Спиралевидные движения вязкой жидкости[1]

Г. Гамель

Введение

Система уравнений, описывающая движения вязкой жидкости, в плоском случае при введении функции тока ψ соотношениями

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

может быть сведена к одному уравнению:

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \sigma\Delta\Delta\psi, \tag{I}$$

где σ — коэффициент кинематической вязкости и Δ — оператор Лапласа.

Этому уравнению удовлетворяют все потенциальные движения

$$\Delta\psi = 0,$$

что, однако, не имеет большого значения, поскольку для вязких жидкостей на твердых стенках выполнены условия прилипания, и поэтому никакое потенциальное движение существовать не может. Лишь ламинарное течение Пуазейля является точным решением уравнения (I), в котором квадратичные члены влияния не оказывают, поскольку для этого течения обращаются в нуль.

Таким образом, весьма полезно и важно построить другие *точные* решения (I), для которых квадратичные члены не исчезают. Таковые будем искать в дальнейшем прежде всего среди довольно часто наблюдаемых течений с линиями тока в виде спиралей. Кроме того, изучим родственные решения для чисто радиального течения.

[1] *Hamel G.*, Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten, Jahr.—Ber. Deutsch. Math. Ver. Bd. 25. 1917. S. 34–60.

Первая часть

Зададимся вопросом:

Есть ли среди решений уравнения (I) решения, не являющиеся потенциальными движениями, но линии тока которых совпадают с линиями тока потенциальных движений, в то время как распределение скоростей совершенно другое?

Ниже приводятся такие решения. Для всех них линии тока являются логарифмическими спиралями (включая концентрические круги и радиальные лучи). Для нахождения распределения скоростей получено обыкновенное дифференциальное уравнение, которое при чисто радиальном течении приводит к эллиптическим функциям. Обсуждено влияние квадратичных членов и существенное различие между случаями втекания и вытекания (см. §§ 7, 8, 9).

Итак, встаёт вопрос о решениях уравнения (I), для которых

$$\psi = f(\varphi)$$

и $\Delta\varphi = 0$, но $\Delta\psi \neq 0$. Последнее исключает равенство

$$f''(\varphi) = 0.$$

Ограничимся случаем *стационарности*: $\partial\psi/\partial t = 0$.

§ 1.

Для упрощения вычислений сначала решим вспомогательную задачу:

Уравнение (I) преобразовать к изометрическим координатам, т. е. таким координатам φ, χ, что

$$\varphi + i\chi = w(x + iy) = w(z).$$

Пусть также

$$\psi = \psi(\varphi, \chi); \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\chi}{\partial x}.$$

Обозначая $\partial^2\psi/\partial\varphi^2 + \partial^2\psi/\partial\chi^2$ через $\Delta'\psi$, после сокращений получим

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = Q, \quad \Delta\psi = Q\Delta'\psi.$$

Для двойного интеграла по любой области справедливо следующее:

$$\int\int\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\Delta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx\,dy = \int\int d\Delta\,d\psi =$$
$$= \int\int\left(\frac{\partial(Q\Delta')}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\chi} - \frac{\partial(Q\Delta')}{\partial\chi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)d\varphi\,d\chi =$$
$$= \int\int\left(\frac{\partial(Q\Delta')}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\chi} - \frac{\partial(Q\Delta')}{\partial\chi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)dx\,dy.$$

Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial x} = \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = Q,$$

то

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} =$$

$$= Q^2\left\{\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi} - \frac{\partial \Delta'}{\partial \chi}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right) + \Delta'\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi} - \frac{\partial \ln Q}{\partial \chi}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)\right\}.$$

Далее,

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial \varphi} = 2\frac{\partial}{\partial \varphi}\operatorname{Re}\ln\frac{dw}{dz} = 2\operatorname{Re}\frac{d}{dw}\ln\frac{dw}{dz} = 2\operatorname{Re}\frac{d^2w/dz^2}{(dw/dz)^2}$$

и

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial \chi} = 2\frac{\partial}{\partial \chi}\operatorname{Re}\ln\frac{dw}{dz} = -2\frac{\partial}{\partial \varphi}\operatorname{Im}\ln\frac{dw}{dz} =$$

$$= -2\operatorname{Im}\frac{d}{dw}\ln\frac{dw}{dz} = -2\operatorname{Im}\frac{d^2w/dz^2}{(dw/dz)^2}.$$

Введём аналитическую функцию z:

$$2\frac{d^2w/dz^2}{(dw/dz)^2} = a + bi,$$

и получим

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} =$$

$$= \left|\frac{dw}{dz}\right|^4\left\{\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi} - \frac{\partial \Delta'}{\partial \chi}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right) + \Delta'\left(a\frac{\partial \psi}{\partial \chi} + b\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)\right\}.$$

Окончательно будем иметь

$$\Delta\Delta\psi = Q\Delta'(Q\Delta'\psi) =$$

$$= Q^2\Delta'\Delta'\psi + Q\Delta'Q\Delta'\psi + 2Q\left(\frac{\partial \Delta'\psi}{\partial \varphi}\frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Delta'\psi}{\partial \chi}\frac{\partial Q}{\partial \chi}\right) =$$

$$= Q^2\left\{\Delta'\Delta'\psi + \Delta'\psi\frac{\Delta' Q}{Q} + 2\left(\frac{\partial \Delta'\psi}{\partial \varphi}\,a - \frac{\partial \Delta'\psi}{\partial \chi}\,b\right)\right\}.$$

Так как $\ln Q = \ln|dw/dz|^2$ — гармоническая функция, то

$$\Delta' \ln Q = 0,$$

причём

$$\frac{\Delta' Q}{Q} = \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \chi}\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Используя проведенные выкладки, запишем уравнение (I), преобразованное к изометрическим координатам (стационарный случай):

$$\frac{\partial \Delta'\psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi} - \frac{\partial \Delta'\psi}{\partial \chi}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \Delta'\psi\left(a\frac{\partial \psi}{\partial \chi} + b\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \sigma\left\{\Delta'\Delta'\psi + \Delta'\psi(a^2+b^2) + 2\left(\frac{\partial \Delta'\psi}{\partial \varphi}\,a - \frac{\partial \Delta'\psi}{\partial \chi}\,b\right)\right\},$$

при этом $a + bi$ — аналитическая функция

$$2\frac{d^2w/dz^2}{(dw/dz)^2}, \quad w = \varphi + i\chi, \quad z = x + iy,$$

а Δ' означает оператор $\partial^2/\partial\varphi^2 + \partial^2/\partial\chi^2$.

§ 2.

Вернёмся к поставленному в начале первой части вопросу и сразу заметим, что ψ может быть функцией только φ:

$$\psi = f(\varphi).$$

Обозначим производные по φ штрихами, тогда из (II) следует

$$f''f'b = \sigma\{f^{IV} + f''(a^2 + b^2) + 2f'''a\}, \tag{III}$$

причём ψ может зависеть только от φ, но не от χ.

Это возможно, очевидно, лишь тогда, когда a и b не зависят от χ. Так как $a + bi$ есть аналитическая функция $\varphi + \chi i$, то необходимо потребовать

$$a + bi = 2\frac{d^2w/dz^2}{(dw/dz)^2} = C = \text{const}.$$

Ниже (§ 3) увидим, что это единственная возможность.

