

# Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний

В. С. Анищенко\*, С. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, А. В. Феоктистов

Международный НИИ нелинейной динамики  
Саратовского государственного университета  
410026, Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83

\*wadim@chaos.ssu.runnet.ru

*Получено 10 марта 2009 г.*

Исследуется эффект синхронизации системы двух связанных осцилляторов Ван дер Поля внешним гармоническим сигналом. Проводится бифуркационный анализ явления на основе фазового приближения. Установлены бифуркационные механизмы полной и частичной синхронизации. Описан новый тип бифуркации: седло-узловая бифуркация инвариантных кривых, которая отвечает седло-узловой бифуркации инвариантных торов в полной системе дифференциальных уравнений исследуемой динамической системы. Представлены результаты радиофизического эксперимента, иллюстрирующие бифуркационный механизм, обнаруженный в численном эксперименте. В физическом эксперименте рассмотрена синхронизация в окрестности резонансов на торе с числами вращения  $1 : 1$  и  $1 : 3$ .

Ключевые слова: предельный цикл, тор, седло-узловая бифуркация, синхронизация

V. S. Anishchenko, S. V. Astakhov, T. E. Vadivasova, and A. V. Feoktistov  
Numerical and experimental study of external synchronization of  
two-frequency oscillations

The effect of synchronization has been studied in a system of two coupled Van der Pol oscillators under external harmonic force. The bifurcation analysis has been carried out using the phase approach. The mechanisms of complete and partial synchronization have been established. The main type of bifurcation described in the paper is the saddle-node bifurcation of invariant curves that corresponds to the saddle-node bifurcation of two-dimensional tori in the complete system of differential equations for the dynamical system under study. We illustrate the bifurcational mechanisms obtained from numerical experiment by the results of physical experiment. The synchronization phenomenon in the vicinity of resonances on a torus with winding numbers  $1 : 1$  and  $1 : 3$  is considered in the physical experiment.

Keywords: limit cycle, torus, saddle-node bifurcation, synchronization

Mathematical Subject Classifications: 39Axx, 93D05

## Введение

Синхронизация как фундаментальное нелинейное явление, детально исследованное в рамках классической теории колебаний [1, 2, 3], продолжает оставаться актуальной проблемой междисциплинарного характера [4, 5, 6, 7]. В классической теории синхронизации периодических автоколебаний было установлено, что при определенных условиях эффект синхронизации может быть исследован на основе фазового приближения. На основе фазового приближения развита теория фазовой синхронизации, успешно используемая в настоящее время в нелинейной динамике [4, 7, 8]. Математические модели фазовой синхронизации намного проще соответствующих им дифференциальных систем и позволяют на качественном уровне описывать и демонстрировать эффекты синхронизации не только регулярных, но и хаотических и даже стохастических автоколебаний [9, 10, 7]. В настоящей работе рассмотрены эффекты синхронизации квазипериодических колебаний с двумя частотами. В основу положены результаты работ [11, 12, 13, 14], в которых установлены основные бифуркационные особенности синхронизации квазипериодических колебаний применительно к дифференциальным моделям генераторов квазипериодических колебаний [11, 12]. Мы предлагаем и исследуем относительно простую модель, описывающую фазовую динамику связанных генераторов Ван дер Поля при внешнем гармоническом воздействии вблизи основного резонанса 1 : 1. На основании аналитического и численного исследования динамики фазовой модели установлены бифуркационные механизмы внешней частичной и полной синхронизации двухчастотных автоколебаний, которые подтверждены результатами радиофизического эксперимента.

Полученные результаты качественно соответствуют основным результатам исследования динамики дифференциальной системы, представленным в работах [13, 14]. Введенная в работе фазовая модель неавтономных двухчастотных колебаний может быть использована при исследовании эффектов фазовой синхронизации многочастотных квазипериодических колебаний с количеством базовых частот  $N > 2$  [15].

## 1. Формулировка укороченных уравнений системы

Рассмотрим систему двух симметрично связанных генераторов Ван дер Поля при условии, что внешний гармонический сигнал подается на первый генератор (рис. 1).

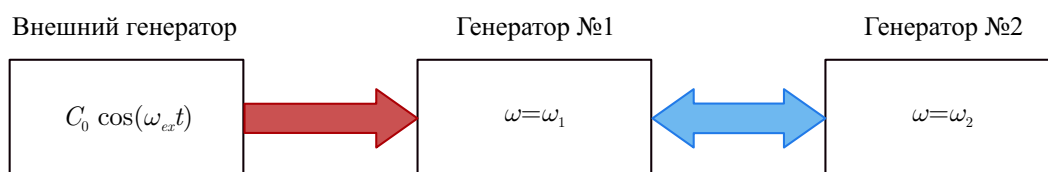


Рис. 1. Блок-схема исследуемой системы.

