

О качественном различии решений двумерной и трехмерной конвекции

И. Б. Палымский

Профессор кафедры математики и информатики Современной Гуманитарной Академии,
Новосибирский Филиал, ул. Ватутина 71, Новосибирск, Россия, 630064
e-mail: palymsky@hnet.ru

Получено 16 января 2008 г.

В двумерной и трехмерной постановках рассмотрена задача о конвекции вязкой и несжимаемой жидкости между двумя горизонтальными, свободными от касательных напряжений изотермическими плоскостями при подогреве снизу. Получено, что в трехмерной турбулентной конвекции средний вихревой масштаб уменьшается с ростом надкритичности, в то время как в двумерной — растет, что делает двумерную конвекцию более крупномасштабной и гладкой. Рост среднего масштаба течения при увеличении надкритичности r в двумерной конвекции обусловлен формированием при $r > 4000$ красного (обратного) каскада переноса энергии, ответственного за перекачку кинетической энергии из масштаба генерации к крупным масштабам. Появление красного каскада обусловлено наличием второго, дополнительного закона сохранения для энтропии в двумерных течениях.

Ключевые слова: моделирование, гидродинамика, конвекция, энергия, каскад

I. B. Palymskiy

About qualitative difference of solutions of two-dimensional and three-dimensional convection

The problem of 2-D and 3-D convection of viscous and incompressible fluid between two horizontal stress-free isothermal planes at heating from below has been considering. It is received that in 3-D turbulent convection the mean vorticity scale decreases at growing supercriticality, but in 2-D convection the mean vorticity scale grows and it does the 2-D convection more large-scale and smooth. The growing of the mean vorticity scale at increasing supercriticality r in 2-D convection is conditioned by the red (inverse) energy cascade formed at $r > 4000$ and transferring the kinetic energy from generation scale to the large scales. The appearance of the red cascade is conditioned by additional conservation law for enstrophy in 2-D flows.

Keywords: simulation, hydrodynamics, convection, energy, cascade
Mathematical Subject Classifications: 76F35, 76F65, 76M20, 76M22

1. Введение

Классическая задача о конвекции Рэля–Бенара в различных постановках решалась в [1–9], причем некоторые авторы проводили расчеты в трехмерной [1–7] и двумерной [8, 9] постановках при высокой надкритичности $r = Ra/Ra_{cr}$, здесь Ra и Ra_{cr} — число Рэля и его критическое значение.

При численном моделировании различают две постановки задачи о конвекции в горизонтальном слое при подогреве снизу — со свободными (от касательных напряжений) и жесткими (с условием прилипания) горизонтальными границами; как правило, решение предполагается периодическим в горизонтальных направлениях или удовлетворяющим специальным граничным условиям [10]. Обе постановки задачи часто приводят к решениям, которые различаются лишь количественно, а не качественно [11]. Этим и относительной простотой решения задачи о конвекции со свободными граничными условиями и объясняется интерес к этой постановке.

Основные трудности при численном моделировании конвекции при высокой надкритичности связаны с наличием растущих линейных возмущений с огромными инкрементами; так, при $r = 3.4 \cdot 10^4$ и числе Прандтля $Pr = 10$ существуют возмущения, растущие в линейном приближении как $\exp(1367 \cdot t)$. Последнее обстоятельство накладывает серьезные ограничения на численные методы, затрудняя использование каких-либо итераций, верхней и нижней релаксации, последовательного решения уравнений системы. Между тем, число Рейнольдса является относительно медленно растущей функцией надкритичности в конвекции Рэля–Бенара и $Re \approx 375$ при $r = 3.4 \cdot 10^4$ ($Pr = 10$) [12].

В трехмерной турбулентности кинетическая энергия переносится из области генерации в мелкие масштабы, где она диссипируется. А в случае двумерной конвекции ожидается появление двух инерционных интервалов, по которым реализуются прямой каскад переноса энтропии (k^{-3} для энергетического спектра), обеспечивающий диссипацию и обратный (красный) каскад кинетической энергии со степенным законом $k^{-5/3}$, перекачивающий кинетическую энергию из масштаба генерации в область больших масштабов [13].

Обратный каскад энергии можно рассматривать как процесс самоорганизации турбулентности, в результате которого из поля мелкомасштабных пульсаций рождаются крупномасштабные когерентные структуры. Такой каскадный процесс наблюдается в двумерных, вращающихся течениях, в плазме и волнах на поверхности жидкости [14]. Очевидна важная роль красного каскада энергии для течений в океане и атмосфере. В самом деле, наряду с вихрями сравнительно небольшого масштаба (порядка 1 км) в океане существуют вихри огромного размера (до 10^3 км), движения которых квазидвумерны [15]. Существование таких огромных вихревых образований представляется малореальным без постоянной подпитки их энергией из более мелких масштабов.

Каскадные процессы в несжимаемой вязкой жидкости на основе двумерных уравнений Навье–Стокса исследовались в [16–23]. Во всех известных автору работах рассматривалась стационарная однородная двумерная турбулентность, расчеты проводились в квадратной области с периодическими граничными условиями и, как правило, с введением дополнительных членов, обеспечивающих стоки энергии на малых и больших масштабах. Чтобы получить стационарный в среднем процесс, в правую часть вводилась внешняя сила, осуществляющая подкачку энергии в виде белого шума.

Красный каскад в электропроводящей жидкости (водный раствор NaCl) исследовался экспериментально в [14, 22, 24]. При этом течение создавалось путем пропуска через жидкость электрического тока, а роль внешней силы играли расположенные под слоем жидкости постоянные магниты.

В работах [16–19, 21, 22] наблюдался в установившемся (в среднем) решении красный каскад со степенным законом $k^{-5/3}$. Однако в [19, 20, 23] красный каскад наблюдался только в начальной стадии расчета, а при выходе на установившийся режим — заменялся на k^{-3} . Подобную перестройку спектра автор [20] объясняет рождением самоподобных когерентных структур, появление которых и обуславливает спектр k^{-3} на больших масштабах.

Подобная перестройка энергетического спектра наблюдалась и в эксперименте [24] — вначале одновременно наблюдались спектр $k^{-5/3}$ красного каскада энергии и $k^{-3.5}$, искаженный степенной закон прямого каскада энтропии, а затем, после формирования крупномасштабной структуры течения (конденсации) — единый спектр $k^{-3.3}$. Формирование крупномасштабной структуры течения сопровождается своеобразной обратной буфуркацией — хаотический режим, с четко идентифицируемым красным каскадом, сменяется детерминистическим, регулярным после конденсации.

Эксперименты [14], проведенные в лотке размером $0.18 \cdot 0.18 \text{ м}^2$, также показали наличие четко идентифицируемого красного каскада энергии со степенным законом $k^{-5/3}$, а на приводимых в работе трасерных фотографиях видно формирование крупномасштабной вихревой структуры.

В работе [22] делается попытка совместного численного и экспериментального исследования, при этом в численном моделировании красный каскад виден более определенно.

В численных исследованиях каскад энтропии наблюдается менее устойчиво, чем красный [19]. Инерционный интервал переноса энтропии был получен в [17, 19], но рассчитанные в этих работах показатели степенного закона сильно отличаются от -3 и показывают более крутой наклон, а именно: от -5 до -3.5 в [17] и круче -5 — в [19]. Отмеченное расхождение объясняется наличием когерентных вихревых структур, очень устойчивых и имеющих примерно одинаковый размер [13].

Интересное численное исследование проведено также в трехмерной вращающейся турбулентности [25]. Установлено, что при достаточно сильном вращении начинается отток подкачиваемой с помощью внешней силы энергии к большим масштабам, и течение становится квазидвумерным. В зависимости от аспектного отношения (отношение высоты области к ее диаметру) наблюдался спектр $k^{-5/3}$ при малых и k^{-3} — при больших аспектных отношениях.

В работе [26] описаны результаты совместного численного и экспериментального исследования турбулентности в вертикально стекающей под действием силы тяжести мыльной пленке, где, несмотря на большой разброс в численном и экспериментальном спектрах, автор выделяет инерционные интервалы, соответствующие прямому и обратному каскадам энтропии и энергии.

Роль и проявление каскадных процессов в конвективной турбулентности пока не исследованы. Между тем, именно различие в каскадных процессах приводит, по-видимому, к качественному различию между двумерной и трехмерной конвективной турбулентностью при высокой надкритичности. В [10] описаны результаты расчетов спектров двумерной и трехмерной конвекции со свободными граничными условиями. В данной работе на основе подхода [10, 12, 27] выполнено двумерное и трехмерное моделирование конвекции со свободными границами и выясняется роль каскадных процессов и их влияние на средние характеристики течения.

Цель работы — исследование причин качественного различия между двумерной и трехмерной конвективной турбулентностью при высокой надкритичности, на основе исследования роли и степени влияния на средние характеристики каскадных процессов.