Из постоянства a и b следует

$$w = -\frac{2}{a + bi}\ln(z - z_0) + w_0,$$

или после введения полярных координат

$$z - z_0 = r\,\mathrm{e}^{i\theta},$$

$$\varphi = -\frac{2}{a^2 + b^2}(a\ln r + b\theta) + \varphi_0.$$

Таким образом, *линии тока* $\varphi = \text{const}$ *совпадают с логарифмическими спиралями*

$$a\ln r + b\theta = \text{const}.$$

Равенство $a = 0$ означает чисто радиальное течение, а $b = 0$ — течение по концентрическим окружностям. *Распределение скоростей* задаётся уравнением (III). Для *радиальной компоненты* имеем

$$\frac{\partial\psi}{r\,\partial\theta} = f'\frac{\partial\varphi}{r\,\partial\theta} = -\frac{2b}{a^2 + b^2}\frac{f'}{r},$$

а для *угловой*

$$-\frac{\partial\psi}{\partial r} = -f'\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2a}{a^2 + b^2}\frac{f'}{r},$$

причём $2f'/(r\sqrt{a^2+b^2}\,)$ — *абсолютная величина скорости. На твёрдых стенках f' должна обращаться в нуль.*

Без ограничения общности предположим теперь, что спирали закручены влево, так что r возрастает вместе с θ, а a и b имеют разные знаки. Так как функция $-(\varphi+i\chi)$ — аналитическая, как и $\varphi+i\chi$, а уравнение (III) инвариантно относительно одновременного изменения времени в φ, a, b, то можно положить

$$a \geqslant 0, \quad b \leqslant 0.$$

Учитывая знак компонент $\partial\psi/(r\,\partial\theta)$ и $-\partial\psi/\partial r$, будем называть случай $f'>0$ *источником* (вытеканием), а $f'<0$ — *стоком* (втеканием).

В силу того, что возможна замена φ на $c\varphi$, на a и b допустимо наложить ещё одно условие.

§ 3.

Дадим теперь доказательство того, что на основе требования о постоянстве a и b течения по логарифмическим спиралям представляют собой единственно возможные течения, у которых картина линий тока соответствует потенциальному движению, однако сами они таковыми не являются.

Если бы a и b не были константами, то аналитическая функция $a+bi$ с помощью (III) осуществляла бы конформное отображение плоскости $\varphi+i\chi$, которое кратко можно записать в виде

$$a^2+b^2-2A(\varphi)a-2B(\varphi)b+C(\varphi)=0, \tag{III$'$}$$

где

$$A=-\frac{f'''}{f''}, \quad B=\frac{f'}{2\sigma}, \quad C=\frac{f^{IV}}{f''}.$$

При этом случай $f''=0$ из рассмотрения исключается. Прямым $\varphi=\mathrm{const}$, согласно III$'$, соответствуют окружности, образующие изометрическое множество кривых.

Если множество кривых

$$g(a,b,\varphi)=0$$

изометрическое, так что $\Delta\varphi=0$, то функция g должна удовлетворять уравнению

$$\Delta g g_\varphi^2-2g_\varphi(g_{\varphi a}g_a+g_{\varphi b}g_b)+g_{\varphi\varphi}(g_a^2+g_b^2)=0, \tag{IV}$$

$$\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial a^2}+\frac{\partial^2}{\partial b^2}\right),$$

которое должно либо выполняться тождественно, либо быть следствием (III$'$).

Имеем

$$g_a=2(a-A),\ \ g_b=2(b-B),\ \ g_{\varphi a}=-2A',\ \ g_{\varphi b}=-2B',$$
$$\Delta g=4,\ g_\varphi=-2A'a-2B'b+C',\ g_{\varphi\varphi}=-2A''a-2B''b+C'',$$
$$g_a^2+g_b^2=4(a-A)^2+4(b-B)^2=4(A^2+B^2-C).$$

Таким образом, уравнение (IV) квадратично по a и b, но довольно простые вычисления показывают, что квадратичные члены пропадают. Коэффициенты при низших степенях должны остаться, откуда следуют три условия:

$$0=\frac{A''}{A'}-\frac{C'-2AA'-2BB'}{C-A^2-B^2}=$$
$$=\frac{B''}{B'}-\frac{C'-2AA'-2BB'}{C-A^2-B^2}=\frac{C''}{C'}-\frac{C'-2AA'-2BB'}{C-A^2-B^2}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует пропорциональность A', B', C', а также то, что отношение

$$\frac{B'}{C - A^2 - B^2}$$

должно быть константой.

Следовательно,

$$C = \alpha_1 B + \beta, \quad A = \gamma_1 B - \delta,$$

или

$$\frac{\alpha_1}{2\sigma} = \alpha, \quad \frac{\gamma_1}{2\sigma} = -\gamma,$$

$$f^{IV} = \alpha f' f'' + \beta f'' \quad \text{и} \quad f''' = \gamma f' f'' + \delta f'',$$

что, будучи проинтегрированным, даёт

$$f''' = \frac{1}{2}\alpha f'^2 + \beta f' + \varepsilon \quad \text{и} \quad f'' = \frac{1}{2}\gamma f'^2 + \delta f' + \eta.$$

Приравнивая два выражения для f''', запишем

$$f'' = \frac{\alpha f'^2/2 + \beta f' + \varepsilon}{\gamma f' + \delta},$$

что должно согласовываться с ранее приведённым выражением для f''. Отсюда

$$\gamma = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \delta^2, \quad \varepsilon = \delta\eta,$$

так что $C = A^2 = \delta^2 = \mathrm{const}$ и $f'' = \delta f' + \eta$.

Из условия

$$\frac{B}{A^2 + B^2 - C} = \frac{B'}{B^2} = \mathrm{const}$$

следует $f''/f'^2 = \mathrm{const}$, а это вместе с $f'' = \delta f' + \eta$ приводит к завершающему доказательство противоречию

$$f' = \mathrm{const}.$$

§ 4.

Обратимся теперь к нахождению скорости из дифференциального уравнения (III). Оно может быть один раз проинтегрировано и после введения величины скорости на расстоянии 1, пропорциональной $u = f'(\varphi)$, примет вид

$$u'' + 2au' + u(a^2 + b^2) - \frac{b}{2\sigma}u^2 + C = 0.$$

Это уравнение соответствует уравнению колебаний с демпфированием и потенциалом

$$-\frac{b}{6\sigma}u^3 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)u^2 + Cu.$$

Начнём с *предельных случаев*.

1. Траектории частиц — *концентрические круги*: $b = 0$. Тогда

$$u = -\frac{C}{a^2} + \mathrm{e}^{-a\varphi}(A + B\varphi)$$

и в силу того, что $\varphi = -(2/a)\ln r$,

$$u = \mathrm{const} + r^2(A + B_1 \ln r),$$

причём распределение скорости даётся формулой

$$v = \frac{2u}{ar}.$$

Здесь содержится и точное решение Куэтта: три константы определяются из граничных условий и того, что давление при обороте вдоль замкнутой линии тока возвращается к своему первоначальному значению. Несложное вычисление даёт $B_1 = 0$ и

$$v = \frac{c}{r}(r^2 - r_1^2).$$

(Об определении давления см. в § 10.)

