

# Использование доказательных вычислений для расчета вихревых структур в конденсате Бозе–Эйнштейна

Г. Л. Алфимов, Д. А. Зезюлин\*

Московский государственный институт электронной техники  
124498, Россия, Москва, Зеленоград, проезд 4806, д. 5  
\*d.zezyulin@gmail.com

*Получено 15 октября 2008 г.*

В работе изучаются неоднмерные структуры, описываемые нелинейным уравнением Шрёдингера с дополнительным потенциалом. Предлагается метод численного построения структур такого типа, основанный на динамической интерпретации исходного уравнения. Приводятся точные утверждения, позволяющие в некоторых случаях провести доказательные вычисления, перечислив все типы возможных структур. Физические аспекты рассматриваемой задачи связаны с теорией конденсата Бозе–Эйнштейна, где рассматриваемое уравнение называется уравнением Гросса–Питаевского, а исследуемые структуры соответствуют макроскопической волновой функции конденсата.

Ключевые слова: конденсат Бозе–Эйнштейна, солитоны, уравнение Гросса–Питаевского

## G. L. Alfimov, D. A. Zezyulin Demonstrative computation of vortex structures in Bose–Einstein Condensate

The paper concerns non-one-dimensional structures described by nonlinear Schrödinger equation with additional potential term. A method for numerical construction of structures of such kind is suggested. The method is based on dynamical interpretation of the equation under consideration. Some exact statements are formulated; they allow (in some cases) to perform demonstrative computation and to list all the types of structures mentioned above. Physical applications of the problem are associated with the theory of a Bose–Einstein condensate. In this context the considered equation is called Gross–Pitaevskii equation and the structures under consideration correspond to macroscopic wave function of the condensate.

Keywords: Bose–Einstein condensate, solitons, Gross–Pitaevskii equation

Mathematical Subject Classifications: 39Axx, 93D05

## 1. Введение

Нелинейное уравнение Шрёдингера с дополнительным потенциалом  $V(\mathbf{x})$ ,

$$i\Psi_t = -\Delta\Psi + V(\mathbf{x})\Psi - \sigma\Psi|\Psi|^2, \quad (1)$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \sigma = \pm 1,$$

возникает в целом ряде физических задач. Например, в физике плазмы это уравнение описывает распространение импульса в плазменном канале [1]. В нелинейной оптике включение дополнительного потенциала в классическую модель НУШ продиктовано необходимостью сжатия импульсов в оптическом волокне [2]. Однако наибольшим стимулом для исследования уравнения (1) явилось экспериментальное получение в 1995 году конденсата Бозе–Эйнштейна (БЭК) [3]. В теории БЭК уравнение (1) является основным при описании конденсата в так называемом приближении среднего поля [4, 5, 6]. В этом контексте  $\Psi(t, \mathbf{x})$  соответствует макроскопической волновой функции,  $V(\mathbf{x})$  имеет смысл потенциала ловушки, удерживающей конденсат, а множитель  $\sigma$  описывает характер взаимодействий между частицами, образующими конденсат. Случай  $\sigma = 1$  соответствует наличию притягивающих взаимодействий между частицами, образующими конденсат, в то время как в случае  $\sigma = -1$  между частицами действуют отталкивающие взаимодействия. В настоящее время экспериментально получены конденсаты обоих типов.

С физической точки зрения интересны в первую очередь решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям пространственной локализации

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Величины

$$E = \frac{1}{2} \int \left( |\nabla\Psi|^2 + V(\mathbf{x})|\Psi|^2 - \frac{\sigma}{2}|\Psi|^4 \right) d\mathbf{x}, \quad (2)$$

$$N = \int |\Psi|^2 d\mathbf{x} \quad (3)$$

имеют смысл энергии конденсата и числа частиц, образующих конденсат, соответственно (термин «число частиц» в данном контексте является условным; величина  $N$  может быть и нецелой.) Энергия конденсата и число частиц сохраняются при эволюции, описываемой уравнением (1). В теории БЭК уравнение (1) называется уравнением Гросса–Питаевского (ГП); в данной статье мы будем придерживаться терминологии, связанной с теорией БЭК.

Особый интерес представляют решения уравнения (1), которые описывают стационарные состояния конденсата [6]. Такие решения ищутся при помощи подстановки

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t}\psi(\mathbf{x}), \quad (4)$$

где функция  $\psi(\mathbf{x})$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi + (\omega - V(\mathbf{x}))\psi + \sigma\psi|\psi|^2 = 0. \quad (5)$$

Параметр  $\omega$  в терминах БЭК соответствует так называемому химическому потенциалу стационарного состояния.

В данной статье мы рассмотрим двумерные структуры, описываемые уравнением ГП, такие, что  $\partial\psi/\partial z \equiv 0$ . Среди стационарных состояний такого типа можно выделить *вихревые структуры*. Вихревые структуры представляют собой стационарные решения уравнения (1) вида  $\psi(r, \varphi) = \exp\{-i\varphi m\}v(r)$ , где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты, и  $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Целое число  $|m|$  при этом называется *топологическим зарядом* вихревой структуры. Одно из стационарных решений необходимо выделить особо. Это так называемое *основное состояние* (или основная мода). Основное состояние минимизирует функционал энергии  $E$  при заданном числе частиц  $N$ , поэтому представляет собой особый интерес и широко обсуждается в литературе [7, 8, 9]. Если потенциал зависит только от радиальной переменной,  $V(\mathbf{x}) \equiv V(r)$ , то основное состояние, как правило, тоже зависит только от  $r$  и не имеет нулей (строгий результат для случая отталкивающих взаимодействий см. в [10]). Таким образом, основная мода обладает нулевым топологическим зарядом  $m = 0$ . Заметим, что при  $m = 0$  и при фиксированном  $N$  может существовать много стационарных состояний, но основная мода при этом, как правило, единственна. Для численного построения основной моды во многих работах (см. [9, 11, 12]) предлагается использовать ее экстремальное свойство, то есть непосредственно решить задачу условной минимизации некоторого функционала.

Стационарные состояния, отличные от основной моды, мы будем называть *высшими модами*. В последнее время они также часто обсуждаются в литературе (см., например, [9, 13, 14]), в том числе, в связи с экспериментами по «квантовому запутыванию» различных конденсатов [15]. Для описания и численного построения высших мод в настоящее время применяется несколько подходов.

*Во-первых*, если величина волновой функции  $\psi(\mathbf{x})$  достаточно мала, то в уравнении (5) нелинейным кубическим членом можно пренебречь. Полученная задача на собственные значения

$$\Delta\psi + (\omega - V(\mathbf{x}))\psi = 0 \quad (6)$$

представляет собой хорошо известное уравнение линейного квантового осциллятора. Собственные функции и собственные числа задачи (6) можно использовать для того, чтобы аппроксимировать малоамплитудное решение  $\psi(\mathbf{x})$  уравнения (5) и соответствующее ему значение параметра  $\omega$ . Затем, постепенно изменяя величину  $\omega$ , можно численно продолжить семейство решений, получив в результате стационарные состояния, амплитуда которых малой уже не является. Такой метод, основанный на изучении ветвления нулевого решения (см, напр. [16]), использовался в [17] для расчета вихревых структур, не имеющих нулей при  $r > 0$  (был рассмотрен случай  $\sigma = 1$  и  $m = 0, 1, 2$ ). В работе [18] с помощью данного метода были исследованы вихревые структуры при  $\sigma = \pm 1$  и  $m = 0, 1, 2$ , как имеющие, так и не имеющие нулей. Решения, которые можно получить при помощи продолжения из линейного предела, мы будем, следуя [19, 20], называть *решениями с линейным аналогом*. Эти структуры, в некотором смысле, можно интерпретировать как собственные функции квантового линейного осциллятора (6), «деформированные» нелинейностью.

*Во-вторых*, подобное продолжение по параметру  $\omega$  можно осуществить, выходя из противоположного предела, когда амплитуда волновой функции велика [20]. При этом, как было показано в [20], таким образом можно получить решения, не имеющие линейного аналога.

*В-третьих*, предсказание возможных типов нелинейных структур в БЭК можно строить на основе вариационного принципа [19]. Сложные структуры при этом складываются из более простых объектов, причем параметры этих объектов и расстояния между ними определяются требованием минимизации некоторого функционала. Получив таким образом хо-

рошее начальное приближение, нелинейную моду можно затем найти численно, используя подходящий итерационный алгоритм.