2. Постановка задачи

В приближении Буссинеска рассматриваются двумерные и трехмерные конвективные течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя горизонтальными плоскостями при подогреве снизу. В двумерной постановке течение рассчитывается при $G = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq z \leq 1\}$, где $l = \pi/\alpha$ — размер области по горизонтали, а α — минимальное волновое число. Трехмерная конвекция рассчитывается в квадратной в плане области $\{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq z \leq 1\}$. Во всех постановках горизонтальные границы предполагаются изотермическими. Записанная в отклонениях от равновесного решения, после обезразмеривания исходная система уравнений в двумерном приближении имеет вид [28]:

$$\omega_t + \frac{1}{Pr}(\varphi_z \omega_x - \varphi_x \omega_z) = \Delta \omega + Ra Q_x, \quad \Delta \varphi = -\omega, \quad (2.1)$$

$$Q_t + \frac{1}{Pr}(\varphi_z Q_x - \varphi_x Q_z) = \frac{1}{Pr} \Delta Q - \frac{1}{Pr} \varphi_x,$$

где φ — функция тока, ω — вихрь (z -ая компонента вектора завихренности), Q — отклонение температуры от равновесного линейного профиля (полная температура равна $\Theta = 1 - y + Q$), $\Delta f = f_{xx} + f_{zz}$ — оператор Лапласа, действующий на функцию f , $Ra = \frac{g\beta H^3 dQ}{\chi\nu}$ — число Рэлея, $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ — число Прандтля, g — ускорение силы тяжести, β, ν, χ — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности, H — толщина слоя и dQ — разность температур на горизонтальных границах, x, y и z — горизонтальные и вертикальная координаты. В дальнейшем для краткости будем называть Q и Θ температурой.

На боковых границах для искоемых функций ставятся «мягкие» граничные условия первого и второго рода, следующие из вида решения.

Искомые величины ω, φ и Q разыскиваются в виде

$$\begin{aligned} \omega(t, x, z) &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} \omega_{km}(t) \rho_k \cos(\alpha k x) \sin(\pi m z), \\ \varphi(t, x, z) &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} \frac{\omega_{km}(t)}{\alpha^2 k^2 + \pi^2 m^2} \rho_k \cos(\alpha k x) \sin(\pi m z), \\ Q(t, x, z) &= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} Q_{km}(t) \sin(\alpha k x) \sin(\pi m z), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\rho_k = 0.5$ при $k = 0$, N и $\rho_k = 1$ при $1 \leq k \leq N - 1$.

Итак, система (2.1) решается в области $G = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq z \leq 1\}$, $l = \pi/\alpha$, с граничными условиями на горизонтальных $\varphi = \omega = Q = 0$ и вертикальных $\varphi_x = \omega_x = Q = 0$ границах.

Трехмерная постановка задачи приведена в [10]. Решение трехмерной задачи также разыскивается в виде композиции собственных функций линейной задачи устойчивости конвекции Рэлея–Бенара [29], такой, чтобы при отсутствии зависимости от y трехмерное решение переходило в двумерное (2.2), при этом граничные условия на боковых границах, как и в двумерной постановке, следуют из вида решения.

Пусть $r = Ra/Ra_{cr}$, где $Ra_{cr} = 657.5$ — критическое значение числа Рэлея, а число Прандтля Pr далее равно 10.

3. Численный метод и его тестирование

Приведем краткое описание спектрально-разностного численного метода, используемого для расчета двумерной конвекции. Подробное описание и результаты его тестирования приведены в [12, 27, 30]. Этим методом были рассчитаны двумерная конвекция при высокой надкритичности [28], энергетические спектры скорости и температуры [10] и конвекция химически равновесного реагирующего газа [31].

Трехмерная версия используемого метода, основанная на расщеплении по физическим процессам, кратко описана в [10]. А ниже кратко опишем метод расчета двумерных конвективных течений со свободными граничными условиями.

Следуя общей идеологии метода расщепления, переход от слоя n к слою $n + 1$ по времени производится в два этапа. На первом этапе расщепления мы устанавливаем соответствие в линейном приближении спектральных характеристик численного метода и дифференциальной задачи, а на втором учитываем нелинейные процессы.

На первом этапе расщепления учитываем линейное развитие возмущений, без учета взаимодействия гармоник.

Этап 1.

$$\begin{aligned} \omega_t &= \frac{1}{2} \Delta \omega + RaQ_x, \\ \Delta \varphi &= -\omega, \\ Q_t &= \frac{1}{2 \cdot Pr} \Delta Q - \frac{1}{Pr} \varphi_x. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Для эффективного решения уравнений нелинейного конвективного переноса для завихренности ω и температуры Q половина вязких членов учтена на втором этапе расчета. После подстановки решения (2.2) в систему (3.3), вместо (3.3) получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для двух неизвестных амплитуд ω_{km} и Q_{km} . Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решается аналитически, без применения каких-либо аппроксимаций по времени по формулам, выведенным программой аналитических вычислений Maple V Release 4 [27, 30].

На втором этапе учитывается нелинейный конвективный перенос, т. е. учитывается взаимодействие гармоник. Здесь применена конечно-разностная схема переменных направлений (схема продольно-поперечной прогонки), ранее успешно использованная для расчета турбулентных конвективных течений в прямоугольной области при подогреве сбоку [32].

Этап 2.

$$\begin{aligned} \omega_t + \frac{1}{Pr}(\varphi_y \omega_x - \varphi_x \omega_y) &= \frac{1}{2} \Delta \omega, \\ Q_t + \frac{1}{Pr}(\varphi_y Q_x - \varphi_x Q_y) &= \frac{1}{2 \cdot Pr} \Delta Q. \end{aligned}$$

Каждое из уравнений выписанной системы для ω и Q решается в два дробных шага, на каждом дробном шаге применяется схема А. А. Самарского для аппроксимации одномерных операторов на верхнем слое по времени и аппроксимации центральными разностями на нижнем.

Коэффициенты φ_x и φ_y вычисляются по значениям φ после первого этапа расщепления.



Пересчет искомых полей из спектрального пространства (этап 1) в физическое (этап 2) и обратно производится по стандартным программам быстрого преобразования Фурье по косинусам и синусам.

При моделировании двумерной конвекции вычислялись средние величины: число Нуссельта

$$Nu = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\pi/\alpha} (Q_z(t, x, 0) + Q_z(t, x, 1)) dx - 1,$$

$$Nu^n = 2 \sum_{k=\text{odd}} \sum_{m=\text{even}} Q_{km}^n \cdot \frac{m}{k} - 1,$$

кинетическая энергия и энтрофия

$$E_k = \frac{\pi}{8} \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} \rho_k \varphi_{km} \omega_{km}, E_n = \frac{\pi}{8} \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} \rho_k \omega_{km}^2,$$

среднее волновое число в горизонтальном направлении

$$K_{me} = \alpha \cdot \frac{\sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} k \rho_k \varphi_{km} \omega_{km}}{\sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} \rho_k \varphi_{km} \omega_{km}},$$

а также среднеквадратичные значения температуры Q_{me} и функции тока F_{me} .

В трехмерных расчетах энтрофия E_n и F_{me} не вычислялись, а остальные средние величины рассчитывались по аналогичным формулам.

Таблица 1 показывает сходимость осредненных по времени средних величин при $r = 6 \cdot 10^3$ и увеличении разрешимости. При этом для K_{me} , в отличие от Nu, E_k, E_n, Q_{me} и F_{me} , сходимость не монотонная. Энтрофия сходится медленнее других величин.

Таблица 1

Разрешимость	$Nu/10$	$E_k/10^6$	$E_n/10^7$	K_{me}	$Q_{me} \cdot 10$	$F_{me}/10^2$
129 · 33	1.580	2.271	7.430	1.309	2.459	2.790
257 · 65	1.648	2.481	8.073	1.223	2.467	2.987
513 · 129	1.660	2.635	8.731	1.224	2.487	3.085
1025 · 257	1.687	2.684	9.125	1.252	2.506	3.099
2049 · 513	1.710	2.714	9.320	1.266	2.525	3.127

Сходимость профилей средней температуры, температурных пульсаций, горизонтальных и вертикальной компонент скорости при $r = 6 \cdot 10^3$ показана в [12]. В методических расчетах настоящей работы наблюдалось также практическое совпадение одномерных энергетических спектров температуры и скорости, вычисленных с различной разрешимостью.

Методические расчеты, проведенные в [12] при $\alpha = 1$ показали, что пространственная разрешимость достаточна, если использовать [129 · 33] гармоник при $r < 6 \cdot 10^3$ и [257 · 65] — при $r < 3.4 \cdot 10^4$.

При уменьшении α количество используемых в горизонтальном направлении гармоник увеличивается, и при $\alpha = 0.125$ в расчетах настоящей работы использовалось до [2049 · 65] гармоник.