2. Течение *чисто радиальное*: $a = 0$. Дифференциальное уравнение принимает вид

$$u'' + b^2 u - \frac{b}{2\sigma}u^2 + C = 0$$

и сводится к уравнению в эллиптических функциях

$$u' = \sqrt{-\frac{b}{3\sigma}} \cdot \sqrt{-u^3 + 3\sigma b u^2 + \mathrm{const} \cdot u + \mathrm{const}} = \sqrt{-\frac{b}{3\sigma}} \cdot \sqrt{(e_1 - u)(e_2 - u)(e_3 - u)},$$

где e_1, e_2 и e_3 связаны одним равенством

$$e_1 + e_2 + e_3 = 3\sigma b,$$

а в остальном произвольны.

Так как одна степень свободы в выборе a и b остаётся, положим $b = -2$. Тогда $\varphi = \theta$. Условие для e_i $(i = 1, 2, 3)$ принимает вид

$$e_1 + e_2 + e_3 = -6\sigma$$

и

$$u' = \sqrt{\frac{2}{3\sigma}} \cdot \sqrt{(e_1 - u)(e_2 - u)(e_3 - u)}.$$

Таким образом,

$$u = -2\sigma + \wp\left(\frac{i}{\sqrt{6\sigma}}(\theta - \theta_0); g_2, g_3\right),$$

где θ_0, g_2 и g_3 — три постоянные интегрирования.

Давление однозначно определяется из уравнения (см. § 10)

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2}\right) = \frac{f'f''}{r^2} + \frac{2\sigma f''}{r^2} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r^2}\left(\frac{f'^2}{2} + 2\sigma f'\right).$$

§ 5. Обсуждение радиального течения

Уравнение

$$e_1 + e_2 + e_3 = -6\sigma \tag{1}$$

означает, что по меньшей мере одно из e_i имеет отрицательную действительную часть. Пусть

$$\mathrm{Re}\,(e_1) \geqslant \mathrm{Re}\,(e_2) \geqslant \mathrm{Re}\,(e_3).$$

Тогда $\mathrm{Re}\,(e_3) \leqslant -2\sigma$, причём знак равенства будет только в случае, когда действительные части всех e_i равны.

а) При трёх действительных e_i либо

$$-\infty < u \leqslant e_3 \leqslant -2\sigma,$$

либо

$$e_2 \leqslant u \leqslant e_1.$$

б) При одном действительном e

$$-\infty \leqslant u \leqslant e,$$

причём e положительно.

Будем различать два возможных класса течений:

1°. Твёрдые стенки отсутствуют и в *безграничной* жидкости имеется один источник или сток. Тогда u должна быть периодической функцией φ с периодом, составляющим целую часть 2π. Случаи $u = -\infty$ и $u = 0$ можно исключить из рассмотрения. Данный пункт реализуется, только когда все три e_i действительны и $e_2 \leqslant u \leqslant e_1$.

2°. Имеются *две твёрдые стенки* $\theta = 0$ и $\theta = \theta_1$ (θ_1 может быть равным 2π), на которых $u = 0$. Тогда

а) в случае трёх действительных e_i:

$$e_2 \leqslant 0, \quad e_1 \geqslant 0,$$

так что либо

α)

$$e_2 \leqslant u \leqslant 0,$$

либо

β)

$$0 \leqslant u \leqslant e_1;$$

б) в случае одного действительного $e > 0$

$$0 \leqslant u \leqslant e.$$

Напомним, что согласно § 2 неравенство $u > 0$ физически означает источник, а $u < 0$ — сток. Таким образом, в случае 2°аα) имеем сток, а в случаях 2°аβ) и 2°б) — источник. В пункте 1° возможны как сток, так и источник.

§ 6. Первый случай: свободное течение

Для $u = e_2$ положим $\theta = 0$ и запишем

$$\theta = \sqrt{\frac{3\sigma}{2}} \int\limits_{e_2} \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)(u - e_2)(u - e_3)}}.$$

При этом необходимо

$$\int\limits_{e_2}^{e_1} \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)(u - e_2)(u - e_3)}} = \sqrt{\frac{2}{3\sigma}} \frac{\pi}{n}, \tag{2}$$

где n — целое число.

Используя известную подстановку

$$u = e_2 + (e_1 - e_2)\sin^2\psi, \quad \kappa^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3},$$

получим

$$\frac{2}{\sqrt{e_2 - e_3}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2\psi}} = \sqrt{\frac{2}{3\sigma}} \frac{\pi}{n}.$$

Введём теперь *среднюю скорость* (на расстоянии $r = 1$)

$$u_m = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$$

и *отклонение скорости* (на расстоянии $r = 1$)

$$\delta = e_1 - e_2.$$

В силу (1)

$$e_2 - e_3 = 6\sigma + 3u_m - \delta/2 > 0,$$

а также

$$\kappa^2 = \frac{\delta}{6\sigma + 3u_m - \delta/2},$$

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2\psi}} = \frac{2}{n} \frac{\sqrt{6\sigma + 3u_m - \delta/2}}{\sqrt{6\sigma}}. \tag{2$'$}$$

Отсюда можно сделать несколько интересных выводов.

Имеем

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2\psi}} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2\psi}} + \int\limits_0^{\pi/4} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \kappa^2 \cos^2\psi}} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2(1 - \cos 2\psi)/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2(1 + \cos 2\psi)/2}} \right) d\psi >$$

$$> 2 \int\limits_0^{\pi/4} \frac{d\psi}{1 + \kappa^2/2},$$

а также

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1+\kappa^2\sin^2\psi}}=\frac{1}{1+\varepsilon\kappa^2/2},$$

где $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$. Таким образом, связь $(2')$ между u_m, δ, n и σ преобразуется к виду

$$\frac{1}{\sqrt{6\sigma+3u_m-(1-\varepsilon)\delta/2}}=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{6\sigma}$$

или

$$6\sigma+3u_m-\frac{\eta^2\delta}{2}=6\sigma\frac{n^2}{4}, \tag{$2''$}$$

где η — дробь, меньшая единицы.

Кроме того,

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\kappa\,d\psi}{\sqrt{1+\kappa^2\sin^2\psi}}>\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\kappa\,d\psi}{\sqrt{1+\kappa^2\psi^2}}=\operatorname{arsh}\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)$$

и интеграл неограниченно возрастает с ростом κ, поэтому

$$\lim_{\kappa\to\infty}\varepsilon=0,\qquad\lim_{\kappa\to\infty}\eta=1.$$

Из $(2'')$ следует

$$u_m>-2\sigma\left(1-\frac{n^2}{4}\right),$$

что при наименьшем значении $n=1$ даёт

$$u_m>-\frac{3\sigma}{2}.$$

Средняя скорость стока ограничена сверху и тем больше, чем меньше вязкость жидкости.

Однако имеется единственное ограничение: *если u_m и целое число n выбраны так, что*

$$6\sigma+3u_m>6\sigma\frac{n^2}{4},$$

то существует, очевидно, единственное δ.

Если $\delta/2$ растёт от нуля до величины $6\sigma+3u_m$, то $\eta^2\delta/2$ изменяется от нуля до $6\sigma+3u_m$ и равно положительной (по допущению) величине $6\sigma+3u_m-6\sigma n^2/4$.