Вместе с тем, общей классификации высших мод для уравнения ГП с произвольным потенциалом  $V(r)$ , вообще говоря, не построено. В настоящей работе мы пытаемся ответить на следующий вопрос:

*Пусть задан потенциал  $V(r)$ , топологический заряд вихревой структуры  $|m|$ , а также некоторый диапазон значений  $\omega$ . Можно ли, проделав некоторый (конечный) объем вычислительной работы, численно построить все вихревые структуры, соответствующие этим параметрам, гарантировав при этом, что других вихревых структур с данным топологическим зарядом и значениями  $\omega$ , лежащими в заданном диапазоне, не существует?*

По нашему мнению, в случае отталкивающих взаимодействий ( $\sigma = -1$ ) для структур с нулевым топологическим зарядом  $m = 0$  на этот вопрос можно ответить положительно. В основе предлагаемого нами подхода лежит строгое утверждение о том, что при фиксированных  $m$ ,  $\omega$  и  $V(r)$  все решения уравнения (5), стремящиеся к нулю при  $r \rightarrow \infty$  и удовлетворяющие некоторым дополнительным ограничениям, могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие с точками числовой прямой  $\mathbb{R}$ . Это утверждение, в совокупности с еще несколькими точными утверждениями, относящимися к случаю  $\sigma = -1$ , позволяет свести процесс поиска нелинейных мод к рассмотрению *конечной* области в некотором пространстве параметров. При этом никакой априорной информации о форме искомого решения не требуется.

Описанный метод построения вихревых структур является обобщением подхода, развитого в работе [21] для одномерного уравнения ГП. Этот подход успешно использовался для расчета одномерных стационарных решений для потенциалов  $V(x)$  различного вида [22], а также в задаче с неоднородной по пространству нелинейностью ( $\sigma = \sigma(x)$ ) [23]. Помимо самой возможности найти стационарные структуры, данный подход позволяет наглядно представить семейства найденных стационарных структур в виде кривых на некоторой плоскости параметров.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим двумерное уравнение (1), записанное в полярных координатах  $(r, \varphi)$ :

$$i\Psi_t = -\Psi_{rr} - \frac{1}{r}\Psi_r - \frac{1}{r^2}\Psi_{\varphi\varphi} + V(r, \varphi)\Psi - \sigma\Psi|\Psi|^2. \quad (7)$$

В дальнейшем будем предполагать, что потенциал является радиальной функцией,  $V(r, \varphi) \equiv V(r)$ . Решения уравнения (7), описывающие стационарные состояния конденсата, ищутся в виде

$$\Psi(t, r, \varphi) = e^{-i\omega t}\psi(r, \varphi), \quad (8)$$

где не зависящая от времени функция  $\psi(r, \varphi)$  является решением уравнения

$$\psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r + \frac{1}{r^2}\psi_{\varphi\varphi} + (\omega - V(r))\psi + \sigma|\psi|^2\psi = 0,$$

удовлетворяя при этом граничным условиям на бесконечности:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r, \varphi) = 0.$$



Решения, соответствующие вихревым структурам (ВС), имеют вид

$$\psi(r, \varphi) = e^{-im\varphi} v(r), \quad (9)$$

где  $m = 0, \pm 1, \dots$  и  $|m|$  — топологический заряд ВС. Без ограничения общности мы будем считать, что  $m \geq 0$ . Функция  $v(r)$  является действительным решением уравнения

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + (\omega - V(r))v - \frac{m^2}{r^2} v + \sigma v^3 = 0. \quad (10)$$

Требование регулярности волновой функции при  $r = 0$  задает асимптотическое поведение функции  $v(r)$  при  $r \rightarrow +0$ :

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{v(r)}{r^m} = c \neq \pm\infty. \quad (11)$$

Кроме того, функция  $v(r)$  должна удовлетворять условию пространственной локализации

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r) = 0. \quad (12)$$

Для стационарного состояния (8) определим нормированное число частиц как

$$N(\Psi) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r |\psi(r, \varphi)|^2 dr.$$

Вообще говоря, интеграл (13) сходится не для всякого стационарного решения (8). Вместе с тем, с физической точки зрения интересны только состояния, характеризующиеся конечной величиной  $N$ , так как число частиц, образующих реальный конденсат, конечно. При этом возникает дополнительное условие для вихревого решения (9):

$$N(\psi) = N(v) \equiv \int_0^\infty r v^2(r) dr < \infty. \quad (13)$$

Таким образом, при заданном  $m$  расчет волновой функции  $\Psi(t, r, \varphi)$ , описывающей стационарное состояние вида (8)–(9), сводится к отысканию соответствующей ей пары  $(\omega, v(r))$ , где функция  $v(r)$  является решением уравнения (10) и удовлетворяет условиям (11)–(13).

### 3. Краткое описание предлагаемого подхода

В основе предлагаемого метода лежит динамическая интерпретация уравнения (10), дополненная некоторыми строгими утверждениями. Действительно, с уравнением (10) связана неавтономная динамическая система, траектории которой  $(v, v_r, r)$  при  $r \in (0; \infty)$  порождаются решениями  $v(r)$  уравнения (10). При этом, в силу граничных условий (11)–(12), интерес представляют те траектории данной системы, которые достаточно быстро стремятся к равновесию  $v = v_r = 0$  при  $r \rightarrow \infty$  и не стремятся к бесконечности при  $r \rightarrow 0$ .

Предложение 1, сформулированное в разделе 4.1.1, позволяет сопоставить каждой полутраектории, достаточно быстро стремящейся к равновесию  $v = v_r = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , действительное число  $C$  и, наоборот, сопоставить каждому  $C$  единственную полутраекторию такого типа. Введем в рассматриваемом пространстве  $(v, v_r, r)$  секущую плоскость  $r = r_1$ , где  $r_1 \in (0, \infty)$  — некоторое фиксированное число. Полутраектории, соответствующие различным, но непрерывно меняющимся значениям параметра  $C$ , оставят на данной плоскости некоторую кривую, которую мы обозначим  $\gamma_+$ .

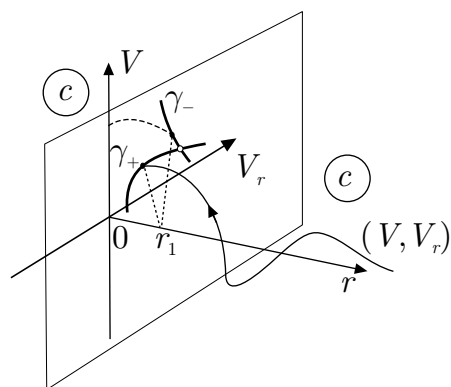


Рис. 1. Полутраектории динамической системы (10), построенные для некоторых значений параметров  $c$  и  $C$  на интервалах  $(0, r_1)$  и  $(r_1, \infty)$  соответственно.

С другой стороны, из Предложения 2 раздела 4.1.2 следует, что каждой несингулярной при  $r \rightarrow 0$  полутраектории можно сопоставить другое действительное число  $c$  и, наоборот, любому действительному числу  $c$  можно сопоставить единственную несингулярную при  $r \rightarrow 0$  полутраекторию. Аналогично, рассматривая полутраектории, соответствующие различным значениям  $c$ , в секущей плоскости мы получим еще одну кривую  $\gamma_-$ . Каждой траектории, являющейся решением задачи (10)–(13), соответствует точка пересечения кривых  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ . В свою очередь, каждой точке пересечения рассматриваемых кривых соответствует пара значений параметров  $c$  и  $C$ . Задача численного нахождения точек пересечения кривых  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  может быть решена с помощью стандартных методов решения задачи Коши, путем численного построения и «сшивки» полутраекторий, построенных при  $0 < r < r_1$  и  $r > r_1$  (см. рис. 1). Соответствующий алгоритм представляет собой «сканирование» (перебор) различных значений параметров  $c$  и  $C$  и описан подробнее в разделе 5.1. Выбирая шаг сканирования достаточно малым, можно построить кривые  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  с необходимой точностью.

В силу того, что численно «просканировать» можно лишь конечные интервалы значений параметров  $c$  и  $C$ , предлагаемый алгоритм, вообще говоря, не позволяет гарантировать, что найдены все вихревые структуры, описываемые уравнением (10). Однако можно показать (см. раздел 4.2), что в случае  $\sigma = -1$  «большая часть» траекторий уходит на бесконечность в конечной точке интервала  $r \in (0; \infty)$ . При этом оказывается, что для того чтобы гарантировать, что найдены все возможные вихревые структуры, достаточно ограничиться рассмотрением конечных интервалов  $[-c^*; c^*]$  и  $[-C^*; C^*]$ , где  $0 < c^*, C^* < \infty$ .