Для контроля точности проверялось выполнение интегральных соотношений, например, полученное умножением третьего уравнения системы (2.1) для температуры на Q и интегрированием по области

$$Gt = \{0 \leq x \leq \pi/\alpha, 0 \leq z \leq 1, t^n \leq t \leq t^{n+1}\}$$

с учетом граничных условий

$$\frac{\frac{1}{2} \int_G (Q^n)^2 + \frac{1}{Pr} \int_{G_t} Q_x \varphi}{\frac{1}{2} \int_G (Q^{n+1})^2 + \frac{1}{Pr} \int_{G_t} (Q_x^2 + Q_y^2)} = 1.$$

Аналогично, умножением первого уравнения системы (2.1) для ω на φ и ω получаем интегральные соотношения для энергии и энтропии, соответственно.

Таблица 2 показывает хорошую точность выполнения осредненных по времени интегральных соотношений при $r = 6 \cdot 10^3$, видна сходимость к 1 при увеличении разрешимости. При этом лучше всего выполняется интегральное соотношение для температуры и хуже всего — для энтропии.

Таблица 2

Разрешимость	Энергия	Энтропия	Температура
129 · 33	0.9946	0.9931	0.9971
257 · 65	0.9976	0.9967	0.9984
513 · 129	0.9986	0.9977	0.9990
1025 · 257	0.9989	0.9982	1.0002

Число Рейнольдса $Re = \frac{1}{Pr} \sqrt{\frac{2\alpha Ek}{\pi}}$ при $r = 6 \cdot 10^3$ было равно 131.

При проведении трехмерных расчетов энтропия не вычислялась и контролировались соотношения интегрального баланса для кинетической энергии и температуры. Трехмерные расчеты проводились с числом гармоник [65 · 65 · 65], при увеличении пространственной разрешимости от [33 · 33 · 33] до [129 · 129 · 129] наблюдалась сходимость средних величин и профилей средней температуры, пульсаций температуры, вертикальной и горизонтальных компонент скорости [10].

4. Сравнение средних характеристик двумерной и трехмерной конвекции

На рис. 1–3 приведены профиль средней температуры, профиль температурных пульсаций и временной энергетический спектр (квадрат модуля Фурье гармоник) при $r = 950$ для двумерного и трехмерного решений со свободными горизонтальными границами. На рис. 1 приведен также асимптотический экспериментальный профиль температуры [33], а на рис. 2 — результат численного расчета двумерной конвекции с условиям прилипания на горизонтальных границах [12]. На рис. 3 частота измеряется в единицах ν/H^2 , а вертикальный сдвиг спектра трехмерного решения — искусственный.

Профили средней температуры на рис. 1 в двумерных и трехмерных расчетах близки, но результат двумерного расчета кажется более близким к экспериментальному, так как



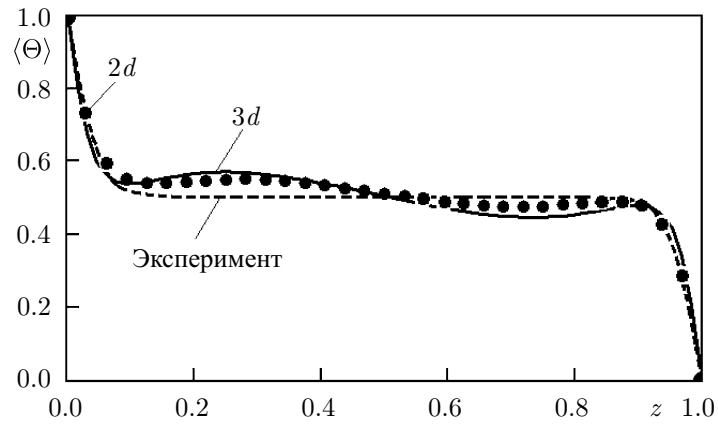


Рис. 1. Профиль средней температуры.

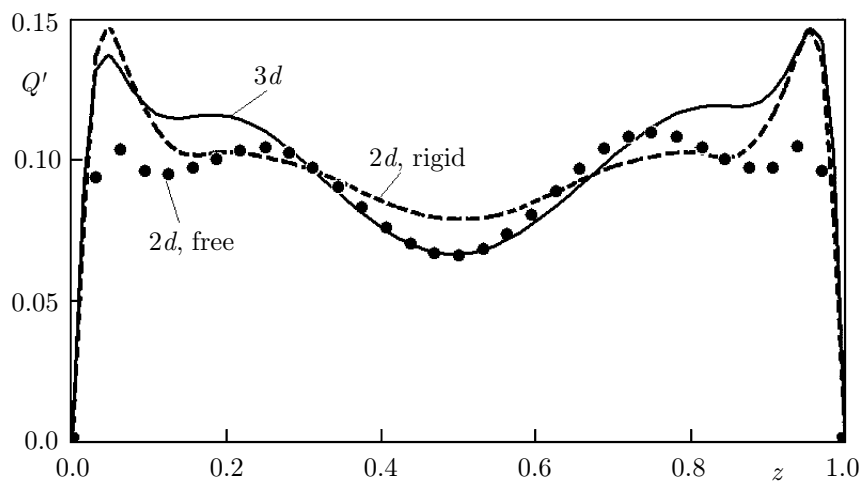


Рис. 2. Профиль температурных пульсаций.

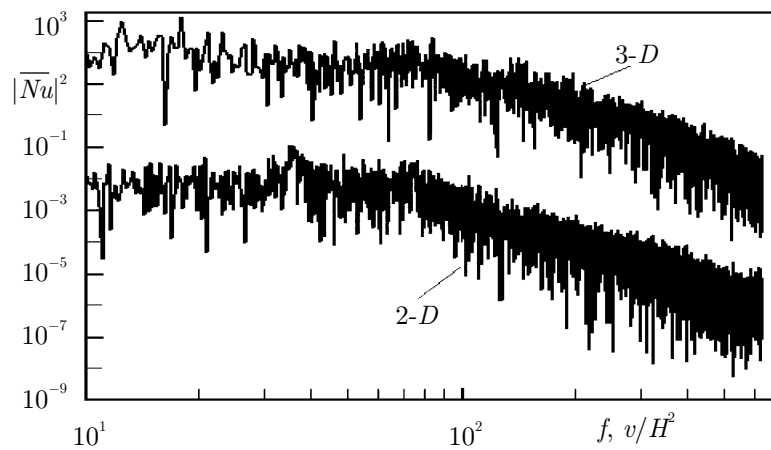


Рис. 3. Временной спектр зависимости числа Нуссельта от времени.

соответствующий профиль более сглажен и участки обратного градиента менее выражены. Профили температурных пульсаций на рис. 2, полученные в двумерном и трехмерном расчетах со свободными граничными условиями, практически совпадают в центральной части, но отличаются величинами локальных максимумов вблизи горизонтальных границ, а результаты расчета двумерной конвекции с условием прилипания на горизонтальных границах, как и результаты трехмерного моделирования, показывают ясно выраженные локальные максимумы вблизи горизонтальных границ. Их формирование обусловлено наличием у профиля средней температуры участков с обратным градиентом, благодаря чему у нижней границы скапливается холодная, а у верхней — горячая жидкость и прорывающиеся от горизонтальных границ плюмы создают повышенный уровень пульсаций [12]. В двумерных расчетах настоящей работы (со свободными граничными условиями) ясно выраженные участки обратного градиента в профиле средней температуры наблюдались при $r \leq 305$. Оба спектра на рис. 3 — сложные, представляются непрерывными и качественно близкими, но в области частот $f > 10^2$ спектр двумерного решения кажется более плоским.

На рис. 4, 5 изображены пульсации вертикальной скорости и температуры при $z = 0.5$ как функции надкритичности. Видно, что данные трехмерных расчетов подчиняются определенным степенным законам, в то время как данные двумерных расчетов имеют существенный разброс. Из рис. 4 видно, что при $280 \leq r \leq 700$ пульсации вертикальной скорости в двумерных и трехмерных расчетах примерно равны по величине. Рис. 5 показывает тенденцию уменьшения величины температурных пульсаций с ростом надкритичности, а при рассмотрении подобного графика в расширенном диапазоне надкритичности (до $r = 3.4 \cdot 10^4$) при $r \geq 10^3$ видна тенденция увеличения. Последнее физически связано с увеличением среднего вихревого масштаба и укрупнением структуры течения. Предположительно, разброс данных двумерных расчетов связан с попыткой моделирования в двумерных рамках физически трехмерного конвективного течения.

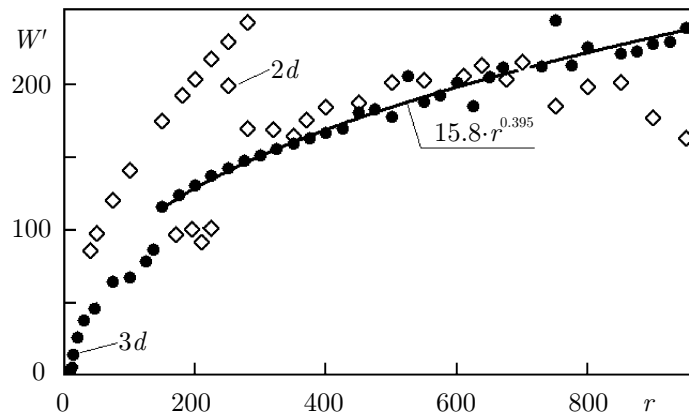


Рис. 4. Пульсации вертикальной скорости как функция надкритичности.