§ 7. Второй случай: истечение между твёрдыми стенками

По существу это случаи 2°аβ) и 2°б), которые здесь можно рассмотреть совместно:

$$\theta=\sqrt{\frac{3\sigma}{2}}\int\limits_0^u\frac{du}{\sqrt{(e-u)(u^2+2\alpha u+\beta)}}.$$

В силу равенства

$$2\alpha=-e_2-e_3=6\sigma+e$$

и неравенства

$$\beta = e_2\, e_3 > 0,$$

величина e — максимальное значение скорости (на расстоянии $r = 1$), а величина $u^2 + 2\alpha u + \beta$ при заданном e может принимать любое значение от $u^2 + 2\alpha u$ до бесконечности. Поэтому

$$\theta_1 = 2\sqrt{\frac{3\sigma}{2}}\int\limits_0^e \frac{du}{\sqrt{(e-u)(u^2+2\alpha u+\beta)}}$$

снизу оказывается неограниченным, а сверху ограничено значением

$$\theta_{1,\max} = 2\sqrt{\frac{3\sigma}{2}}\int\limits_0^e \frac{du}{\sqrt{(e-u)u(u+e+6\sigma)}}.$$

Так как

$$\int\limits_0^e \frac{du}{\sqrt{(e-u)u}} = \pi,$$

то

$$\theta_{1,\,\max} = 2\pi\sqrt{\frac{3\sigma}{2e(1+\varepsilon)+12\sigma}}, \tag{4}$$

где $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Таким образом, согласно предыдущему уравнению при истечении жидкости максимальный угол $\theta_{1,\,\max}$ между стенками связан с максимальным значением скорости e. При малой скорости и большой вязкости максимум лежит вблизи π, в противном случае он меньше π и может неограниченно уменьшаться.

Следовательно, если угол меньше π, то максимальная скорость вытекающего потока ограничена. В действительности при больших расходах осуществляется отрыв потока от стенок. При каждом заданном θ_1 возможно существование частичного втекания и истечения.

§ 8. Третий случай: сток между твёрдыми стенками

Остаётся случай 2°aα):

$$e_2 \leqslant u \leqslant 0,$$

причём все три корня действительны, e_2, e_3 отрицательны, e_1 положителен. Здесь

$$\theta_1 = 2\sqrt{\frac{3\sigma}{2}}\int\limits_{e_2}^0 \frac{du}{\sqrt{(e_1-u)(u-e_2)(u-e_3)}} =$$

$$= \sqrt{6\sigma}\int\limits_{e_2}^0 \frac{du}{\sqrt{(u-e_2)(-u^2-2\alpha u-\beta)}},$$

а величины

$$2\alpha = -(e_1+e_3) = 6\sigma + e_2, \quad \beta = e_1\, e_3 < 0$$

в остальном произвольны. Задавая e_2, угол θ_1 можно сделать сколь угодно малым. С другой стороны, он может быть и сколь угодно большим, если при заданном e_2 принять $e_3 < 0$ достаточно близким к e_2, не противореча условию $e_1 > 0$. Единственная связь между e_i

$$e_1 + e_2 + e_3 = -6\sigma$$

приводит к неравенствам

$$e_1 > 0, \quad -e_2 - e_3 > 6\sigma.$$

Если теперь $-e_2 \geqslant 3\sigma$, то величину e_3, действительно, можно выбрать произвольно близко к e_2. Отсюда следует, что *если максимальная скорость втекания больше 3σ, то возможен любой угол θ_1 между стенками.*

Если теперь $-e_2 < 3\sigma$, например, $-e_2 = 3\varepsilon\sigma$, то

$$-e_3 = e_1 + (6 - 3\varepsilon)\sigma = -e_2 + e_1 + 6(1 - \varepsilon)\sigma$$

и интеграл

$$\theta_1 = \sqrt{6\sigma} \int\limits_{e_2}^{0} \frac{du}{\sqrt{(u - e_2)(u + (6 - 3\varepsilon)\sigma + e_1)(e_1 - u)}}$$

достигает своего наибольшего значения при $e_1 = 0$:

$$\theta_{1,\,\max} = \sqrt{6\sigma} \int\limits_{-3\varepsilon\sigma}^{0} \frac{du}{\sqrt{(u + 3\varepsilon\sigma)(u + (6 - 3\varepsilon)\sigma)(-u)}} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{6\sigma}}{\sqrt{(6 - 3\varepsilon(2 + \eta))\sigma}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon(1 + \eta)/2}} = \frac{\pi}{\delta},$$

причём η и δ лежат в пределах от нуля до единицы. Таким образом, максимум величины θ_1 больше π.

Если максимальная скорость втекания меньше, чем 3σ, то угол между стенками ограничен величиной π.

§ 9. Течение в спиралях

В силу демпфирования $2au'$ (см. § 4), периодическое решение, кроме случая $u = \text{const}$, невозможно.

Свободное движение по логарифмическим спиралям всегда является потенциальным. Кроме того, имеются течения по логарифмическим спиралям между твёрдыми стенками.

Для того чтобы при $r = \text{const}$ переменная φ была согласована с углом θ, распорядимся постоянными a и b так, что

$$-\frac{2b}{a^2 + b^2} = 1,$$

или

$$b = -1 \pm \sqrt{1 - a^2}, \quad 0 \leqslant a \leqslant 1.$$

Уравнение III после однократного интегрирования имеет вид

$$u'' + 2au' + \beta^2 u + \frac{\beta^2}{4\sigma}u^2 + C = 0,$$

причём $\beta^2 = -2b = 2 \mp 2\sqrt{1 - a^2} < 4$ и $\beta^2 > a^2$.

Скорость на расстоянии 1 равна

$$\frac{2u}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{2}{1 \mp \sqrt{1-a^2}}}\,u,$$

а u представляет собой скорость на расстоянии

$$r = \sqrt{\frac{2}{1 \mp \sqrt{1-a^2}}} = \frac{2}{\beta}.$$

Убрав из рассмотрения демпфирование, получим в точности предыдущий случай (см. § 4), в котором перед квадратным корнем вместо $\sqrt{2/(3\sigma)}$ надо подставить $\sqrt{\beta^2/(6\sigma)}$. Соотношения для e остаются прежними. Из-за того, что $\beta^2 < 4$, угол θ_1 возрастёт.