## 4. Некоторые строгие утверждения

### 4.1. Существование, единственность и асимптотика решений уравнения (10) при $r \rightarrow +0$ и $r \rightarrow +\infty$

#### 4.1.1. Поведение решений уравнения (10) при $r \rightarrow +\infty$

Рассмотрим уравнение

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - Q(r)v + \Phi(v) = 0. \quad (14)$$



Введем вспомогательную функцию

$$F(r, u) = \sqrt{r} \Phi \left( \frac{u}{\sqrt{r}} \right) \quad (15)$$

и для краткости примем следующее обозначение для частных производных:

$$\frac{\partial^{k+j} F(r, u)}{\partial^k r \partial^j u} \equiv F_{r^k u^j}(r, u).$$

**Предложение 1.** Пусть для функции  $Q(r)$  найдется такое  $r_0 > 0$ , что

$$(Q1) \quad Q(r) \geq \varepsilon > 0 \text{ при } r > r_0,$$

$$(Q2) \quad Q(r) \in C^2(r_0, +\infty),$$

$$(Q3) \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{|Q''(r)|}{Q^{3/2}(r)} dr < \infty,$$

а функция  $F(r, u)$ , определенная соотношением (15), такова, что для некоторого  $\delta > 0$

$$(F1) \quad \text{при } (r, u) \in (r_0, +\infty) \times (-\delta, \delta) \text{ существуют непрерывные частные производные } F_{r^k u^j}(r, u), \quad k = 0, 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad k + j \leq 3, \text{ и } F_{rruu}(r, u),$$

$$(F2) \quad F(r, 0) = F_u(r, 0) = F_r(r, 0) = F_{rr}(r, 0) = F_{rru}(r, 0) \equiv 0, \text{ и } F_{uu}(r, 0) \text{ ограничена при } r > r_0,$$

(F3) при  $(r, u) \in (r_0, +\infty) \times (-\delta, \delta)$  можно записать следующие оценки:

$$|F_{uuu}(r, u)| < U_{0,3}(u), \quad |F_{ruu}(r, u)| < U_{1,2}(u), \quad |F_{rruu}(r, u)| < U_{2,2}(u),$$

в которых функции, стоящие справа от знака неравенства, существуют и ограничены при  $u \in (-\delta, \delta)$ .

Тогда:

(a) для любого решения  $v(r)$  уравнения (14), такого, что  $\sqrt{r}v(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$ , существует число  $C$ , такое, что  $v(r)$  имеет асимптотику

$$v(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot Q^{-1/4}(r) \cdot \exp \left\{ - \int_{r_0}^r \sqrt{Q(t)} dt \right\} (C + o(1)), \quad (16)$$

$$v'(r) = -\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot Q^{1/4}(r) \cdot \exp \left\{ - \int_{r_0}^r \sqrt{Q(t)} dt \right\} (C + o(1)); \quad (17)$$

(b) наоборот, для любого числа  $C$  существует единственное стремящееся к нулю при  $r \rightarrow +\infty$  решение  $v(r)$  уравнения (14), имеющее асимптотику (16)–(17).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия (Q1)–(Q3) совпадают с условиями (Q1)–(Q3) теоремы 1 из работы [21]. Для удобства мы приводим формулировку данной теоремы в приложении к настоящей статье.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для случая кубической нелинейности  $\Phi(v) = \sigma v^3$  имеем  $F(r, u) = \sigma u^3/r$ . Легко проверить, что условия (F1)–(F3) при этом выполняются.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если, как в уравнении (10),  $Q(r) = V(r) - \omega + m^2/r^2$ , то главный член асимптотики (16)–(17) не изменится, если положить  $Q(r) = V(r) - \omega$ .

*Доказательство.* С помощью подстановки  $v(r) = u(r)/\sqrt{r}$  уравнение (14) приводится к виду

$$u_{rr} - Q_1(r)u + F(r, u) = 0,$$

где  $Q_1(r) = Q(r) - 1/4r^2$ . Легко проверить, что если функция  $Q(r)$  удовлетворяет условиям (Q1)–(Q3), то функция  $Q_1(r)$  тоже удовлетворяет этим условиям. Если бы вдобавок функция  $F(r, u)$  удовлетворяла условиям (NL1)–(NL2) теоремы 1 из работы [21] (см. приложение к данной статье), то доказываемое утверждение следовало бы непосредственно из цитируемой теоремы. Можно, однако, убедиться в том, что утверждение теоремы 1 сохраняет силу, если заменить условия (NL1)–(NL2) более общими условиями (F1)–(F3). Для этого необходимо проверить, что при выполнении условий (F1)–(F3) остаются справедливы леммы В2–В4 работы [21]. Проверка последнего факта производится непосредственно, с использованием разложений функций  $F, F_r, F_u, F_{ru}, F_{uu}, F_{rr}, F_{rru}$  по формуле Маклорена по переменной  $u$ . Остаточный член (записанный в форме Лагранжа) при этом оценивается с помощью условий (F3). Например:

$$F(r, u) = \frac{1}{2}F_{uu}(r, 0)u^2 + \frac{1}{6}F_{uuu}(r, \xi(r, u))u^3, \quad |\xi(r, u)| < |u|,$$

$$|F_{uuu}(r, \xi(r, u))u^3| < |u|^3 \cdot U_{0,3}(\xi(r, u)) \leq |u|^3 \cdot \sup_{|\eta| < |u|} U_{0,3}(\eta).$$

Аналогичные формулы справедливы и для остальных указанных выше частных производных. ■

Предложение 1 устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством стремящихся к нулю при  $r \rightarrow +\infty$  решений уравнения (14), таких, что сходится несобственный интеграл  $\int_{r_0}^{\infty} rv^2(r) dr$ , и множеством действительных чисел  $\mathbb{R}$ . Для любого числа  $C$ , согласно Предложению 1, существует единственное стремящееся к нулю решение, подчиняющееся асимптотическим формулам (16)–(17). Мы будем обозначать это решение как  $v_+(r; C)$ .

#### 4.1.2. Поведение решений уравнения (10) при $r \rightarrow +0$

Остановимся на вопросе о существовании у уравнения вида

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + (\omega - V(r))v - \frac{m^2}{r^2}v + \Phi(v) = 0 \quad (18)$$

решений, имеющих при  $r \rightarrow +0$  асимптотику, определяющуюся соотношением (11). Подстановкой  $v(r) = r^m u(r)$  уравнение (18) приводится к виду

$$u_{rr} = -\frac{2m+1}{r}u_r - (\omega - V(r))u - \phi(r, u), \quad (19)$$

где  $\phi(r, u) = \Phi(r^m u)/r^m$ . Дополним уравнение (19) начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad u_r(0) = 0. \quad (20)$$





**Предложение 2.** Пусть существуют  $r_0, \delta > 0$ , такие, что функция  $V(r)$  непрерывна для  $r \in [0, r_0)$ , и при  $(r, u) \in [0, r_0) \times (u_0 - \delta, u_0 + \delta)$  существуют и являются непрерывными и ограниченными функции  $\phi(r, u)$ ,  $\partial\phi(r, u)/\partial u$ . Тогда задача Коши (19)–(20) имеет единственное решение.

*Доказательство.* Введем новую переменную  $\rho$ , определенную следующим образом:

$$\rho = \begin{cases} -\ln r, & m = 0, \\ r^{-2m}, & m > 0. \end{cases}$$

Тогда если  $r \rightarrow +0$ , то  $\rho \rightarrow +\infty$ . Для случаев  $m = 0$  и  $m > 0$  уравнение (19) принимает, соответственно, вид

$$u_{\rho\rho}(\rho) + e^{-2\rho} [(\omega - V(e^{-\rho}))u(\rho) + \phi(e^{-\rho}, u)] = 0,$$

$$u_{\rho\rho}(\rho) + \frac{\rho^{-\left(2+\frac{1}{m}\right)}}{4m^2} \left[ \left( \omega - V\left(\rho^{-\frac{1}{2m}}\right) \right) u(\rho) + \phi\left(\rho^{-\frac{1}{2m}}, u\right) \right] = 0.$$

К последним уравнениям можно применить утверждения из [24]. Из следствия 9.1 главы XII непосредственно вытекает существование необходимого решения. Из следствия 9.1 главы XI можно вывести его единственность (доказательство проводится от противного). ■

**Следствие 1.** Если  $u(r)$  — решение задачи Коши (19)–(20), то

$$u_{rr}(0) = -\frac{1}{2m+2}(\omega u_0 - V(0)u_0 + \phi(0, u_0)). \quad (21)$$

**Следствие 2.** Для любого  $c_0 \in \mathbb{R}$  найдется единственное решение  $v_-(r; c_0)$  уравнения (10), такое, что

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{v_-(r; c_0)}{r^m} = c_0, \quad (22)$$

причем случай  $c_0 = 0$  соответствует тривиальному решению  $v_-(r; 0) \equiv 0$ .

**Замечание.** Вообще говоря, утверждения о существовании, единственности и поведении при  $r \rightarrow +0$  решений уравнений, подобных уравнению (19), известны. В работе [25], например, доказано утверждение о существовании и единственности для уравнения

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r - u + u^n = 0, \quad n > 0.$$

Асимптотика (22) совпадает с асимптотикой функций Бесселя [26], чего естественно ожидать при разумных ограничениях на  $V(r)$  и  $\Phi(v)$ . Вместе с тем, для уравнения (19) нам не удалось найти в литературе утверждения о существовании и единственности, сформулированного в необходимом нам виде, поэтому для полноты изложения мы приводим его в данной статье.