5. Средний вихревой масштаб

На рис. 6 изображено среднее волновое число K_{me} в горизонтальном направлении, вычисленное по кинетической энергии для двумерных и трехмерных решений. Физически волновое число K_{me} характеризует средний горизонтальный масштаб $l_{me} = \pi/K_{me}$ вихрей, содержащих основную часть кинетической энергии. Для краткости в дальнейшем величи-

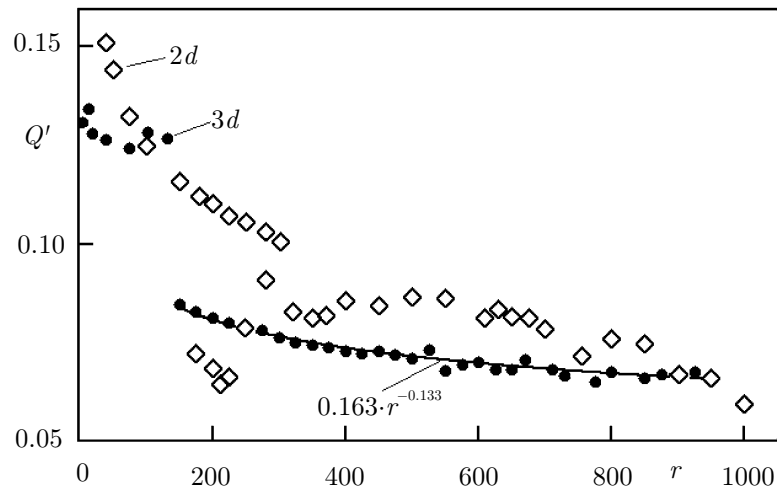
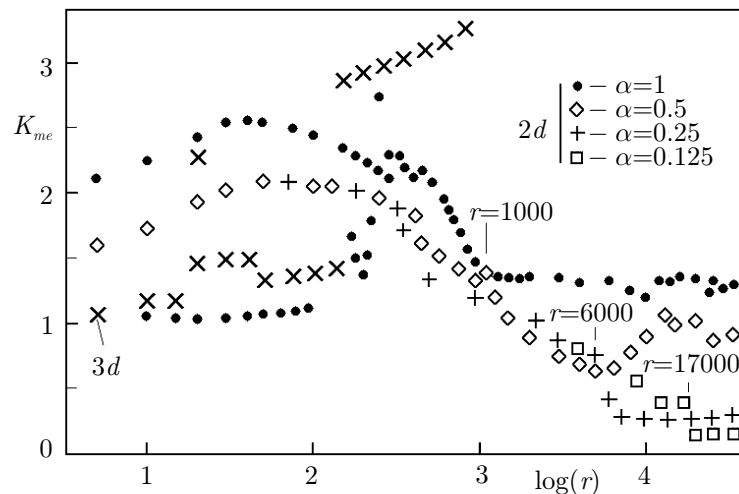


Рис. 5. Пульсации температуры как функция надкритичности.

ну l_{me} называем вихревым масштабом.

Рис. 6. Среднее волновое число K_{me} как функция надкритичности.

Из рис. 6 видно, что в трехмерных расчетах K_{me} растет с ростом надкритичности. А более детальный анализ показывает, что при $r \leq 150$ волновое число следует степенному закону

$$K_{me} = 1.86 \cdot r^{0.084},$$

или, что эквивалентно,

$$l_{me} = 1.69 \cdot r^{-0.084}, \quad l_{me} \approx 1.7 \cdot r^{-1/12}$$

и, более того, при $r \leq 500$ с точностью до нескольких процентов K_{me} равно примерно половине волнового числа, наиболее быстрорастущего по линейной теории.

А в двумерной конвекции, при достаточно большой надкритичности, ясно видна тенденция к уменьшению K_{me} до величины порядка минимального значения α с ростом надкритичности.

Рис. 6 показывает постепенное включение больших масштабов (перестройки течения) в двумерных расчетах при увеличении надкритичности, а именно: длины области $l = \pi$ ($\alpha = 1$) недостаточно при $r \geq 10^3$, $l = 2\pi$ ($\alpha = 0.5$) — при $r \geq 6 \cdot 10^3$ и $l = 4\pi$ ($\alpha = 0.25$) — при $r \geq 1.7 \cdot 10^4$.

Отсюда следует, что для правильного отражения постепенного включения больших масштабов в двумерной конвекции при увеличении надкритичности размер области по горизонтали l должен увеличиваться примерно по линейному закону:

$$l = 2.7 \cdot (1 + 2.2 \cdot 10^{-4} \cdot r), \quad l = \pi/\alpha.$$

Таким образом, при достаточно большой надкритичности вихревой масштаб в трехмерной конвекции уменьшается с ростом надкритичности, и течение становится все более мелкомасштабным. А в двумерной конвекции наблюдается обратная тенденция: рост вихревого масштаба до величины порядка размера области $l = \pi/\alpha$ при большой надкритичности.

Теперь рассмотрим начальный этап развития двумерной конвекции при $r = 3 \cdot 10^4$ и $\alpha = 0.25$, в этом расчете учитывалось [2049 · 65] гармоник. На рис. 7 изображен график K_{me} как функции времени.

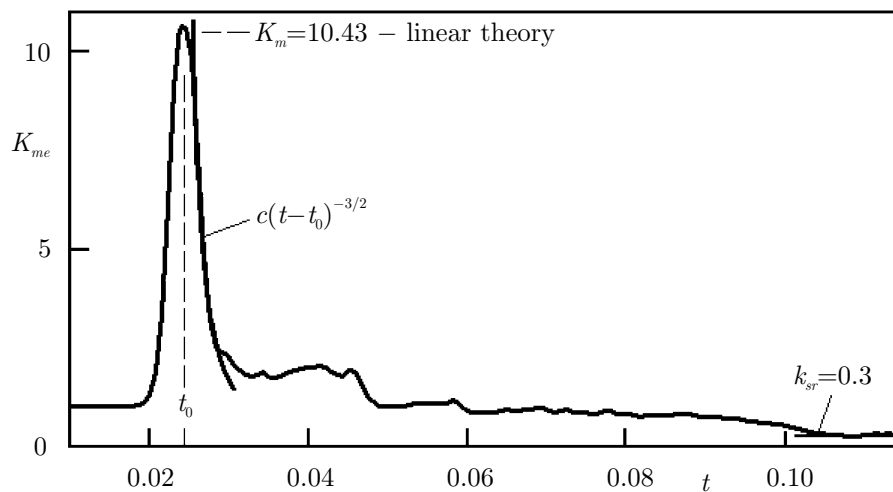


Рис. 7. Среднее волновое число как функция времени.

Из начальных данных (см. рис. 8) при $t_0 = 0.0235$ формируется решение, среднее волновое число которого близко к волновому числу наиболее быстрорастущего по линейной теории возмущения $K_m = 10.43$. Затем волновое число уменьшается, причем спадание волнового числа соответствует предсказанному по размерности закону [13] (на рис. 7 $c = 8.6 \cdot 10^{-4}$). При $t \sim 0.1$ волновое число $K_{me} \approx 0.3$, что близко к его среднему (0.283) и минимальному (0.25) значениям. Другими словами, вихревой масштаб при $t \geq 0.1$ принимает значение порядка размера области по горизонтали.