Несмотря на наличие демпфирования, основной результат остаётся справедливым: *при вытекании жидкости допустимый угол θ_1 ограничивается заданием максимальной скорости; когда последняя становится неограниченной, угол θ_1 обращается в нуль.*

Положим

$$u = v\,\mathrm{e}^{-a\varphi},$$

так что рассматриваемое дифференциальное уравнение запишется так:

$$v'' + (\beta^2 - a^2)v + \frac{\beta^2}{4\sigma}\,v^2\,\mathrm{e}^{-a\varphi} + C\,\mathrm{e}^{a\varphi} = 0.$$

Пусть при $\varphi = 0$ функция v принимает максимальное значение v_0, тогда после умножения на $2v'$ и интегрирования получим

$$v'^{\,2} + (\beta^2 - a^2)(v^2 - v_0^2)\frac{\beta^2}{2\sigma}\int\limits_{v_0}^{v} v^2\,\mathrm{e}^{-a\varphi}\,dv + 2C\int\limits_{v_0}^{v}\mathrm{e}^{a\varphi}\,dv = 0.$$

Из соответствующего уравнения для u

$$u'^{\,2} + 4a\int\limits_{u_0}^{u} u'\,du + \beta^2(u^2 - u_0^2) + \frac{\beta^2}{6\sigma}(u^3 - u_0^3) + 2C(u - u_0) = 0$$

видно, что при одном и том же u_0 кривые u тем круче (соответственно, θ_1 тем меньше), чем больше величина C. Из предыдущего уравнения видно, что чем больше C, тем большее значение принимает величина

$$u'^{\,2} + 4a\int\limits_{u_0}^{u} u'\,du = u'^{\,2} - 4a\int\limits_{u}^{u_0} u'\,du.$$

Отсюда сразу же следует, что для растущей ветви ($u' > 0$) с увеличением C всегда возрастает и $|u'|$. Если пологая кривая (C мало) u' догоняет более крутую кривую, то для первой из них интеграл $\int_{u_0}^{u} u'\,du$ мал (соответственно $\int_{u}^{u_0} u'\,du$ велик), что при $u' > 0$ тотчас ведёт к противоречию, так как из двух величин u' и u'_0 меньшим было u'.

Если же $u' < 0$, то при изменении C на ΔC имеем

$$\Delta\frac{u'^{\,2}}{u_0 - u} + \frac{4a}{u_0 - u}\int\limits_{u}^{u_0}\Delta|u'|\,du = 2\Delta C,$$

или в силу того, что

$$\Delta u'^2 = \Delta|u'| \cdot (2|u'| + \Delta|u'|),$$

$$\frac{\Delta|u'| \cdot (2|u'| + \Delta|u'|)}{u_0 - u} + \frac{4a}{u_0 - u}\int\limits_u^{u_0} \Delta|u'|\,du = 2\Delta C.$$

Если в некоторой точке $\Delta|u'| = 0$, то в этой точке при фиксированном ΔC первое слагаемое с убыванием u уменьшается, переходя от положительных значений к отрицательным. Второе слагаемое также уменьшается. Тогда с убыванием u часть интеграла $\int_{u_0}^{u} \Delta|u'|\,du$ отрицательна. Это, однако, невозможно, так как сумма обоих слагаемых $2\Delta C$ должна быть постоянна.

Таким образом, доказано, что с ростом C угол между стенками θ_1 при фиксированном u_0 уменьшается. Так как разыскивается наибольший возможный угол θ_1, определим минимальное допустимое значение C.

Это значение находится из неравенства $v'^2 > 0$:

$$2C\int\limits_v^{v_0} \mathrm{e}^{a\varphi}\,dv \geqslant -(\beta^2 - a^2)(v_0^2 - v^2) - \frac{\beta^2}{2\sigma}\int\limits_v^{v_0} v^2\,\mathrm{e}^{a\varphi}\,dv,$$

откуда видно, что наименьшее значение C равно нулю либо отрицательно[2].

Последнее неравенство должно быть справедливо при любых v между v_0 и нулём и для всех достижимых положительных и отрицательных φ. Данное неравенство можно записать в виде

$$2C \geqslant -(\beta^2 - a^2)(v_0 + v)\,\mathrm{e}^{-a\varphi_0} - \frac{\beta^2}{6\sigma}(v_0^2 + v_0 v + v^2)\,\mathrm{e}^{-a(\varphi_2+\varphi_0)},$$

где φ_0 и φ_2 — некоторые средние величины. Обратим внимание, что $|\varphi_0|$ и $|\varphi_2|$ должны быть равны нулю при $v = v_0$ и принимать максимальные значения при $v = 0$. Самая сильная оценка следует при достижении правой части неравенства своего наименьшего значения. Таким образом, наименьшее допустимое C определяется равенством

$$2C = -(\beta^2 - a^2)v_0\,\mathrm{e}^{-a\varphi_0'} - \frac{\beta^2}{6\sigma}v_0^2\,\mathrm{e}^{-a(\varphi_2'+\varphi_0')},$$

где φ_0' и φ_2' — положительные максимумы величин φ_0 и φ_2, имеющие место при $v = 0$.

Следовательно, для максимально возможного θ_1 имеем

$$\begin{aligned}
v'^2 &= (\beta^2 - a^2)\Big[(v_0^2 - v^2) - v_0\,\mathrm{e}^{-a\varphi_0'}\int\limits_v^{v_0} \mathrm{e}^{a\varphi}\,dv\Big] + \\
&+ \frac{\beta^2}{2\sigma}\Big[\int\limits_v^{v_0} v^2\,\mathrm{e}^{-a\varphi}\,dv - \frac{1}{3}v_0^2\,\mathrm{e}^{-a(\varphi_2'+\varphi_0')}\int\limits_v^{v_0} \mathrm{e}^{a\varphi}\,dv\Big] = \\
&= (\beta^2 - a^2)[(v_0^2 - v^2) - v_0(v_0 - v)\,\mathrm{e}^{-a(\varphi_0'-\varphi_0)}] + \\
&+ \frac{\beta^2}{2\sigma}\Big[\frac{1}{3}(v_0^3 - v^3)\,\mathrm{e}^{-a\varphi_2} - \frac{1}{3}v_0^2(v_0 - v)\,\mathrm{e}^{-a\varphi_2'-a(\varphi_0'-\varphi_0)}\Big].
\end{aligned}$$

[2] С учётом неравенства $\beta^2 - a^2 > 0$ (см. начало § 9).

Так как $\varphi_0' > \varphi_0$ и $\varphi_2' > \varphi_2$, то

$$v'^2 > (v_0 - v)v\left[(\beta^2 - a^2) + \frac{\beta^2}{6\sigma}(v + v_0)\,\mathrm{e}^{-a\varphi_2'}\right],$$

а так как $\varphi_2' < \theta_1$, то

$$v'^2 > (v_0 - v)v\left[(\beta^2 - a^2) + \frac{\beta^2}{6\sigma}(v + v_0)\,\mathrm{e}^{-a\theta_1}\right],$$

откуда (см. формулу (4))

$$\theta_1 < \frac{2\pi}{\sqrt{(\beta^2 - a^2) + (\beta^2/(6\sigma))v_0(1+\varepsilon)\,\mathrm{e}^{-a\theta_1}}}.$$

Отсюда следует, что с возрастанием v_0 и u_0 величина θ_1 может быть сколь угодно малой.

Вторая часть

§ 10.

Из-за того, что единственно возможное спиралевидное движение, рассматривавшееся до сих пор, было потенциальным, будем искать точные стационарное и нестационарное плоские решения в свободных спиралях другим способом.

В *полярных координатах* дифференциальное уравнение (I) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Delta\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \sigma\Delta\Delta\psi,$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Очевидно, это уравнение допускает линейные по φ решения

$$\psi = u + \varphi\cdot\kappa,$$

так что скорость имеет компоненты

$$v_r = \frac{\kappa}{r}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial u}{\partial r} - \varphi\frac{\partial\kappa}{\partial r}.$$

Для осуществимости свободного течения необходимо, чтобы κ являлось константой. Из дифференциального уравнения получим

$$\frac{\partial\Delta u}{\partial t} + \frac{\kappa}{r}\frac{\partial\Delta u}{\partial r} = \sigma\Delta\Delta u,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

Во избежание многозначности при обходе сингулярной точки $r = 0$ необходимо дополнительно исследовать давление.