#### 4.2. Утверждения для случая $m = 0$ и $\sigma = -1$ (конденсат с отталкиванием)

Рассмотрим уравнение (10) при  $\sigma = -1$  (конденсат с отталкиванием), описывающее ВС с нулевым топологическим зарядом ( $m = 0$ ):

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + (\omega - V(r))v - v^3 = 0. \quad (23)$$

Будем считать, что функция  $V(r)$  такова, что уравнение (23) удовлетворяет условиям Предложений 1 и 2. Установим некоторые свойства решений  $v_+(r; C)$  и  $v_-(r; c)$  уравнения (23). Заметим сначала, что уравнение (23) можно переписать в следующих эквивалентных формах:

(а) введя новую независимую переменную  $\rho = \ln r$ , вместо (23) получим

$$u_{\rho\rho} = -e^{2\rho} (\omega - V(e^\rho)u - u^3), \quad (24)$$

где  $u = u(\rho) = v(e^\rho)$ ;

(б) после подстановки  $v(r) = u(r)/\sqrt{r}$  уравнение (23) принимает вид

$$u_{rr} + \left( \omega - V(r) + \frac{1}{4r^2} \right) u - \frac{u^3}{r} = 0. \quad (25)$$

В дальнейшем для обозначения производной по  $r$  мы будем использовать штрих. При доказательстве некоторых утверждений мы ссылаемся на лемму сравнения, которая была сформулирована в работе [21]. Для удобства мы приводим формулировку леммы сравнения в приложении к настоящей статье.

#### 4.2.1. Монотонность по параметрам $c$ и $C$

**Лемма 1 (монотонность при «стрельбе» из 0).** Пусть при некотором  $c_0 > 0$  для соответствующего решения  $v_0(r) = v_-(r; c_0)$ , нашлось такое  $r_0$ , что для всех  $r \in [0, r_0]$

(а)  $v_0(r) > 0$ ,

(б)  $\omega - V(r) - 3v_0^2(r) < 0$ .

Тогда для любого  $c_1 > c_0$  соответствующее решение  $v_1 = v_-(r; c_1)$  таково, что  $v_1(r) > v_0(r)$  и  $v_1'(r) > v_0'(r)$  для всех  $0 \leq r \leq r_0$ , при которых  $v_1(r)$  вообще существует.

*Доказательство.* Используем запись исходного уравнения в виде (24). Обозначим  $u_0(\rho) \equiv v_0(e^\rho)$ ,  $u_1(\rho) \equiv v_1(e^\rho)$ . По условию,  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} u_{0,1}(\rho) = c_{0,1}$ . Разность  $\Delta(\rho) = u_1(\rho) - u_0(\rho)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{\rho\rho} = -e^{2\rho} (\omega - V(e^\rho) - 3u_0^2(\rho) - 3u_0(\rho)\Delta - \Delta^2) \Delta, \quad (26)$$

причем  $\lim_{\rho \rightarrow -\infty} \Delta(\rho) = c_1 - c_0 > 0$ . Значит, существует такое значение  $\rho = \tilde{\rho}$ , что  $\Delta(\rho) > 0$  и  $\Delta_\rho(\rho) > 0$  при  $\rho \leq \tilde{\rho}$ . Предположим, что  $\rho_0$  — наименьший нуль функции  $\Delta(\rho)$ . На множестве  $(\rho, \Delta) \in [\tilde{\rho}, \rho_0] \times [0, +\infty)$  правая часть уравнения (26) неотрицательна. Применяя лемму сравнения к уравнениям (26) и  $\Delta_{\rho\rho}(\rho) = 0$  с одинаковыми начальными данными в точке  $\rho = \tilde{\rho}$ , получаем, что  $\Delta(\rho_0) \geq c_1 - c_0 > 0$ , что противоречит тому, что  $\rho_0$  — нуль функции  $\Delta(\rho)$ . Полученное противоречие говорит о том, что функция  $\Delta(\rho)$  не имеет нулей и остается положительной на всем промежутке  $\rho \leq \ln r_0$ . Кроме того, на этом же промежутке  $\Delta_{\rho\rho}(\rho) > 0$  и  $\Delta_\rho(\rho) > 0$ . Возвращаясь к переменной  $r$ , мы получаем утверждение доказываемой леммы. ■

**Лемма 2 (монотонность при «стрельбе» из  $\infty$ ).** Пусть для некоторого  $C_0 > 0$  для соответствующего решения  $v_0(r) = v_+(r; C_0)$  нашлось такое  $r_0$ , что для всех  $r \in [r_0, \infty)$

(а)  $v_0(r) > 0$ ,

(б)  $\omega - V(r) - 3v_0^2(r) + \frac{1}{4r^2} < 0$ .



Тогда для любого  $C_1 > C_0$  соответствующее решение  $v_1(r) = v_+(r; C_1)$  таково, что  $v_1(r) > v_0(r)$  и  $v_1'(r) < v_0'(r)$  для всех  $r \geq r_0$ , при которых  $v_1(r)$  вообще существует.

*Доказательство.* Из явного вида асимптотики (16)–(17) следует, что при достаточно больших  $r$  соотношение  $v_1(r) > v_0(r)$  выполняется. Докажем, что оно выполняется для всех  $r > r_0$ . Используем запись исходного уравнения в виде (25). Уравнению (25) удовлетворяют функции  $u_0(r) \equiv \sqrt{r}v_0(r)$  и  $u_1(r) \equiv \sqrt{r}v_1(r)$ . Функция  $\Delta(r) \equiv u_1(r) - u_0(r)$  при этом удовлетворяет уравнению

$$\Delta'' = - \left( \omega - V(r) + \frac{1}{4r^2} - \frac{3}{r}u_0^2(r) - \frac{3}{r}u_0(r)\Delta - \frac{1}{r}\Delta^2 \right) \Delta. \tag{27}$$

При достаточно больших  $r$  функция  $\Delta(r)$ , как и правая часть уравнения (27), положительна. Повторяя рассуждения леммы 1 и используя лемму сравнения, получаем требуемое утверждение. ■

#### 4.2.2. Сингулярность решений уравнения (23)

Назовем решение  $v(r)$  дифференциального уравнения *сингулярным*, если существует значение  $r = r_0$ , такое, что  $\lim_{r \rightarrow r_0} v(r) = \infty$ . Значение  $r_0$  при этом будем называть *точкой сингулярности*.

Укажем некоторые достаточные условия сингулярности решения уравнения (23). Введем следующее обозначение:

$$\Omega \equiv \sup_{r \in [0; \infty)} (\omega - V(r)).$$

Величина  $\Omega$  зависит от  $\omega$ , будем обозначать эту зависимость как  $\Omega(\omega)$ .

**Лемма 3 (достаточное условие сингулярности решения при «стрельбе» из 0).** Если решение  $\tilde{v}(r)$  уравнения (23) таково, что для некоторого  $r_0 > 0$

(a)  $\tilde{v}(r_0) > \sqrt{\Omega}$ ,

(b)  $\tilde{v}'(r_0) > 0$ ,

то существует  $r_1 > r_0$ , такое, что  $\lim_{r \rightarrow r_1-0} \tilde{v}(r) = +\infty$ .

*Доказательство.* Рассмотрим уравнение

$$w_{\rho\rho} = -\alpha\Omega w + \alpha w^3, \tag{28}$$

где  $\alpha > 0$  — числовой параметр. Решение  $w(\rho)$  уравнения (28), удовлетворяющее начальным данным  $w(\rho_0) = w_0 > \sqrt{\Omega}$ ,  $w_\rho(\rho_0) = w_1 > 0$ , можно записать в следующем неявном виде:

$$\rho - \rho_0 = \int_{w_0}^w \left[ \left( \frac{\alpha}{2}\xi^4 - \alpha\Omega\xi^2 \right) - \left( \frac{\alpha}{2}w_0^4 - \alpha\Omega w_0^2 \right) + w_1^2 \right]^{-1/2} d\xi. \tag{29}$$

Из формулы (29) видно, что это решение является сингулярным, причем точка сингулярности  $\rho = \tilde{\rho} > \rho_0$ . Положим  $\alpha = r_0^2$ ,  $\rho_0 = \ln r_0$  и применим лемму сравнения к уравнениям (24) и (28); условия леммы сравнения выполняются, если  $\rho > \rho_0$  и  $w > \sqrt{\Omega}$ . Получаем, что если  $u(\rho_0) = w(\rho_0) > \sqrt{\Omega}$  и  $u_\rho(\rho_0) = w_\rho(\rho_0) > 0$ , то при всех  $\rho$ , при которых существует решение  $u(\rho)$  уравнения (24), выполняется соотношение  $u(\rho) \geq w(\rho)$ . Следовательно, решение  $u(\rho)$  также является сингулярным. Возвращаясь к уравнению (23),  $u(\rho) = v(e^\rho) = v(r)$ ,  $u_\rho(\rho) = rv_r(r)$ , и замечая, что  $u(\rho_0) = v(r_0)$ ,  $u_\rho(\rho_0) = r_0v_r(r_0)$ , получаем утверждение леммы 3. ■



**Следствие.** Если решение  $\tilde{v}(r)$  уравнения (23) таково, что  $\tilde{v}(0) > \sqrt{\Omega}$  и  $\tilde{v}'(0) = 0$ , то оно сингулярно.