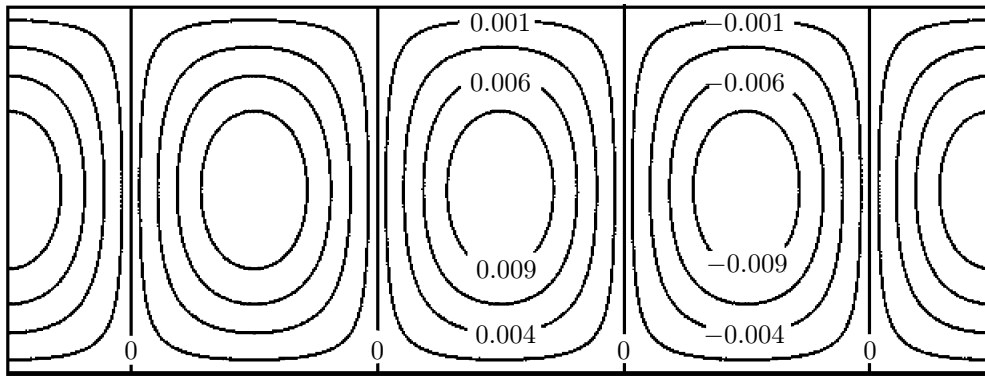
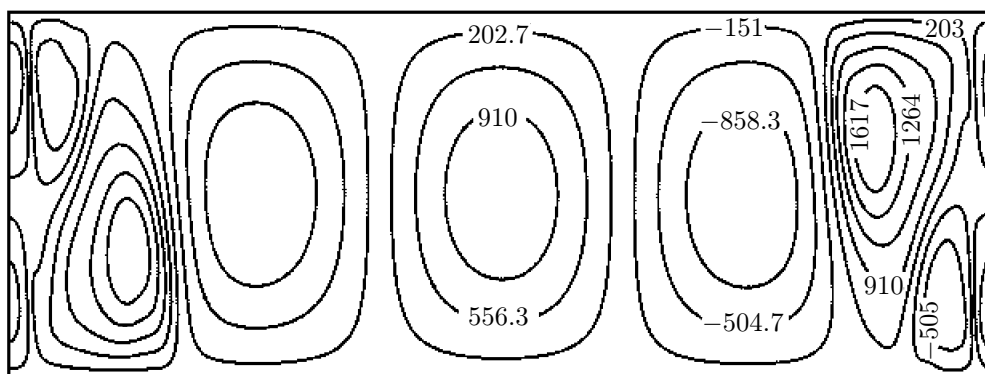
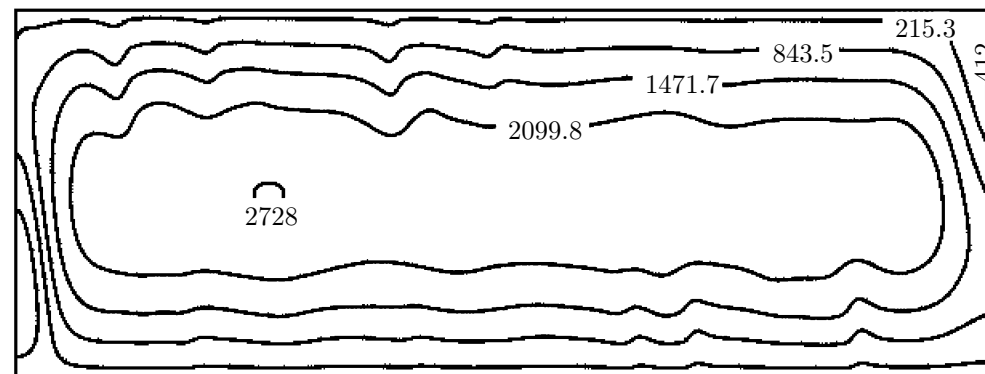
Для иллюстрации процесса укрупнения вихревых структур рассмотрим изолинии функции тока в три последовательные момента времени.

На рис. 8 представлена функция тока на начальном этапе развития течения, $K_{me} \approx 1$.

Рис. 9 показывает начальный этап объединения вихрей и формирования крупномасштабной структуры, $K_{me} \approx 2.36$.

А рис. 10 изображает уже сформированную крупномасштабную структуру, ясно видный вихрь имеет горизонтальный размер порядка размера области $l = 4\pi$, $K_{me} \approx 0.235$.



Рис. 8. Изолинии функции тока при $t = 7.65 \cdot 10^{-4}$.Рис. 9. Изолинии функции тока при $t = 2.90 \cdot 10^{-2}$.Рис. 10. Изолинии функции тока при $t = 2.29 \cdot 10^{-1}$.

Таким образом, в трехмерной и двумерной конвекции качественно различается поведение вихревого масштаба $l_{me} = \pi/K_{me}$ при достаточно большой надкритичности.

В трехмерном решении вихревой масштаб уменьшается с ростом надкритичности примерно по степенному закону корня двенадцатой степени и течение становится более мелкомасштабным. И, наоборот, в двумерном решении вихревой масштаб имеет тенденцию к росту и при достаточно большой надкритичности принимает значения порядка размера

области. Отсюда следует, что двумерные решения более крупномасштабные и обладают большей гладкостью.

6. Спектры скорости и температуры

В этом разделе везде $\alpha = 0.25$. Отмеченное укрупнение вихревого масштаба связано, очевидно, с потоком кинетической энергии из масштаба генерации к большим масштабам.

Теоретические рассуждения показывают, что в двумерной турбулентности должны существовать два инерционных интервала со степенными законами $k^{-5/3}$ и k^{-3} , по которым реализуются каскадные процессы переноса энергии и энтропии. Причем направления потоков, переносящих соответствующие квадратичные величины из масштаба генерации, различны: обратный (красный) каскад энергии обеспечивает перекачку энергии к большим масштабам, а прямой каскад энтропии обуславливает диссипацию [13].

Методика вычисления осредненных по времени пространственных одномерных спектров описана в [10]. Небольшие участки спектра, отвечающие высоким волновым числам на рис. 11–16 не показаны из-за их неинформативности ввиду искажения численными эффектами [34].

На рис. 11 изображен одномерный (x — направление) пространственный спектр скорости при $r = 6 \cdot 10^3$. Ясно видны инерционные интервалы со степенными законами $k^{-5/3}$ и k^{-3} , соответствующие обратному каскаду энергии и прямому каскаду энтропии. На рис. 11–13 k_g соответствует волновому числу наиболее быстрорастущего по линейной теории возмущения.

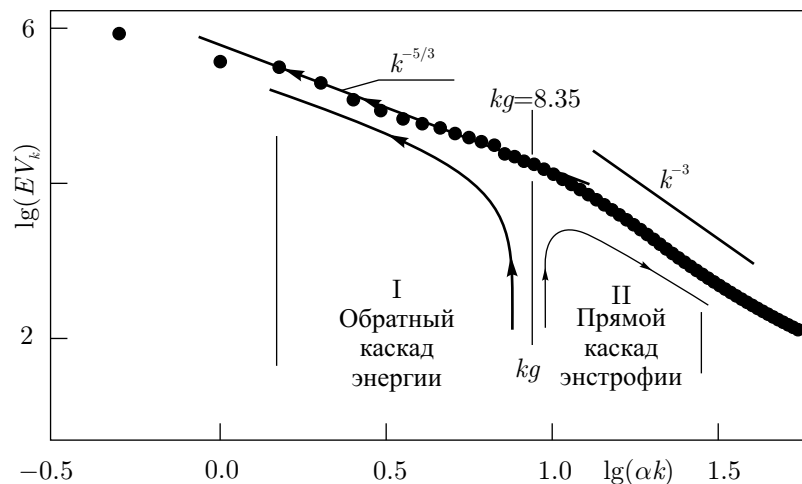
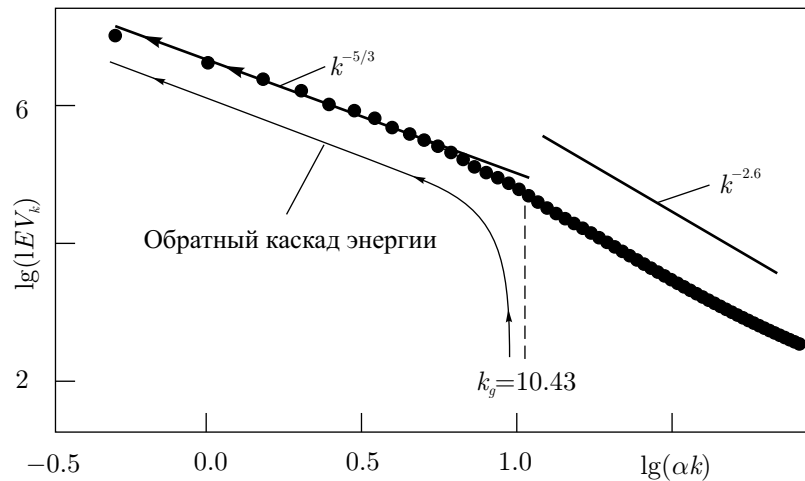
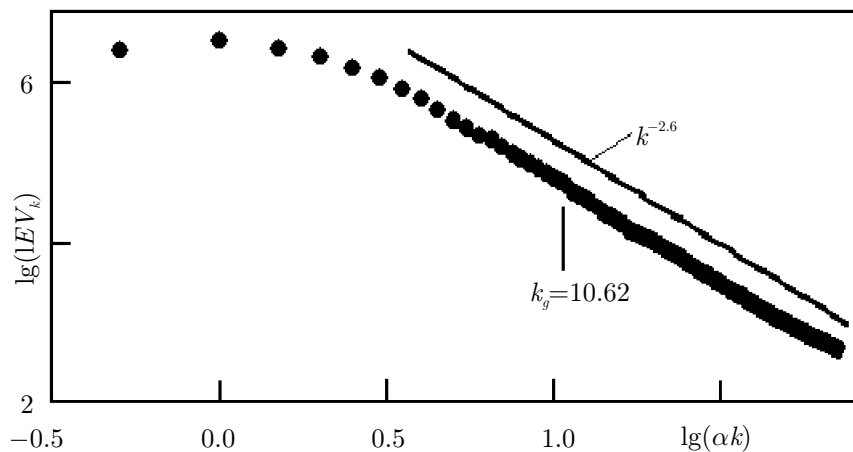


Рис. 11. Спектр скорости при $r = 6 \cdot 10^3$.