Уравнение движения, включающее давление, можно записать следующим образом:

$$d\left(\frac{p}{\mu}+\frac{v^2}{2}\right)=$$
$$=\Delta\psi\,d\psi+\left(\frac{\partial(\sigma\Delta-\partial/\partial t)\psi}{\partial y}\,dx-\frac{\partial(\sigma\Delta-\partial/\partial t)\psi}{\partial x}\,dy\right)=$$
$$=\Delta\psi\,d\psi+\frac{\partial(\sigma\Delta-\partial/\partial t)\psi}{r\,\partial\varphi}\,dr-\frac{\partial(\sigma\Delta-\partial/\partial t)\psi}{\partial r}r\,d\varphi.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{p}{\mu}+\frac{v^2}{2}\right)=\Delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi=$$
$$=\kappa\Delta u-\sigma r\frac{\partial\Delta u}{\partial r}+r\frac{\partial^2u}{\partial t\,\partial r}.$$

Правая часть, согласно уравнению для u, есть константа; для того чтобы давление после обхода точки $r=0$ возвращалось к своему прежнему значению, эта константа должна быть равной нулю, т. е.

$$r\frac{\partial\Delta u}{\partial r}-\frac{r}{\sigma}\frac{\partial^2u}{\partial t\,\partial r}-\frac{\kappa}{\sigma}\Delta u=0.$$

После введения переменной $r\,\partial u/\partial r=v$ это уравнение принимает форму

$$\frac{\partial^2v}{\partial r^2}-\left(1+\frac{\kappa}{\sigma}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{V}$$

§ 11. Стационарные движения

Не зависящие от t решения уравнения (V) имеют вид

$$u=c_1r^{\kappa/\sigma+2}+c_2\ln r+c_3,$$

если $\kappa/\sigma\neq-2$, и

$$u=c_1(\ln r)^2+c_2\ln r+c_3,$$

если $\kappa/\sigma=-2$. Не принимая во внимание тривиальный случай потенциального движения, выделим спиралевидное течение, скорость которого стремится к нулю на бесконечности, если

$$\frac{\kappa}{\sigma}+1<0,$$

т. е. $\kappa<-\sigma$. Таким образом, имеет место достаточно сильный сток.

Спирали при этом имеют форму

$$\varphi=-\frac{u}{\kappa}=C_1r^{\kappa/\sigma+2}+C_2\ln r+C_3.$$

Если $\kappa/\sigma+2<0$, то на бесконечности они приближаются к логарифмическим спиралям. В окрестности стока они существенно отличаются от логарифмических спиралей за счёт существенно более сильной вихревой составляющей.

§ 12. Нестационарные движения

Положим

$$v = \mathrm{e}^{nt}\chi_n(r),$$

тогда из (V) получим

$$\chi_n'' - \frac{1}{r}\Big(1+\frac{\kappa}{\sigma}\Big)\chi_n' - \frac{n}{\sigma}\,\chi_n = 0.$$

Используя сокращение $\lambda = 1 + \kappa/(2\sigma)$, запишем

$$\chi_n = r^\lambda J_{\pm\lambda}\bigg(\sqrt{-\frac{n}{\sigma}}\,r\bigg),$$

где J — бесселева функция:

$$J_\lambda\bigg(\sqrt{-\frac{n}{\sigma}}\,r\bigg) =$$
$$= \mathrm{const}\cdot r^\lambda\bigg(1 + \frac{n}{\sigma}\frac{r^2}{4}\frac{1}{1+\lambda} + \frac{n^2}{\sigma^2}\Big(\frac{r}{2}\Big)^4\frac{1}{2!(1+\lambda)(2+\lambda)} + \ldots\bigg).$$

Если λ не является целым, то в качестве линейно независимых решений можно взять $r^\lambda J_\lambda$ и $r^\lambda J_{-\lambda}$.

§ 13.

Так же как и у уравнения теплопроводности, у (V) имеются интегралы, имеющие в точке $r = 0$, $t = 0$ неопределённость.

Так как уравнение (V) не изменяется при умножении v на произвольный множитель, r — на такой же множитель, а t — на квадрат этого множителя, то должны иметься решения, представимые в форме

$$v = r^\alpha t^\beta w\Big(\frac{r^2}{4\sigma t}\Big) = r^\alpha t^\beta w(z).$$

После подстановки данного выражения в (V) для $w(z)$ получается следующее дифференциальное уравнение:

$$w'' + \frac{\alpha+1-\lambda}{z}\,w' + \Big(\frac{\alpha^2 - 2\lambda\alpha}{4z^2} + \frac{\beta}{z}\Big)w = 0. \tag{VI}$$

Когда это уравнение допускает решение в виде $w = \mathrm{e}^{\mu z}$? Простое вычисление даёт $\mu = -1$, и тогда либо

$$\alpha = 0, \quad \beta = \lambda - 1,$$

либо

$$\alpha = 2\lambda, \quad \beta = -\lambda - 1.$$

Таким образом, имеем два простых интеграла:

$$v = t^{\lambda-1}\exp\Big(-\frac{r^2}{4\sigma t}\Big), \quad v = r^{2\lambda}t^{-\lambda-1}\exp\Big(-\frac{r^2}{4\sigma t}\Big),$$

которые в случае $\lambda = 0$ переходят в известное решение уравнения теплопроводности.

Дальнейший анализ дифференциального уравнения (VI).

Сингулярная точка $z = 0$ является регулярной по классификации Фукса. Определяющее уравнение

$$\varrho^2 + \varrho(\alpha - \lambda) + \frac{\alpha^2 - 2\lambda\alpha}{4} = 0$$

имеет корни

$$\varrho_1 = \lambda - \frac{\alpha}{2}, \quad \varrho_2 = -\frac{\alpha}{2}.$$

Тогда разложения в ряды в общей форме дают

$$w_1 = z^{\lambda-\alpha/2}(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots), \quad w_2 = z^{-\alpha/2}(1 + c_1' z + c_2' z^2 + \ldots)$$

и, соответственно,

$$v_1 = r^{2\lambda} t^{\beta-\lambda+\alpha/2}\left(1 + c_1\frac{r^2}{4\sigma t} + c_2\frac{r^4}{(4\sigma t)^2} + \ldots\right),$$

$$v_2 = t^{\beta+\alpha/2}\left(1 + c_1'\frac{r^2}{4\sigma t} + c_2'\frac{r^4}{(4\sigma t)^2} + \ldots\right).$$

Так как $z = 0$ — единственная регулярная особая точка уравнения, то степенные ряды сходятся равномерно.

Если положить $\beta = 0$, разыскивая решения (V) *в форме*

$$r^\alpha w\left(\frac{r^2}{4\sigma t}\right),$$

то возможно интегрирование в определённых интегралах.