*Доказательство.* Обозначим  $v_0 \equiv \tilde{v}(0)$ . Согласно следствию к Предложению 2,  $\tilde{v}''(0) = -(\omega v_0 - V(0)v_0 - v_0^3)/2$ . Так как  $v_0 > \sqrt{\Omega}$ , то  $\tilde{v}''(0) > 0$ , и  $\tilde{v}'(r)$  возрастает, когда  $r$  достаточно мало. Значит, найдется достаточно малое, но строго положительное значение  $r = r_0$ , при котором для функции  $\tilde{v}(r)$  выполняются условия леммы 3. ■

**Лемма 4 (достаточное условие сингулярности решения при «стрельбе» из  $\infty$ ).** Если решение  $\tilde{v}(r)$  уравнения (23) таково, что

$$(a) \tilde{v}(r_0) > \sqrt{\Omega},$$

$$(b) \tilde{v}'(r_0) < 0$$

для некоторого  $r_0 > 0$ , то  $\tilde{v}(r)$  является сингулярным, с некоторой точкой сингулярности  $r = \tilde{r} \geq 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{v}(r)$  не имеет точек сингулярности при  $0 < r < r_0$ . Тогда  $\tilde{v}(r)$  является дважды дифференцируемой функцией при  $0 < r < r_0$ . Покажем, что  $\tilde{v}'(r)$  не обращается в нуль при  $0 < r < r_0$ . Действительно, если  $r_1$  — наибольший нуль производной  $\tilde{v}'(r)$  на промежутке  $(0; r_0)$ , то на промежутке  $(r_1; r_0)$  функция  $\tilde{v}(r)$  убывает и  $\tilde{v}(r_1) > \sqrt{\Omega}$ . Поэтому

$$\tilde{v}''(r_1) = -(\omega - V(r_1))\tilde{v}(r_1) + \tilde{v}^3(r_1) > \tilde{v}^3(r_1) - \Omega\tilde{v}(r_1) > 0.$$

Значит, в точке  $r = r_1$  функция  $\tilde{v}(r)$  имеет минимум, что противоречит тому, что  $\tilde{v}'(r) < 0$  при  $r_1 < r < r_0$ . Таким образом,  $\tilde{v}'(r) < 0$  при  $0 < r < r_0$ . Но это означает, что при всех  $0 < r < r_0$

$$\tilde{v}''(r) = -\frac{1}{r}\tilde{v}'(r) - (\omega - V(r))\tilde{v}(r) + \tilde{v}^3(r) > \tilde{v}^3(r) - \Omega\tilde{v}(r) > 0,$$

то есть на всем промежутке  $0 < r < r_0$  производная решения  $\tilde{v}'(r)$  возрастает. Значит,  $\tilde{v}'(0) < \tilde{v}'(r_0) < 0$  и решение  $\tilde{v}(r)$  имеет точку сингулярности при  $r = 0$ . Лемма 4 доказана. ■

## 5. Численный метод

### 5.1. Процедура расчета решений и визуализация результатов

Предложение 1 утверждает, что для любого  $C$  существует единственное решение уравнения (10) с константой  $C$  в асимптотике (16)–(17). Напомним, что мы обозначаем данное решение как  $v_+(r; C)$ . Для того чтобы рассчитать решение  $v_+(r; C)$ , зафиксируем достаточно большое число  $r_\infty \gg 1$ , при котором стремящиеся к нулю при  $r \rightarrow +\infty$  решения уравнения (10) могут быть достаточно точно приближены асимптотической формулой (16)–(17). Используя эту асимптотику, можно определить значения  $v_+(r_\infty; C)$  и  $v_+'(r_\infty; C)$ . Затем решение  $v_+(r; C)$  можно продолжить в область  $r < r_\infty$ , используя численные методы решения задачи Коши.

Предложение 2 утверждает, что для любого  $c$  существует единственное решение уравнения (10) с константой  $c$  в асимптотике (22). Следуя рассуждениям, изложенным в пункте 4.1.2, мы обозначим это решение как  $v_-(r; c)$ . Аналогично, используя асимптотику (22), для любого числа  $c$  можно получить решение  $v_-(r; c)$  при  $r > 0$ .



Таким образом, при фиксированном значении  $\omega$ , решение задачи (10)–(13) сводится к решению системы уравнений

$$v_+(r_1; C) = v_-(r_1; c), \quad v_+'(r_1; C) = v_-'(r_1; c), \quad (30)$$

в которой  $r_1 > 0$  — любое фиксированное число, а неизвестными выступают числа  $c$  и  $C$ . Если пара  $(c_0, C_0)$  является решением системы (30), то решение  $v(r)$  задачи (10)–(13) находится как

$$v(r) = \begin{cases} v_-(r_1; c_0), & 0 < r < r_1, \\ v_+(r_1; C_0), & r_1 < r. \end{cases} \quad (31)$$

Для доказательных вычислений важна эквивалентность задачи (10)–(13) и системы (30), которая следует из предложений 1 и 2.

Если значение  $\omega$  фиксировано, процесс решения системы (30) можно наглядно изобразить следующим образом. Рассмотрим плоскость  $\{v(r_1); v'(r_1)\}$ . При изменении параметра  $c$  точка  $(v_-(r_1; c), v_-'(r_1; c))$  пробегает в этой плоскости вдоль некоторой кривой, которую, согласно рассуждениям из раздела 3, мы обозначим как  $\gamma_-$ . Аналогично, при изменении параметра  $C$  точка  $(v_+(r_1; C), v_+'(r_1; C))$  пробегает в этой же плоскости вдоль другой кривой, которую мы обозначим как  $\gamma_+$ . Кривые  $\gamma_-$  и  $\gamma_+$  строятся численно; точки пересечения кривых  $\gamma_-$  и  $\gamma_+$  соответствуют решениям задачи (10)–(13). Обе кривые  $\gamma_-$  и  $\gamma_+$  проходят через начало координат. Получающаяся точка пересечения соответствует тривиальному решению  $v(r) \equiv 0$ , при этом  $c_0 = C_0 = 0$ . Кроме того, каждая из кривых симметрична относительно начала координат, что отражает инвариантность уравнения (10) относительно замены  $v(r) \rightarrow -v(r)$ . Пример поведения кривых  $\gamma_{\pm}$  на плоскости  $\{v(r_1); v'(r_1)\}$  показан на рисунке 2.

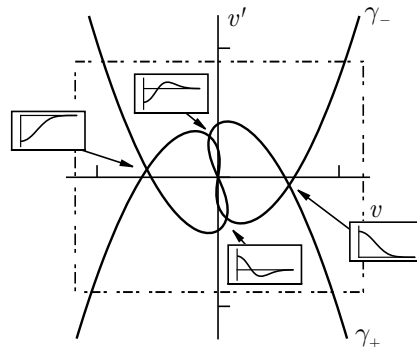


Рис. 2. Пример построения кривых  $\gamma_-$  и  $\gamma_+$  на плоскости  $\{v(r_1); v'(r_1)\}$  при  $m = 0$ ,  $\sigma = -1$  и фиксированном значении  $\omega$ . Точки пересечения кривых соответствуют решениям задачи (10)–(13). Утверждения из пункта 4.2 позволяют утверждать, что при дальнейшем увеличении  $|c|$  и  $|C|$  кривые  $\gamma_-$  и  $\gamma_+$  не попадут внутрь некоторого прямоугольника, который показан пунктиром. Таким образом, при данном  $\omega$  задача (10)–(13) не имеет других решений, кроме тех, что показаны на данном рисунке.

В случае произвольного потенциала  $V(r)$  взаимное расположение кривых  $\gamma_-$  и  $\gamma_+$  может быть достаточно сложным. Однако в случае  $m = 0$  и  $\sigma = -1$ , опираясь на леммы 1–4, можно указать конечную область на множестве значений параметров  $c$  и  $C$ , где лежат все точки пересечения этих кривых. Согласно следствию из леммы 3, значение параметра  $c$  должно лежать в диапазоне  $(-c^*; c^*)$ , где  $c^* = \sqrt{\Omega}$ , иначе решение  $v_-(r; c)$  окажется

сингулярным. С другой стороны, в соответствии с леммами 2 и 4, численное построение кривой  $\gamma_+$  также можно оборвать, если при некотором положительном значении  $C = C^* > 0$  выполнены условия

$$\begin{aligned}\omega - V(r) - 3v_+^2(r; C^*) + \frac{1}{4r^2} < 0, \quad v_+(r; C^*) > 0, \quad r \in [r_1; r_\infty), \\ v_+(r_1; C^*) > \sqrt{\Omega}, \quad v_+'(r_1; C^*) < 0,\end{aligned}$$

так как для всех значений  $C > C^*$  решение  $v_+(r; C)$  будет сингулярным. В силу нечетности нелинейного члена решение  $v_+(r; C)$  будет сингулярным и при  $C < -C^*$ . Доказанные утверждения позволяют сказать, что для всех достаточно больших по модулю  $c$  и  $C$  кривые  $\gamma_\pm$  не попадут внутрь некоторого прямоугольника на плоскости  $\{v(r_1); v'(r_1)\}$  (пример показан на рис. 2), а следовательно, не смогут иметь точек пересечения.

