через a радиус цилиндра, вращающегося с угловой скоростью Ω и выделяющего в единицу времени объём жидкости Q. Тогда

$$C = a^2\Omega, \quad b = Q/(2\pi\nu),$$

и легко найдём, что

$$p = p_0 - \frac{1}{8\pi^2\rho r^2}(4\pi^2a^4\Omega^2 + Q^2),$$

где p_0 — давление на бесконечности. Таким образом, получено давление, создаваемое насосом при его вращении с данной скоростью и извержении заданного в единицу времени объёма жидкости.

Течение вдоль кругового канала под действием давления. Рассмотрим, наконец, решение V:

$$\psi = Ar^2\log r + Br^2 + C\log r.$$

Для радиальной u и трансверсальной v компонент скорости имеем

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0,$$
$$v = \frac{\partial\psi}{\partial r} = 2Ar\log r + (A + 2B)r + \frac{C}{r}.$$

При $A = 0$ это есть известное решение для вращающихся соосных цилиндров. Из уравнений движения в полярных координатах нетрудно определить среднее давление p:

$$p = 4\nu\rho A\theta + \rho f(r),$$

где

$$f(r) = 2A(\log r)^2(Ar^2 + C) + 2\log r(ABr^2 + AC + 2BC)+$$
$$+\frac{1}{2}(A^2 + 4B^2)r^2 - \frac{C^2}{2r^2}.$$

Постоянные B, C могут быть выбраны так, чтобы скорость равнялась нулю при любых двух значениях r. В результате имеем решение для течения вязкой жидкости вдоль канала, ограниченного двумя концентрическими круговыми дугами. В радиальном поперечном сечении давление не является постоянным, а меняется согласно закону, задаваемому $f(r)$. Необходимо отметить, что $f(r)$ содержит лишь квадраты коэффициентов A, B, C и, следовательно, имеет порядок квадрата скорости.

Пусть канал ограничен круговыми дугами радиусов a, b, которые видны под углом α из их общего центра, и пусть P — разность давлений между соответствующими точками в двух граничных поперечных сечениях. Тогда

$$P = 4\mu A\alpha,$$

где μ — коэффициент вязкости, равный $\nu\rho$. Условие того, что скорость обращается в нуль при $r = a$ и $r = b$, приводит к следующим уравнениям для определения постоянных B, C:

$$A(r\log r^2 + r) + 2Br + \frac{C}{r} = 0, \quad r = a, b,$$

откуда

$$B = -\frac{A(a^2\log a^2 - b^2\log b^2 + a^2 - b^2)}{2(a^2 - b^2)}$$
$$C = \frac{Aa^2b^2(\log a^2 - \log b^2)}{a^2 - b^2}.$$

Если теперь обозначить через Q объём жидкости, протекающей через канал единичной глубины в единицу времени, то Q равно разности значений ψ при $r = a$ и $r = b$:

$$Q = A(b^2\log b - a^2\log a) + B(b^2 - a^2) + C(\log b - \log a) =$$
$$= \frac{P}{8\mu\alpha}\left[a^2 - b^2 - \frac{4a^2b^2}{a^2 - b^2}\left(\log\frac{a}{b}\right)^2\right].$$

Если устремить a и b в бесконечность таким образом, чтобы $a - b \to d$ и $a\alpha \to l$, то

$$Q \to \frac{Pd^3}{12\mu l},$$

что согласуется с известным результатом для течения между параллельными пластинами.