После введения корней ϱ_1 и ϱ_2 дифференциальное уравнение (VI) записывается следующим образом:

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz}(1 - \varrho_1 - \varrho_2 + z) + w\varrho_1\varrho_2 = 0. \qquad (\mathrm{VI}')$$

Легко устанавливается связь (VI$'$) с уравнением Гаусса для гипергеометрической функции.

Сделаем преобразование Эйлера

$$w = \int \mathrm{e}^{-s}\left(1 - \frac{s}{z}\right)^n y(s)\,ds,$$

где интеграл берётся по подходящему замкнутому контуру. Тогда для y имеет место дифференциальное уравнение, имеющее решение $y = s^{-1+\varrho_2}$ для $n = -\varrho_1$ и $y = s^{-1+\varrho_1}$ для $n = -\varrho_2$.

Итак,

$$w = \int \mathrm{e}^{-s}\left(1 - \frac{s}{z}\right)^{-\varrho_1} s^{-1+\varrho_2}\,ds$$

и

$$w = \int \mathrm{e}^{-s}\left(1 - \frac{s}{z}\right)^{-\varrho_2} s^{-1+\varrho_1}\,ds$$

суть интегралы уравнения (VI$'$). Проще всего интегралы вычисляются по пути, выходящем из $R(s) = +\infty$, обходящем точки $s = 0$ и $s = z$ и опять возвращающемся в $R(s) = +\infty$.

Так как

$$\int \mathrm{e}^{-s}(z - s)^{-\varrho_1} s^{-1+\varrho_2}\,ds$$

в окрестности точки $z = 0$ — аналитическая функция, то оба интеграла приводятся к виду

$$w_1 = C_1 \int \mathrm{e}^{-s}\left(1 - \frac{s}{z}\right)^{-\varrho_1} s^{-1+\varrho_2}\, ds,$$

$$w_2 = C_2 \int \mathrm{e}^{-s}\left(1 - \frac{s}{z}\right)^{-\varrho_2} s^{-1+\varrho_1}\, ds.$$

Можно показать, что функция

$$v = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} r^{\alpha}\left(C_1 w_1\left(\frac{r^2}{4\sigma t}\right) + C_2 w_2\left(\frac{r^2}{4\sigma t}\right)\right)$$

является общим решением уравнения (V), также представимым в замкнутой форме через определённые интегралы. К представлениям этих решений и их разложениям по функциям Бесселя, возможно, вернёмся в другом месте.

Третья часть

§ 14. Решения, близкие к радиальному течению

Прежде всего предпримем попытку найти стационарные решения, близкие к радиальным течениям. Для этого положим

$$\psi = f(\varphi) + \varrho(\varphi, r),$$

где ϱ — *малая* величина, квадратом которой будем пренебрегать.

Возьмём для f прежнее уравнение

$$f^{(IV)} + 4f'' + \frac{2}{\sigma} f' f'' = 0$$

и, полагая $f' = u$, проинтегрируем:

$$u'' + 4u + \frac{u^2}{\sigma} + C = 0.$$

Для ϱ получим

$$\frac{\partial \Delta\varrho}{\partial t} + \frac{u}{r}\frac{\partial \Delta\varrho}{\partial r} - \frac{2u'}{r^4}\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} - \frac{u''}{r^3}\frac{\partial\varrho}{\partial r} = \sigma\Delta\Delta\varrho,$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Так как в стационарном случае при умножении r и ϱ на постоянный множитель дифференциальное уравнение должно оставаться неизменным, его решения имеют вид

$$\varrho = r^{\lambda} w(\varphi).$$

Для w имеет место дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered} w^{(IV)} + w''\left(2\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \frac{2u}{\sigma} - \frac{\lambda u}{\sigma}\right) + \frac{2}{\sigma}u'w' + \\ + w\left(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + \frac{2\lambda^2 - \lambda^3}{\sigma}u + \frac{\lambda u''}{\sigma}\right) = 0. \end{gathered} \tag{VII}$$

Особый интерес представляют свободные течения, т. е. периодические по φ решения.

Из требования *однозначности давления* после весьма простого вычисления будем иметь

$$\lambda^2 \int\limits_0^{2\pi} w(u-(\lambda-2)\sigma)\,d\varphi = 0.$$

С другой стороны, из предыдущего дифференциального уравнения после интегрирования от 0 до 2π при условии периодичности имеем

$$\lambda^2(\lambda-2) \int\limits_0^{2\pi} w(u-(\lambda-2)\sigma)\,d\varphi = 0,$$

так что однозначность давления следует из периодичности всегда, кроме случая $\lambda = 2$.

Функция u в свободном течении сама является периодической функцией φ с периодом $2\pi/n$, где n — целое число. Однако вовсе не обязательно, что функция w имеет тот же период, что и u.

Так как

$$u'' = -C - 4u - \frac{u^2}{\sigma}$$

и

$$u'^2 = -2Cu - 4u^2 - \frac{2u^3}{3\sigma} + D = \frac{2}{3\sigma}(e_1-u)(u-e_2)(u-e_3),$$

то u можно выразить рационально, поэтому целесообразно в (VII) вместо φ ввести u в качестве *независимой переменной*. В силу того, что

$$w' = \frac{dw}{du}u', \quad w'' = \frac{d^2w}{du^2}u'^2 + \frac{dw}{du}u'',$$

$$w''' = \frac{d^3w}{du^3}u'^3 + 3\frac{d^2w}{du^2}u'u'' + \frac{dw}{du}u''',$$

$$w^{(IV)} = \frac{d^4w}{du^4}u'^4 + 6\frac{d^3w}{du^3}u'^2u'' + 3\frac{d^2w}{du^2}u''^2 +$$

$$+4\frac{d^2w}{du^2}u'u''' + \frac{dw}{du}u^{(IV)}$$

и

$$u^{(IV)} = \left(-4 - \frac{2u}{\sigma}\right)u'' - \frac{2u'^2}{\sigma}, \quad u'u''' = \left(-4 - \frac{2u}{\sigma}\right)u'^2,$$

все коэффициенты нового уравнения рациональным образом выражаются через u. Указывая степень коэффициентов, запишем

$$R_6\frac{d^4w}{du^4} + R_5\frac{d^3w}{du^3} + R_4\frac{d^2w}{du^2} + R_3\frac{dw}{du} + R_2w = 0, \qquad \text{(VII}'\text{)}$$

причём

$$R_6 = u'^4 = \frac{4}{9\sigma^2}(e_1-u)^2(u-e_2)^2(u-e_3)^2.$$

Из вида уравнения (VII) следует, что w обладает особенностями только в тех точках, в которых они имеются и у u (во всяком случае не на действительной части рассматриваемой переменной φ). Из (VII$'$) видно, что функция w как функция u имеет особенности в точках ветвления e_1, e_2, e_3.

Так как $R_5 = 6u'^2u''$ делится без остатка на $(e_1 - u)(u - e_2)(u - e_3)$, то точки e_1, e_2, e_3 являются регулярными особыми точками. Степень каждого коэффициента вместе с порядком производной понижается на единицу, поэтому точка $u = \infty$ также является регулярной особой. Иными словами, уравнение (VII$'$) принадлежит классу *уравнений Фукса*.