Для исследования зависимости вида стационарных решений от параметра  $\omega$  можно предложить другой метод визуализации результатов. Для того чтобы однозначно определить любое решение задачи (10)–(13), достаточно знать только одно из чисел  $C_0$  и  $c_0$ . Поэтому любое локализованное решение можно отметить точкой  $(\omega_0, c_0)$  на плоскости  $\{\omega; c\}$ . Изменяя параметр  $\omega$ , на этой плоскости можно получить непрерывные кривые, соответствующие различным семействам вихревых структур уравнения (1). При этом каждой точке, принадлежащей такой кривой, соответствует ровно одно решение задачи (10)–(13). По кривым на плоскости  $\{\omega; c\}$  можно восстановить и кривые на плоскости  $\{\omega; N\}$ , которые более традиционны для физических приложений.

## 5.2. Результаты расчетов: гармонический потенциал

Рассмотрим сначала один из физически наиболее значимых случаев, когда удерживающий потенциал имеет вид  $V(r) = r^2$ . В этом случае уравнение (10) принимает следующий вид:

$$v'' + \frac{1}{r}v' + (\omega - r^2)v - \frac{m^2}{r^2}v + \sigma v^3 = 0. \quad (32)$$

Потенциал вида  $V(r) = r^2$  называют гармоническим; это связано с тем, что соответствующая уравнению (32) линейная задача на собственные значения

$$v'' + \frac{1}{r}v' + (\omega - r^2)v - \frac{m^2}{r^2}v = 0 \quad (33)$$

представляет собой уравнение линейного гармонического квантового осциллятора. Известно, что на полубесконечном промежутке  $0 \leq r < \infty$  задача (33) имеет счетный набор решений  $(\tilde{\omega}_n, \tilde{v}_n(r))$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Собственные числа  $\tilde{\omega}_n$  находятся как  $\tilde{\omega}_n = 4n + 2m + 2$ , то есть образуют эквидистантную последовательность. Соответствующие собственные функции (так называемые моды Гаусса–Лагерра) имеют вид

$$\tilde{v}_n(r) = r^m L_n^{(m)}(r^2) e^{-r^2/2}. \quad (34)$$

В последнем соотношении  $L_n^{(\kappa)}$  —  $n$ -ый обобщенный полином Лагерра, который может быть найден с помощью следующих рекуррентных соотношений [26]:

$$\begin{aligned}L_0^{(\kappa)}(x) &= 1, \quad L_1^{(\kappa)}(x) = -x + \kappa + 1, \\ (n+1)L_{n+1}^{(\kappa)}(x) &= (2n + \kappa + 1 - x)L_n^{(\kappa)}(x) - (n + \kappa)L_{n-1}^{(\kappa)}(x), \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

### 5.2.1. Стационарные моды с нулевым топологическим зарядом

**Случай отталкивающих взаимодействий ( $\sigma = -1$ ).** Используя описанный в разделе 5.1 подход, мы исследовали следующий диапазон значений параметра  $\omega$ :  $1 \leq \omega \leq 12$ . Для проведения расчетов были выбраны значения  $r_\infty = 10$ ,  $r_1 = 1$ .

При каждом фиксированном значении  $\omega$  мы искали решения системы (30), изменяя значения параметров  $c$  и  $C$  от нуля и до значений  $c^*$  и  $C^*$ , при которых, согласно изложенным выше рассуждениям, можно останавливать расчет. Необходимо также рассмотреть значения  $c$  и  $C$ , лежащие внутри интервалов  $(-c^*, 0)$  и  $(-C^*, 0)$  соответственно; это легче всего сделать, используя упомянутую в пункте 5.1 симметрию кривых  $\gamma_-$  и  $\gamma_+$  относительно начала координат. Отметим, что значение  $c^*$  известно заведомо и существует при любом  $\omega$ . Тот факт, что значение  $C^*$  также существует для любого  $\omega$ , не является строго доказанным. Однако для всех значений параметра  $\omega$  из рассмотренного диапазона значение  $C^*$  было найдено. Таким образом можно утверждать, что в рассмотренном диапазоне по  $\omega$  нам удалось численно построить все решения задачи (10)–(13) для данного потенциала и значений  $m$  и  $\sigma$ . Все найденные нами решения показаны на рисунке 3 (графики (a) и (b)) в виде кривых на плоскостях  $\{\omega; c\}$  и  $\{\omega; N\}$ . На данных плоскостях все найденные нами решения образуют набор ветвей, выходящих из точек  $(\tilde{\omega}_n, 0)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , где  $\tilde{\omega}_n$  — собственные числа линейной задачи (33). Здесь и далее для удобства мы будем обозначать такие ветви как  $\Gamma_n$ , где нижний индекс подчеркивает, что данная ветвь появляется в результате бифуркации из точки  $(\tilde{\omega}_n, 0)$ , то есть обладает линейным аналогом. Таким образом, все существующие в рассмотренном диапазоне значений параметра  $\omega$  решения обладают линейным аналогом. Аналогичный в этом смысле результат был получен для стационарных решений одномерного уравнения ГП с гармоническим потенциалом [21].

Используя соотношение (31), мы рассчитали пространственные профили (то есть функции  $v(r)$ ) найденных ВС. Собственная функция  $\tilde{v}_n(r)$  линейной задачи (33) при  $m = 0$  имеет ровно  $n$  нулей. Расчеты показывают, что профили стационарных мод, принадлежащих ветвям  $\Gamma_n$ , имеют столько же нулей, сколько их линейный аналог  $\tilde{v}_n(r)$ , то есть ровно  $n$ . Примерные формы профилей  $v(r)$  стационарных мод, принадлежащих различным семействам, показаны на графиках (a) и (b) рис. 3 в прямоугольных рамках. При каждом фиксированном  $N$  основным состоянием является решение, принадлежащее ветви  $\Gamma_0$ .

**Случай притягивающих взаимодействий ( $\sigma = 1$ ).** Для случая притягивающей нелинейности мы выбрали для рассмотрения диапазон  $-10 \leq \omega \leq 14$ . Для данного случая не было получено утверждения, которое позволило бы ограничить диапазон поиска решений по параметрам  $c$  и  $C$ . Поэтому мы рассмотрели только значения  $c$  и  $C$ , лежащие в некотором заранее выбранном диапазоне. Полученный результат представлен на рисунке 3 (графики (c) и (d)). Как и в одномерном случае [21], все найденные решения обладают линейным аналогом. На плоскости  $\{\omega; N\}$  при удалении от линейного предела (то есть при стремлении  $\omega$  к  $-\infty$ ) кривые  $\Gamma_n$  асимптотически стремятся к некоторым предельным значениям, которые определяются как число частиц (13) локализованных мод уравнения

$$v'' + \frac{1}{r}v' - v + v^3 = 0. \quad (35)$$

Не имеющее нулей локализованное решение уравнения (35) известно как мода Таунса. Оно было численно построено в работе [27]. Среди других локализованных мод уравнения (35) мода Таунса обладает наименьшим числом частиц, которое равно  $N_T \approx 1.86$ . На графике (d) рисунка 3 к значению  $N_T$  стремится кривая  $\Gamma_0$ .

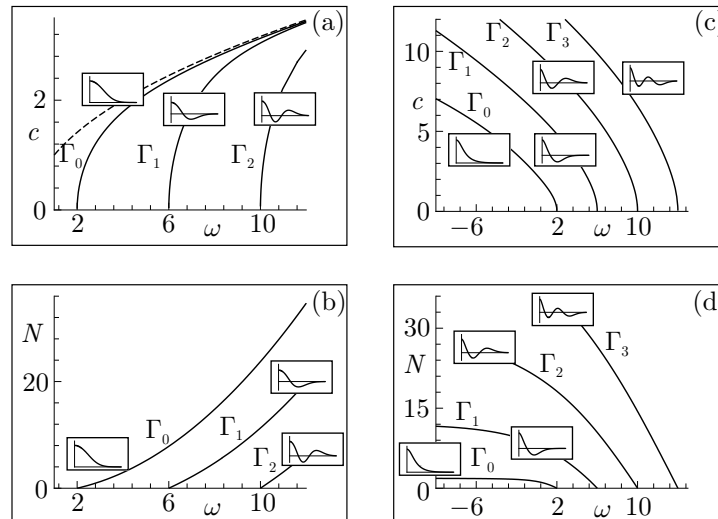


Рис. 3. Семейства стационарных мод в виде кривых на плоскостях  $\{\omega; c\}$  и  $\{\omega; N\}$ . Рассматривается случай гармонического потенциала  $V(r) = r^2$ , нулевого топологического заряда  $m = 0$  и как отталкивающих (графики (a) и (b)), так и притягивающих ((c) и (d)) взаимодействий. В прямоугольных рамках показаны примерные формы решений  $v(r)$ . Для случая отталкивающих взаимодействий на рисунках (a) и (b) представлены все решения задачи (10)–(13), существующие в данном диапазоне по  $\omega$ . На графике (a) пунктирной линией показана зависимость  $c^*(\omega) \equiv \sqrt{\Omega(\omega)}$ .

### 5.2.2. Вихревые структуры с единичным топологическим зарядом

Действуя аналогичным образом, мы рассмотрели также случай  $m = 1$ , для случая как отталкивающих ( $\sigma = -1$ ), так и притягивающих ( $\sigma = 1$ ) взаимодействий между частицами. Полученные результаты представлены на рисунке 4. Для данного случая нам не удалось получить условие, которое позволяло бы остановить процесс расчета, найдя при этом все вихревые структуры рассматриваемого вида. Мы предполагаем, однако, что для случая  $\sigma = -1$  полученная картина (графики (b) и (c)) в данном смысле также является полной.