На рис. 12 одномерный спектр скорости изображен при $r = 3 \cdot 10^4$. Ясно виден обратный каскад энергии со степенным законом $k^{-5/3}$. Но в области более высоких волновых чисел степенной закон энтропийного каскада k^{-3} трансформировался в более пологий $k^{-2.6}$.

На рис. 13 приведен характерный вид спектра скорости при высокой надкритичности с типичным наполнением длинноволновой его части и со спаданием по закону $k^{-2.6}$.

Теперь рассмотрим перестройку температурного спектра при увеличении надкритичности.

Рис. 12. Спектр скорости при $r = 3 \cdot 10^4$.Рис. 13. Спектр скорости при $r = 3.4 \cdot 10^4$.

При $750 \leq r \leq 2000$ в длинноволновой части температурного спектра виден участок со степенным законом Болджиано–Обухова (БО) $k^{-1.4}$, что иллюстрирует спектр температуры на рис. 14.

Но при $r = 2 \cdot 10^3$ происходит перестройка температурного спектра, и при $2 \cdot 10^3 < r \leq 6 \cdot 10^3$ в длинноволновой части спектра появляется участок со степенным законом Бэтчелора k^{-1} (рис. 15).

При дальнейшем увеличении надкритичности показатель степенного закона на длинноволновом участке температурного спектра совершает колебания в интервале $[0.7, 1]$, с наибольшей вероятностью принимая значение 0.8.

Рис. 16 показывает, что при увеличении надкритичности показатель степенного закона длинноволнового спектра температуры определяется с большей точностью.

Подобная перестройка температурного спектра наблюдалась в физически близкой задаче о конвекции в вертикальной мыльной пленке при подогреве снизу [35], а именно: при разности температур $dQ < 48$ К длинноволновый спектр температуры соответствовал закону БО $k^{-1.4}$, а при $dQ > 48$ К — закону Бэтчелора k^{-1} . Авторы [35] связывают перестройку температурного спектра с формированием крупномасштабной структуры течения.

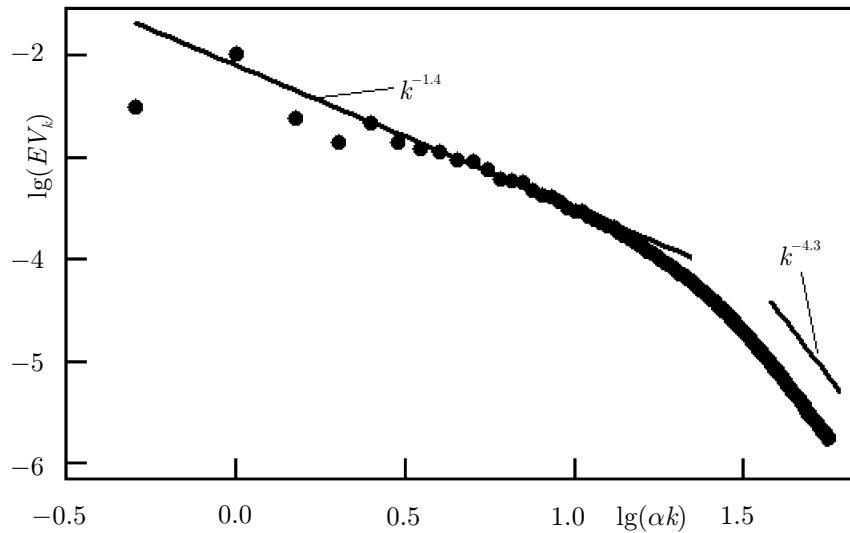


Рис. 14. Спектр температуры при $r = 1.25 \cdot 10^3$.

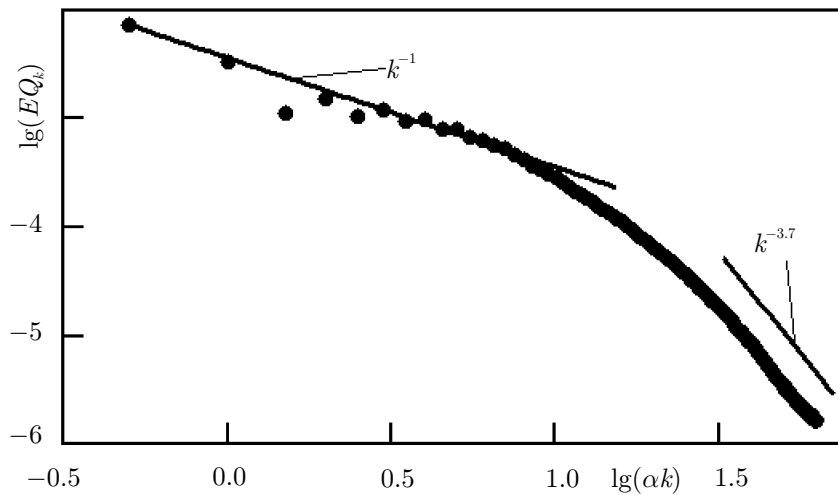


Рис. 15. Спектр температуры при $r = 3 \cdot 10^3$.

Показатель степенного закона коротковолнового спектра температуры в настоящей работе принимает значения из интервала $[-5.2, -3]$, а в [35] этот интервал несколько меньше — $[-4.2, -3]$.

На рис. 17 приведена диаграмма полученных в расчетах спектров — показателей степенных законов (умноженных на -1) длинноволновых спектров скорости и температуры и коротковолнового спектра скорости, представленных как функция надкритичности.

Из рис. 17 видно, что в диапазоне значений надкритичности $4 \cdot 10^3 \leq r \leq 10^4$ реализуются одновременно обратный каскад энергии и прямой каскад энтропии. В инерционном интервале прямого каскада энтропии спектр скорости следует степенному закону $k^{-\beta}$, $2.9 \leq \beta \leq 3.1$, близкому к k^{-3} . При $r \geq 10^4$ видна тенденция к установлению единого во всем спектре степенного закона, близкого к $k^{-2.6}$, и обратный каскад энергии ясно идентифицируется лишь эпизодически (например, при $r = 3 \cdot 10^4$ на рис. 12). При большой надкритичности спектр скорости приобретает характерный вид, приведенный на рис. 13.

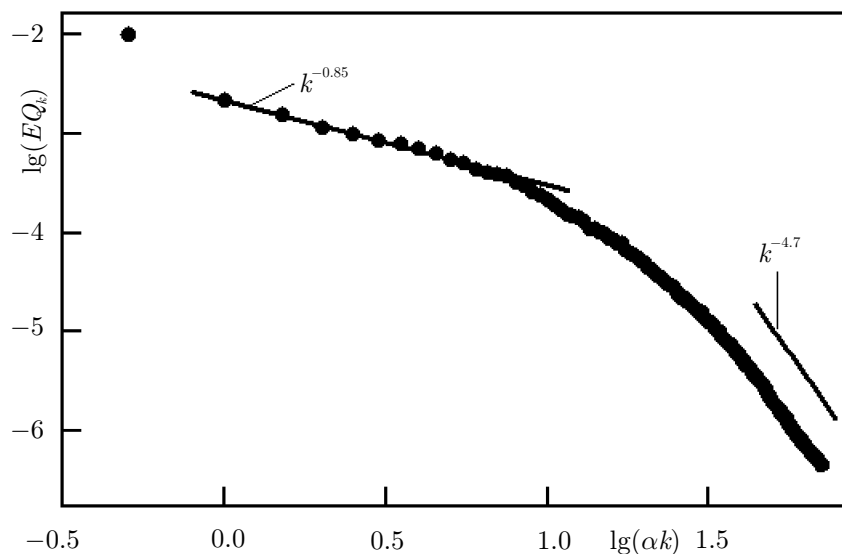
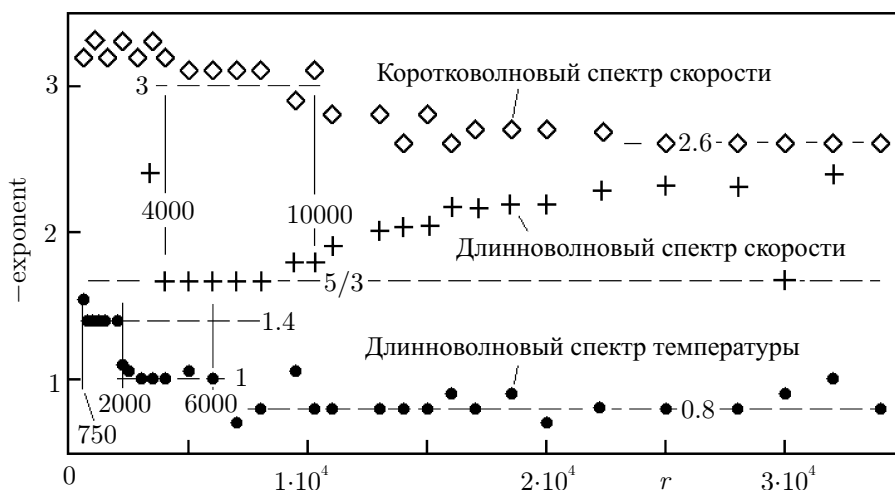
Рис. 16. Спектр температуры при $r = 1.3 \cdot 10^4$.