Известное вычисление даёт следующие четыре корня определяющего уравнения для точек e:

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = 1, \quad \varrho_3 = 1/2, \quad \varrho_4 = 3/2.$$

Несмотря на то, что здесь разности между двумя корнями могут быть равны целым числам, разложения в ряды в окрестностях особых точек логарифмов не содержат. Тогда из (VII) следует, что в тех точках φ, где $u = e$, функции u и u' регулярны по φ, как и функция w, в то время как $\ln(u - e)$ не обладает регулярным характером. Таким образом, *решения* (VII$'$) *в окрестности каждой особой точки имеют форму*

$$u = B_1(u - e) + \sqrt{u - e}\, B_2(u - e)$$

и других особенностей в конечной области не существует.

Для $u = \infty$ определяющее уравнение

$$(2\mu^2 + \mu - 3)(\mu^2 + 5\mu/2 + 3\lambda/2) = 0$$

имеет независимые от λ корни $\mu_1 = 1$ и $\mu = -3/2$ и корни, зависящие от λ:

$$\mu_{3;4} = -\frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{25 - 24\lambda}.$$

§ 15. Продолжение

Периодические с действительным периодом 2π решения существуют только при определённых значениях λ. По аналогии с методом Эрмита для дифференциального уравнения Ламе можно поступить следующим образом.

Пусть w_1, w_2, w_3, w_4 — фундаментальная система решений уравнения (VII). Тогда $w(\varphi+2\pi)$ однородно и линейно выражается через w:

$$w_\nu(\varphi + 2\pi) = \sum_{\mu=1}^{4} a_{\nu,\mu} w_\mu(\varphi), \quad \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Очевидно, имеются и периодические решения w второго рода, для которых

$$w(\varphi + 2\pi) = \alpha w(\varphi),$$

где α — корни уравнения четвёртого порядка

$$D(\alpha; \lambda) \equiv \det(a_{kl} - \alpha\delta_{kl}) = 0, \quad k, l = 1, 2, 3, 4.$$

Если периодическое решение существует, то $\alpha = 1$ должно быть корнем этого уравнения, в результате чего для λ получается уравнение

$$D(1, \lambda) = 0.$$

Следует положить

$$w = u + \mathrm{const}, \quad w = \sqrt{u - e}, \quad w = \sqrt{(e_\alpha - u)(u - e_\beta)}.$$

Простейшее вычисление даёт следующие *частные решения*:

1. Тривиальное решение $w = u$ при $\lambda = 0$.

2. $w = u$ при $\lambda = 2$, т. е.

$$\varrho = \alpha r^2 u, \quad \psi = f(\varphi) + \alpha r^2 f'(\varphi),$$

причём α должно быть мало. Поэтому в том же приближении $\psi = f(\varphi + \alpha r^2)$, так что линии тока стремятся к спиралям $\varphi = \varphi_0 - \alpha r^2$. Функция f' остаётся той же самой эллиптической функцией, обсуждавшейся ранее при радиальном течении. Впрочем, данное течение не может существовать свободно (реализуется особый случай $\lambda = 2$), и условия однозначности давления не могут быть выполнены при $w = u$.

3. $w = u + 3\sigma$ при $\lambda = 1$ и $C = 3\sigma$, откуда в случае $e_1 - e_2 < \sigma\sqrt{3}$ нет никакого противоречия.

4. $w = \sqrt{u - e_2}$ при $\lambda = -1$ и $e_2 = 0$. Это решение, так же как и $w = \sqrt{e_1 - u}$ при $\lambda = -1$ и $e_1 = 0$, имеет удвоенный период u.

5. $w = \sqrt{(e_1 - u)(u - e_3)}$ или $w = \sqrt{(u - e_2)(u - e_3)}$ при $\lambda = 1$ и $e_2 = 0$ или $e_1 = 0$. Это решение тоже имеет удвоенный период u.

Случай *больших* λ поддаётся приближённым вычислениям на основании (VII). В первом приближении имеем

$$w^{(IV)} + 2\lambda^2 w'' + \lambda^4 w = 0,$$

т. е. $w = \mathrm{e}^{\pm i\lambda\varphi}$ (ограничимся лишь периодическими решениями), так что период равен $2\pi/\lambda$. *При больших значениях λ — приближённо целое число.*

Наконец, ещё в одном случае можно провести элементарный анализ, а именно, когда u — постоянная величина и *основное течение везде равномерно распределено*. Этот случай имеет также значение и для общего представления (см. теоремы Коши и Больцмана[3]).

Для постоянного u из (VII) следует

$$w^{(IV)} + w''\left(2\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \frac{2-\lambda}{\sigma}u\right) + \\ + w\left(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda^2\frac{2-\lambda}{\sigma}u\right) = 0,$$

откуда с помощью замены $w = \mathrm{e}^{i\mu\varphi}$ получается характеристическое уравнение

$$\mu^4 - \mu^2\left(2\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \frac{2-\lambda}{\sigma}u\right) + \\ + \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda^2\frac{2-\lambda}{\sigma}u = 0.$$

Это уравнение имеет четыре корня

$$\mu = \pm\lambda, \quad \mu^2 = (\lambda - 2)^2 - \frac{2-\lambda}{\sigma}u.$$

[3] *Boltzmann*, Ges. Abh. Bd. 1. S. 43.

Потенциальные движения заметают всю область как положительных, так и отрицательных целых λ, а также λ, вычисляемых при целочисленных значениях μ:

$$\lambda = 2 + \frac{u}{4\sigma} \pm \sqrt{\left(\frac{u}{4\sigma}\right)^2 + \mu^2}.$$

Напомним, что всё это относится к случаю $u = \text{const}$.

§ 16.

Для всюду равномерного радиального течения возможно представить близкие нестационарные решения.

Дифференциальное уравнение теперь записывается следующим образом

$$\frac{\partial \Delta\varrho}{\partial t} + \frac{u}{r}\frac{\partial \Delta\varrho}{\partial r} = \sigma\Delta\Delta\varrho.$$

Интегрируя его с помощью подстановки

$$\Delta\varrho = \mathrm{e}^{\lambda t + in\varphi} w(r),$$

где n — целое, придём к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1 - u/\sigma}{r}\frac{dw}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda}{\sigma}\right) w = 0,$$

которое решается в функциях Бесселя или с помощью подстановки

$$\Delta\varrho = \mathrm{e}^{in\varphi} r^m w\left(\frac{r^2}{4\sigma t}\right) = \mathrm{e}^{in\varphi} r^m w(z),$$

причём для $w(z)$ имеет место уравнение

$$z^2 w'' + zw'\left(m + 1 - \frac{u}{2\sigma} + z\right) + w\left(\frac{m^2 - n^2}{4} - \frac{mn}{4\sigma}\right) = 0.$$

При $z = 0$ особая точка этого уравнения регулярна, а определяющее уравнение имеет действительные корни

$$\varrho_{1;2} = \frac{m}{2} - \frac{u}{4\sigma} \pm \frac{1}{2}\sqrt{n^2 + \frac{u^2}{4\sigma^2}}.$$

В обозначениях ϱ_1 и ϱ_2 дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$z^2 w'' + zw'(1 - \varrho_1 - \varrho_2 + z) + \varrho_1\varrho_2 w = 0.$$

Оно *совпадает с уравнением* (VI′), поэтому всё изложенное выше относится и к нему.