### 5.3. Результаты расчетов: двухъямный потенциал

При значениях параметров  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  функция

$$V(r) = \alpha r^4 + \beta r^2$$

описывает радиальный двухъямный потенциал. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  можно использовать для того, чтобы изменять глубину ям и расстояние между ними. Уравнение (10) принимает следующий вид:

$$v'' + \frac{1}{r}v' + (\omega - \alpha r^4 - \beta r^2)v - \frac{m^2}{r^2}v + \sigma v^3 = 0. \quad (36)$$

С увеличением  $r$  потенциал  $V(r)$  неограниченно растет. Поэтому линейная задача

$$v'' + \frac{1}{r}v' + (\omega - \alpha r^4 - \beta r^2)v - \frac{m^2}{r^2}v = 0$$

имеет бесконечный набор решений  $(\tilde{\omega}_n, \tilde{v}_n(r))$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , которые не выражаются в явном виде, но могут быть найдены численно с помощью стандартного метода стрельбы.



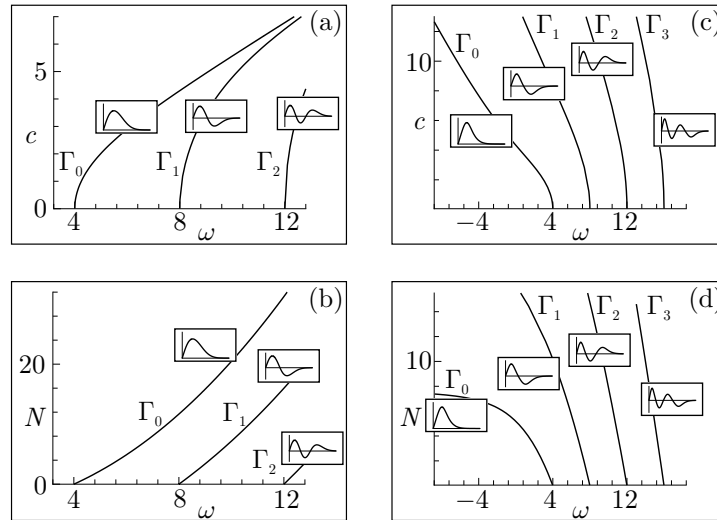


Рис. 4. Семейства ВС в виде кривых на плоскостях  $\{\omega; c\}$  и  $\{\omega; N\}$ . Рассматривается случай гармонического потенциала  $V(r) = r^2$ , единичного топологического заряда  $m = 1$  и как отталкивающих (графики (а) и (б)), так и притягивающих ((с) и (д)) взаимодействий. В прямоугольных рамках показаны примерные формы решений  $v(r)$ .

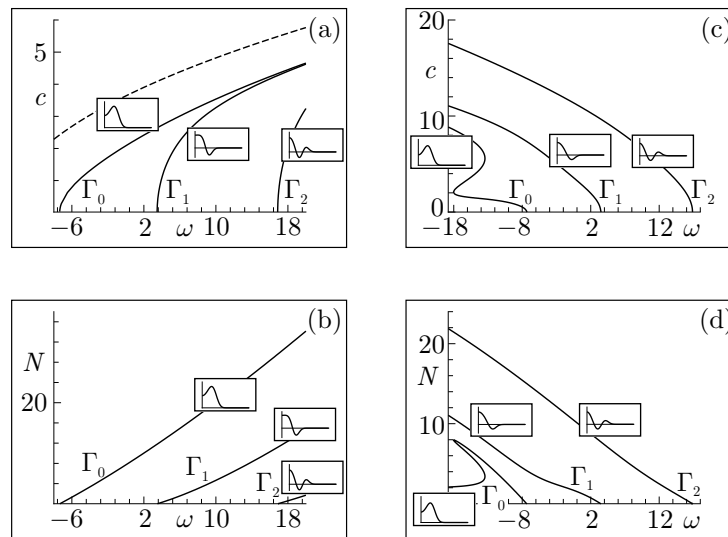


Рис. 5. Семейства стационарных мод в виде кривых на плоскостях  $\{\omega; c\}$  и  $\{\omega; N\}$ . Рассматривается случай двухъямного потенциала вида  $V(r) = 10r^4 - 23r^2$ , нулевого топологического заряда  $m = 0$  и как отталкивающих (графики (а) и (б)), так и притягивающих ((с) и (д)) взаимодействий. Графики организованы тем же образом, что и на рис. 3. Для случая отталкивающих взаимодействий на рисунках (а) и (б) представлены все решения задачи (10)–(13), существующие в данном диапазоне по  $\omega$ .

Мы исследовали уравнение (36) при различных значениях параметров потенциала  $\alpha$  и  $\beta$ , а также для  $m = 0, 1$  и  $\sigma = \pm 1$ . На рис. 5 и 6 приведены результаты, полученные для значений  $\alpha = 10$ ,  $\beta = -23$ ,  $r_\infty = 7$ ,  $r_1 = 1$ . Как и в случае гармонического потенциала, для  $m = 0$  и  $\sigma = -1$  в рассмотренном диапазоне по  $\omega$  были найдены все решения задачи

(10)–(13). В отличие от одномерного случая [21], все решения, которые удалось найти (в том числе, для различных сочетаний параметров  $\alpha$  и  $\beta$ ), обладают линейным аналогом, несмотря на то, что кривые на плоскостях  $\{\omega; c\}$  и  $\{\omega; N\}$  имеют иногда довольно причудливую форму.

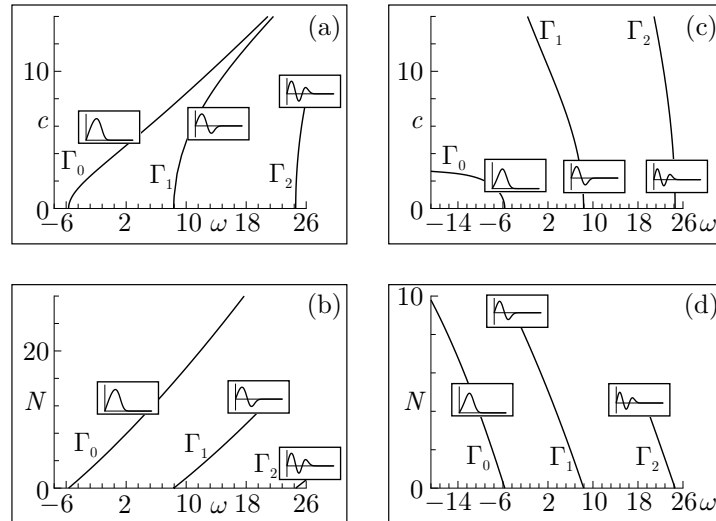


Рис. 6. Семейства вихревых структур в виде кривых на плоскостях  $\{\omega; c\}$  и  $\{\omega; N\}$ . Рассматривается случай двухъямного потенциала вида  $V(r) = 10r^4 - 23r^2$ , единичного топологического заряда  $m = 1$  и как отталкивающих (графики (a) и (b)), так и притягивающих ((c) и (d)) взаимодействий. Графики организованы тем же образом, что и на рис. 4.

## 6. Заключение

В данной работе предложен численный метод для расчета вихревых структур (ВС), возникающих в конденсате Бозе–Эйнштейна и описываемых нелинейным уравнением Шрёдингера с дополнительным потенциалом (уравнением Гросса–Питаевского). В основе метода лежат строгие утверждения, устанавливающие взаимно-однозначное соответствие между особыми классами решений вспомогательной стационарной задачи (10) и множеством действительных чисел. В результате расчет каждой ВС сводится к решению системы двух уравнений относительно пары числовых неизвестных. Такой подход допускает прозрачную визуализацию результатов расчета, когда каждая ВС отмечается точкой  $(\omega_0, c_0)$  на плоскости  $\{\omega; c\}$ , где  $\omega$  и  $c$  — параметры ВС. Изменяя параметр  $\omega$ , на этой плоскости можно получить кривые, наглядно описывающие целые семейства вихревых структур. Вместе с набором дополнительных утверждений предлагаемый подход в некоторых случаях позволяет провести процедуру *доказательных вычислений*, в процессе расчета строго показав, что рассматриваемая задача не допускает существования других ВС, кроме тех, что уже были найдены.

В отличие от одномерного случая (см. работу [21]) все вихревые структуры, которые нам удалось найти, обладают *линейным аналогом*. Это означает, что каждую из найденных структур можно непрерывно деформировать в нулевое решение, не выходя при этом из класса решений уравнения ГП. На языке кривых, возникающих на плоскости  $\{\omega; c\}$ , это

означает, что каждая такая кривая пересекает ось  $s = 0$ . В настоящий момент авторам не известно, существуют ли радиальные ВС без линейного аналога.

## 7. Приложение. Некоторые утверждения, использованные в ходе доказательств

В данном приложении мы приводим некоторые полученные ранее результаты, которые потребовались нам для доказательства утверждений, содержащихся в настоящей работе.