Рис. 17. Показатели степенных законов для скорости и температуры как функции надкритичности.

Отмеченная перестройка спектра скорости при $r \approx 10^4$ подобна полученной в численных исследованиях [19,20,23] и эксперименте [24] и обусловлена формированием крупномасштабной вихревой структуры течения. И более того так как при $r > 10^4$ крупномасштабная структура поля скорости уже сформирована, то ввиду пренебрежимо малой диссипации на больших масштабах энергетическая роль обратного каскада, сведясь лишь к поддержанию крупномасштабного поля скорости, падает. С другой стороны, с ростом надкритичности диссипация растет как $r^{1.3}$ [10] и это приводит к усилению энстрофийного каскада, через который она реализуется. Таким образом, ослабление обратного каскада энергии и усиление прямого каскада энстрофии приводят к расширению области действия последнего и обуславливают тенденцию установления единого степенного закона. Отклонение его показателя степени на 13% от показателя степени энстрофийного каскада (-2.6 вместо -3),

предположительно, связано с взаимодействием одновременно существующих потоков энергии и энтропии, в результате чего степенной закон энтропийного каскада заменяется более пологим, но простирающимся в область волновых чисел, меньших частоты генерации.

Перестройка температурного спектра при $r \approx 2 \cdot 10^3$ также физически обусловлена формированием красного каскада энергии. При недостаточно большой надкритичности красный каскад еще не сформирован, и на больших масштабах существенна роль плавучести, что и обуславливает спектр БО $k^{-1.4}$. Но с повышением надкритичности энергетическое значение красного каскада усиливается. Благодаря его действию происходит перекачка энергии пульсаций скорости в большие масштабы, поле скорости становится крупномасштабным при относительно низком уровне пульсаций, и возникает так называемый вязкоконвективный интервал, где пульсации температуры управляются крупномасштабным полем скорости, что и обуславливает появление спектра Бэтчелора k^{-1} [13].

7. Влияние каскадных процессов на средние характеристики

Очевидно, что формирование крупномасштабной структуры поля скорости и связанное с ним постепенное включение больших масштабов должно отражаться в зависимостях средних величин от надкритичности при различных α .

На рис. 18 приведены в двойных логарифмических координатах пульсации вертикальной скорости (при $z = 0$) как функции надкритичности при различной длине области по горизонтали $l = \pi/\alpha$. Как и на рис. 6, видно постепенное включение больших масштабов при $r = 10^3$ (длины области $l = \pi/1 = \pi$ недостаточно) и $r = 6 \cdot 10^3$ ($l = \pi/0.5 = 2\pi$ — недостаточно). Относительно более слабая перестройка при $r = 1.7 \cdot 10^4$ на рис. 18 не видна.

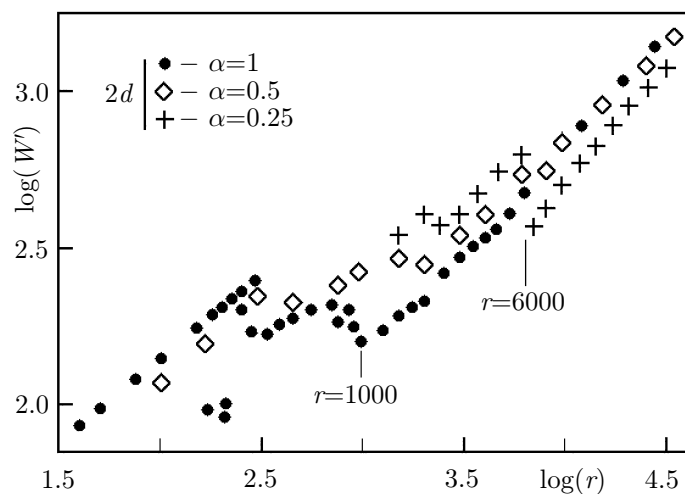


Рис. 18. Пульсации вертикальной скорости как функция надкритичности при различных α .

На рис. 19 представлена кинетическая энергия на единицу длины области E_k/l , $l = \pi/\alpha$ как функция надкритичности при различных α . Четко видны перестройки течения при $r = 6 \cdot 10^3$ и $r = 1.7 \cdot 10^4$.

В то же время рис. 20 показывает, что на интегральной характеристике теплообмена — числе Нуссельта — отмеченные перестройки отражаются более мягко, опосредованно. Отмеченные выше перестройки течения наблюдаются здесь при более высоких значениях

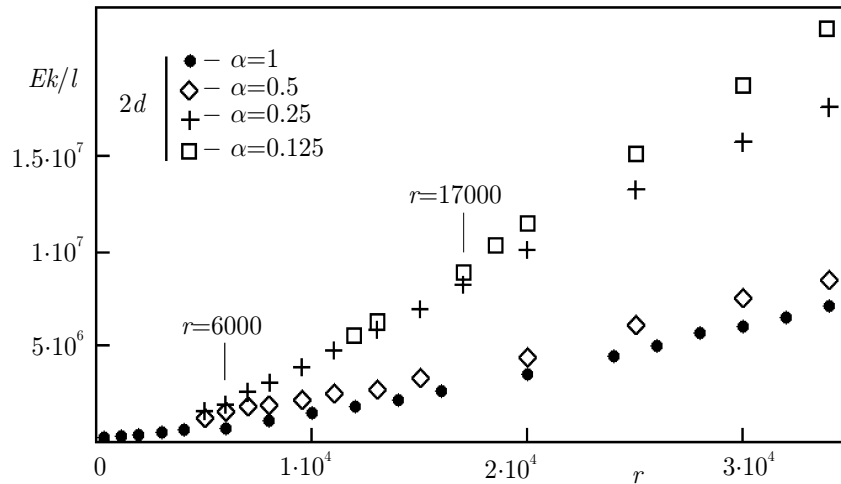


Рис. 19. Кинетическая энергия как функция надкритичности при различных α .

надкритичности, а именно: длины области $l = \pi$ недостаточно при $r = 10^4$ и $l = 2\pi$ — при $r = 2 \cdot 10^4$.

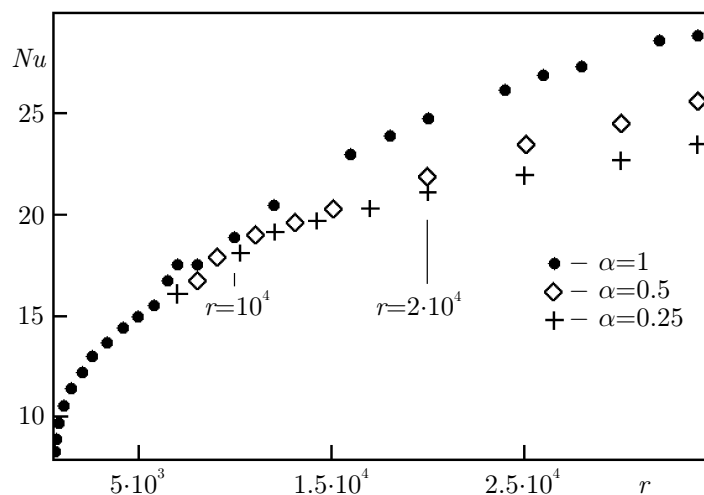


Рис. 20. Число Нуссельта в зависимости от надкритичности при различных α .

8. Заключение

В двумерной и трехмерной постановках рассмотрена задача о конвекции вязкой и несжимаемой жидкости между двумя горизонтальными, свободными от касательных напряжений и изотермическими плоскостями при подогреве снизу.

Получено, что в трехмерной турбулентной конвекции вихревой масштаб уменьшается с ростом надкритичности примерно по закону корня двенадцатой степени, в то время как в двумерной ясно видна обратная тенденция — вихревой масштаб растет до значения порядка размера области. Последнее обстоятельство делает двумерную конвекцию более крупномасштабной и гладкой.

При значении надкритичности $4 \cdot 10^3 \leq r \leq 10^4$ в спектре скорости одновременно наблюдаются два инерционных интервала, соответствующие обратному каскаду энергии со степенным законом $k^{-5/3}$, перекачивающему кинетическую энергию из масштаба генерации в крупные масштабы, и прямому каскаду энтропии со степенным законом k^{-3} , который обеспечивает диссипацию. А при $r > 10^4$ видна тенденция к установлению единого степенного закона $k^{-2.6}$ — слегка искаженного закона энтропийного каскада.