**Теорема 1.** (см. [21, Appendix B]) Рассмотрим уравнение

$$\psi'' - Q(r)\psi + F(\psi) = 0. \quad (37)$$

Пусть для функций  $Q(r)$  и  $F(\psi)$  существуют положительные  $r_0$  и  $\delta$ , такие, что:

$$(Q1) \quad Q(r) \geq \varepsilon > 0 \text{ при } r > r_0,$$

$$(Q2) \quad Q(r) \in C^2(r_0, +\infty),$$

$$(Q3) \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{|Q''(r)|}{Q^{3/2}(r)} dr < \infty,$$

$$(NL1) \quad F(t) \in C^3[-\delta, \delta],$$

$$(NL2) \quad F(0) = F'(0) = 0.$$

Тогда:

- (a) для любого стремящегося к нулю при  $r \rightarrow +\infty$  решения  $\psi(r)$  уравнения (37) существует число  $C$ , такое, что  $\psi(r)$  имеет асимптотику

$$\psi(r) = Q^{-1/4}(r) \cdot \exp \left\{ - \int_{r_0}^r \sqrt{Q(t)} dt \right\} (C + o(1)), \quad (38)$$

$$\psi'(r) = -Q^{1/4}(r) \cdot \exp \left\{ - \int_{r_0}^r \sqrt{Q(t)} dt \right\} (C + o(1)); \quad (39)$$

- (b) наоборот, для любого числа  $C$  существует единственное стремящееся к нулю при  $r \rightarrow +\infty$  решение  $\psi(r)$  уравнения (37), имеющее асимптотику (38)–(39).

**Лемма сравнения.** (см. [21, Appendix C]) Пусть функции  $x(t)$  и  $y(t)$  определены на отрезке  $[a; b]$  и удовлетворяют на этом отрезке уравнениям

$$x_{tt} - f(t, x) = 0,$$

$$y_{tt} - g(t, y) = 0$$

соответственно. Пусть  $A \leq x(t), y(t) \leq B$ , и функции  $f(t, \xi)$  и  $g(t, \xi)$  определены на  $[a; b] \times [A; B]$ . Пусть также выполняются следующие условия:

- (i)  $f(t, \xi)$  монотонно не убывает как функция  $\xi$ ,  $\xi \in [A; B]$ ;
- (ii)  $f(t, \xi)$  липшиц-непрерывна как функция  $\xi$ ,  $\xi \in [A; B]$ ;
- (iii)  $f(t, \xi) \leq g(t, \xi)$  для всех  $(t, \xi) \in [a; b] \times [A; B]$ .

Тогда если  $x(a) \leq y(a)$  и  $x_t(a) \leq y_t(a)$ , то  $x(t) \leq y(t)$  и  $x_t(t) \leq y_t(t)$  для любого  $t \in [a; b]$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма сравнения также остается справедливой, если  $A$ ,  $B$  или  $b$  являются бесконечными. При этом в условии (ii) необходимо заменить требование липшицевости функции  $f(t, \xi)$  на требование локальной липшицевости этой функции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для доказательства некоторых утверждений мы используем следующее обобщение леммы сравнения. Если выполняются условия (i)–(iii) и вдобавок  $x(b) \leq y(b)$  и  $x_t(b) \geq y_t(b)$ , то  $x(t) \leq y(t)$  и  $x_t(t) \geq y_t(t)$  для любого  $t \in [a; b]$ . Разумеется, при этом предполагается, что  $b$  конечно, а  $a$  может быть бесконечно. Доказательство данного утверждения легко провести с помощью замены  $\tau = -t$ .

## Список литературы

- [1] Berge L. Self-Focusing Dynamics of Nonlinear Waves in Media with Parabolic-Type Inhomogeneities // *Phys. Plasmas*, 1997, vol. 4, no. 5, pp. 1227–1237.
- [2] Kunze M., Küpper T., Mezentsev V. K., Shapiro E. G., and Turitsyn S. Nonlinear Solitary Waves with Gaussian Tails // *Phys. D*, 1999, vol. 128, no. 2–4, pp. 273–295.
- [3] Anderson M. H., Ensher J. R., Matthews M. R., Wieman C. E., and Cornell E. A. Observation of Bose–Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor // *Science*, 1995, vol. 269, pp. 198–201.
- [4] Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L. P., and Stringari S. Theory of Bose–Einstein Condensation in Trapped Gases // *Rev. Modern Phys.*, 1999, vol. 71, no. 3, pp. 463–512.
- [5] Питаевский Л. П. Конденсация Бозе–Эйнштейна в магнитных ловушках: Введение в теорию // *УФН*, 1998, т. 168, № 6, с. 641–653.
- [6] Питаевский Л. П. Конденсаты Бозе–Эйнштейна в поле лазерного излучения // *УФН*, 2006, т. 176, № 4, с. 345–364.
- [7] Edwards M. and Burnett K. Numerical Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation for Small Samples of Trapped Neutral Atoms // *Phys. Rev. A*, 1995, vol. 51, no. 2, pp. 1382–1386.
- [8] Ruprecht P. A., Holland M. J., Burnett K., and Edwards M. Time-Dependent Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation for Bose-Condensed Trapped Neutral Atoms // *Phys. Rev. A*, 1995, vol. 51, no. 6, pp. 4704–4711.
- [9] Dalfovo F. and Stringari S. Bosons in Anisotropic Trap: Ground State and Vortices // *Phys. Rev. A*, 1996, vol. 53, no. 4, pp. 2477–2485.
- [10] Lieb E. H., Seiringer R., and Yngvason J. Bosons in a Trap: A Rigorous Derivation of the Gross–Pitaevskii Energy Functional // *Phys. Rev. A*, 2000, vol. 61, pp. 043602.
- [11] García-Ripoll J. J. and Pérez-García V. M. Optimizing Schrödinger Functionals Using Sobolev Gradients: Applications to Quantum Mechanics and Nonlinear Optics // *SIAM J. Sci. Comput.*, 2001, vol. 23, no. 4, pp. 239–254.
- [12] Bao W. and Tang W. Ground-State Solution of Bose–Einstein Condensate by Directly Minimizing the Energy Functional // *J. Comput. Phys.*, 2003, vol. 187, pp. 230–254.
- [13] Yukalov V. I., Yukalova E. P., and Bagnato V. S. Nonlinear Coherent Modes of Trapped Bose–Einstein Condensates // *Phys. Rev. A*, 2002, vol. 66, pp. 043602.
- [14] Yukalov V. I. Nonequilibrium Bose Systems and Nonground-State Bose–Einstein Condensates // *Laser Phys. Lett.*, 2006, vol. 3, no. 8, pp. 406–414.
- [15] Weiss C. and Teichmann N. Generation of Mesoscopic Superpositions of a Binary Bose–Einstein Condensate in a Slightly Asymmetric Double Well // *Laser Phys. Lett.*, 2007, vol. 4, no. 12, pp. 895–899.
- [16] Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Под. ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана. М.: Мир, 1974.
- [17] Mihalache D., Mazilu D., Malomed B. A., and Lederer F. Vortex Stability in Nearly-Two-Dimensional Bose–Einstein Condensates with Attraction // *Phys. Rev. A*, 2006, vol. 73, pp. 043615.

- [18] Herring G., Carr L. D., Carretero-González R., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J. Radially Symmetric Nonlinear States of Harmonically Trapped Bose–Einstein Condensates // *Phys. Rev. A*, 2008, vol. 77, pp. 023625.
- [19] D’Agosta R., Malomed B. A., and Presilla C. Stationary States of Bose–Einstein Condensates in Single- and Multi-Well Trapping Potentials // *Laser Phys.*, 2002, vol. 12, no. 1, pp. 37–42.
- [20] D’Agosta R. and Presilla C. States without a Linear Counterpart in Bose–Einstein Condensates // *Phys. Rev. A*, 2002, vol. 65, pp. 043609.
- [21] Alfimov G. L. and Zezyulin D. A. Nonlinear Modes for the Gross–Pitaevskii Equation — a Demonstrative Computation Approach // *Nonlinearity*, 2007, vol. 20, pp. 2075–2092.
- [22] Zezyulin D. A., Alfimov G. L., Konotop V. V., and Pérez-García V. M. Stability of Excited States of a Bose–Einstein Condensate in an Anharmonic Trap // *Phys. Rev. A*, 2008, vol. 78, pp. 013606.
- [23] Zezyulin D. A., Alfimov G. L., Konotop V. V., and Pérez-García V. M. Control of Nonlinear Modes by Scattering-Length Management in Bose–Einstein Condensates // *Phys. Rev. A*, 2007, vol. 76, pp. 013621.
- [24] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [25] Жидков Е. П., Шириков В. П. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Журн. вычислит. матем. и матем. физ.*, 1964, т. 4, № 5, с. 804–816.
- [26] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: Пер. с англ. / Под. ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
- [27] Chiao R. Y., Garmire E., and Townes C. H. Self-Trapping of Optical Beams // *Phys. Rev. Lett.*, 1964, vol. 13, no. 15, pp. 479–482.