Перестройка спектра скорости при $r \approx 10^4$, как и отмеченная в численных исследованиях [19, 20, 23] и эксперименте [24], обусловлена формированием крупномасштабной структуры течения. Более того, относительное ослабление обратного каскадного переноса энергии к большим масштабам (крупномасштабная структура поля скорости уже сформирована, а диссипация энергии пренебрежимо мала на больших масштабах) и усиление прямого каскада энтропии из-за роста диссипации (примерно как $r^{1.3}$ [10]) усиливает тенденцию установления единого степенного закона. Отклонение его показателя степени на 13% от показателя степени энтропийного каскада (-2.6 вместо -3), предположительно, связано с взаимодействием потоков энергии и энтропии, в результате чего степенной закон энтропийного каскада заменяется более пологим, но простирающимся в область волновых чисел, меньших частоты генерации.

Обсудим теперь перестройку длинноволнового спектра температуры. В температурном спектре при $750 \leq r \leq 2 \cdot 10^3$ наблюдается степенной закон Болджиано–Обухова $k^{-1.4}$, который при $2 \cdot 10^3 \leq r \leq 6 \cdot 10^3$ заменяется законом Бэтчелора — k^{-1} . При $r > 6 \cdot 10^3$ показатель степени β степенного закона $k^{-\beta}$ принимает значения из интервала $[0.7, 1]$, с наиболее вероятным значением 0.8.

Подобная перестройка наблюдалась экспериментально в физически близкой задаче о конвекции в вертикальной мыльной пленке при подогреве снизу [35]. В спектре температуры при $dQ < 48$ К наблюдался спектр БО $k^{-1.4}$, а при $dQ > 48$ К — спектр Бэтчелора k^{-1} . Авторы [35] связывают перестройку температурного спектра с формированием крупномасштабной структуры течения.

В самом деле, указанная перестройка температурного спектра при $r \approx 2 \cdot 10^3$ обусловлена действием красного каскада энергии, что находит свое отражение в процессе формирования крупномасштабной структуры течения (конденсации). При недостаточно большой надкритичности красный каскад еще не сформирован и на больших масштабах существенна роль плавучести, что обуславливает спектр БО $k^{-1.4}$. Но с повышением надкритичности, благодаря действию красного каскада, происходит перекачка энергии пульсаций скорости в большие масштабы, поле скорости становится крупномасштабным при относительно низком уровне пульсаций и возникает так называемый вязкоконвективный интервал, где пульсации температуры управляются крупномасштабным полем скорости, что обуславливает спектр Бэтчелора k^{-1} [13].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект №07-01-96070).

Список литературы

- [1] Kerr R. M. Rayleigh Number Scaling in Numerical Convection // J. Fluid Mech., 1996, vol. 310, pp. 139–179.
- [2] Malevsky A. V. Spline-Characteristic Method for Simulation of Convective Turbulence // J. Comput. Phys., 1996, vol. 123, no. 2, pp. 466–475.

- [3] Verzicco R. and Camussi R. Numerical Experiments on Strongly Turbulent Thermal Convection in a Slender Cylindrical Cell // *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 477, pp. 19–49.
- [4] Shishkina O. and Wagner C. Analysis of Thermal Dissipation Rates in Turbulent Rayleigh–Benard Convection // *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 546, pp. 51–60.
- [5] Cortese T. and Balachandar S. Vortical Nature of Thermal Plumes in Turbulent Convection // *Phys. Fluids A*, 1993, vol. 5, no. 12, pp. 3226–3232.
- [6] Curry J. H., Herring J. R., Loncaric J., and Orszag S. A. Order and Disorder in Two- and Three-Dimensional Benard Convection // *J. Fluid Mech.*, 1984, vol. 147, pp. 1–38.
- [7] Герценштейн С. Я., Родичев Е. Б., Шмидт В. М. Взаимодействие трехмерных волн во вращающемся горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу // *Докл. АН СССР*, 1978, т. 238, № 3, с. 545–548.
- [8] Malevsky A. V. and Yuen D. A. Characteristics-Based Methods Applied to Infinite Prandtl Number Thermal Convection in the Hard Turbulent Regime // *Phys. Fluids A*, 1991, vol. 3, no. 9, pp. 2105–2115.
- [9] Werne J. Structure of Hard-Turbulent Convection in Two Dimensions: Numerical Evidence // *Phys. Rev. E*, 1993, vol. 48, no. 2, pp. 1020–1035.
- [10] Палымский И. Б. Численное исследование спектров турбулентной конвекции Рэлея–Бенара // *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 2, с. 145–156.
- [11] Гетлинг А. В. Конвекция Рэлея–Бенара: Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 247 с.
- [12] Палымский И. Б. Численное моделирование двумерной конвекции при высокой надкритичности // *Усп. механ.*, 2006, № 4, с. 3–28.
- [13] Фрик П. Г. Турбулентность: подходы и модели. М.–Ижевск: Инст. компьют. иссл., 2003. 292 с.
- [14] Shats M. G., Xia H., Punzmann H., and Falkovich G. Suppression of Turbulence by Self-Generated and Imposed Flows // *Phys. Rev. Lett.*, 2007, vol. 99, no. 16, pp. 164502.
- [15] Физика океана / Под ред. Ю. П. Дорониной. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 296 с.
- [16] Frish U. and Sulem P. L. Numerical Simulation of the Inverse Cascade in Two-Dimensional Turbulence // *Phys. Fluids*, 1984, vol. 27, no. 8, pp. 1921–1923.
- [17] Babiano A., Dubrulle B., and Frick P. Scaling Properties of Numerical Two-Dimensional Turbulence // *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 52, no. 4, pp. 3719–3729.
- [18] Boffetta G., Celani A., and Vergassola M. Inverse Energy Cascade in Two-Dimensional Turbulence: Deviations from Gaussian Behavior // *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 61, no. 1, pp. R29–R32.
- [19] Tran C. V. and Bowman J. C. Robustness of the Inverse Cascade in Two-Dimensional Turbulence // *Phys. Rev. E*, 2004, vol. 69, pp. 036303.
- [20] Borue V. Inverse Energy Cascade in Stationary Two-Dimensional Homogeneous Turbulence // *Phys. Rev. Lett.*, 1994, vol. 72, no. 10, pp. 1475–1478.
- [21] Smith L. M. and Yakhot V. Bose Condensation and Small-Scale Structure Generation in a Random Force Driven 2D Turbulence // *Phys. Rev. Lett.*, 1993, vol. 71, no. 3, pp. 352–355.
- [22] Chen S., Ecke R. E., Eyink G. L., Rivera M., Wan M., and Xiao Z. Physical Mechanism of the Two-Dimensional Inverse Energy Cascade // *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, no. 8, pp. 084502.
- [23] Chertkov M., Connaughton C., Kolokolov I., and Lebedev V. Dynamics of Energy Condensation in Two-Dimensional Turbulence // *Phys. Rev. Lett.*, 2007, vol. 99, no. 8, pp. 084501.

- [24] Shats M. G., Xia H., and Punzmann H. Spectral Condensation of Turbulence in Plasmas and Fluids and Its Role in Low-To-High Phase Transitions in Toroidal Plasma // *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, pp. 046409.
- [25] Smith L. M. and Waleffe F. Transfer of Energy to Two-Dimensional Large Scales in Forced, Rotating Three-Dimensional Turbulence // *Phys. Fluids*, 1999, vol. 11, no. 6, pp. 1608–1622.
- [26] Bruneau C. H. and Kellay H. Experiments and Direct Numerical Simulations of Two-Dimensional Turbulence // *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, pp. 046305.
- [27] Палымский И. Б. Линейный и нелинейный анализ численного метода расчета конвективных течений // *Сиб. журн. вычисл. матем.*, 2004, т. 7, № 2, с. 143–163.
- [28] Палымский И. Б. Численное моделирование двумерной конвекции, роль граничных условий // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2007, № 4, с. 61–71.
- [29] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
- [30] Палымский И. Б. Метод численного моделирования конвективных течений // *Вычисл. технологии*, 2000, т. 5, № 6, с. 53–61.
- [31] Palymskiy I. B., Fomin P. A., and Hieronymus H. Rayleigh–Benard Convection in Chemical Equilibrium Gas (Simulation of Surface Detonation Wave Initiation) // *Appl. Math. Modelling*, 2008, vol. 32, no. 5, pp. 660–676.
- [32] Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 285 с.
- [33] Chu T. Y. and Goldstein R. J. Turbulent Convection in a Horizontal Layer of Water // *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 60, pp. 141–159.
- [34] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. 2-е изд. М.: Наука, 1978. 687 с.
- [35] Zhang J. and Wu X. L. Density Fluctuations in Strongly Stratified Two-Dimensional Turbulence // *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 94, no. 17, pp. 174503.