Дифференциальные уравнения системы (рис. 1), исследованные в работах [13, 14], имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= (\varepsilon - x_1^2) \dot{x}_1 + \gamma (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + C_0 \cos(\omega_{ex} t), \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= (\varepsilon - x_2^2) \dot{x}_2 + \gamma (\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{aligned} \quad (1.1)$$

В уравнениях (1.1)  $\varepsilon$  — параметр возбуждения, одинаковый для первого и второго генераторов в отсутствие связи,  $F(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$  — функция связи,  $\gamma$  — коэффициент связи,  $C_0$  и  $\omega_{ex}$  — амплитуда и частота внешнего сигнала.

Как видно из (1.1), взаимодействие генераторов осуществляется через производные  $\dot{x}_{1,2}$ , что в эксперименте соответствует резистивной связи.

Будем искать решение уравнений (1.1) в виде  $x_{1,2} = a_{1,2}(t) \cos \Psi_{1,2}(t)$ , где  $\Psi_{1,2}(t) = \omega_{ex}t + \varphi_{1,2}(t)$ , полагая (в полном соответствии с классическим описанием динамики генератора Ван дер Поля в квазипериодическом приближении)  $a_{1,2}(t)$  и  $\varphi_{1,2}(t)$  медленно меняющимися во времени функциями. Это означает, что  $\dot{a}_{1,2}(t) \ll a_{1,2}(t)$  и  $\dot{\varphi}_{1,2}(t) \ll \varphi_{1,2}(t)$ .

Перепишем уравнения (1.1) в виде динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = (\varepsilon - x_1^2) y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma (y_2 - y_1), \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = (\varepsilon - x_2^2) y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma (y_1 - y_2) \end{cases} \quad (1.2)$$

и, в соответствии с вышесказанным, введем замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = a_1(t) \cos(\omega_{ex}t + \varphi_1(t)), \\ y_1 = \dot{a}_1(t) \cos(\omega_{ex}t + \varphi_1(t)) - \\ - a_1(t) \dot{\varphi}_1(t) \sin(\omega_{ex}t + \varphi_1(t)) - \\ - a_1(t) \omega_{ex} \sin(\omega_{ex}t + \varphi_1(t)), \\ x_2 = a_2(t) \cos(\omega_{ex}t + \varphi_2(t)), \\ y_2 = \dot{a}_2(t) \cos(\omega_{ex}t + \varphi_2(t)) - \\ - a_2(t) \dot{\varphi}_2(t) \sin(\omega_{ex}t + \varphi_2(t)) - \\ - a_2(t) \omega_{ex} \sin(\omega_{ex}t + \varphi_2(t)). \end{cases} \quad (1.3)$$

Используя стандартное условие

$$\begin{aligned} & \dot{a}_{1,2} \cos(\omega_{ex}t + \varphi_{1,2}(t)) - \\ & - a_{1,2}(t) \dot{\varphi}_{1,2}(t) \sin(\omega_{ex}t + \varphi_{1,2}(t)) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

и произведя усреднение за период внешней силы, получим уравнения первого приближения для амплитуд колебаний  $a_{1,2}(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= a_1 \left( \frac{\varepsilon}{2} - \frac{a_1^2}{8} \right) + \frac{\gamma}{2} [a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - a_1] - \\ & - \frac{C_0}{2\omega_{ex}} \sin \varphi_1, \\ \dot{a}_2 &= a_2 \left( \frac{\varepsilon}{2} - \frac{a_2^2}{8} \right) + \frac{\gamma}{2} [a_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - a_2] \end{aligned} \quad (1.5)$$

и фаз колебаний в первом и втором генераторах  $\varphi_{1,2}(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \Delta_1 + \frac{\gamma}{2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{\omega_{ex}} \cos \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 &= \Delta_2 - \frac{\gamma}{2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $\Delta_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}^2 - \omega_{ex}^2}{2\omega_{ex}}$ ,  $C = \frac{C_0}{2a_1}$ .

Будем предполагать, что расстройка базовых частот генераторов  $\omega_2 - \omega_1 = \delta \ll 1$ , а также близость частоты внешнего воздействия к значениям базовых частот  $\omega_{1,2}$ , т.е.  $\Delta_{1,2} \simeq \omega_{1,2} - \omega_{ex}$ . В этом приближении справедливо

$$\Delta_2 \simeq \Delta_1 + \delta. \quad (1.7)$$

Из уравнений для амплитуд (1.5) следует, что при малой связи  $\gamma \ll 1$  и малой амплитуде воздействия  $C_0 \ll 1$  можно считать, что

$$a_1 \simeq a_2 \simeq 2\sqrt{\varepsilon}. \quad (1.8)$$

Амплитуды предельных циклов в генераторах будут постоянными и равными друг другу. В этом приближении динамика системы может быть исследована на основе уравнений для фаз колебаний  $\varphi_{1,2}(t)$  (1.6):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \Delta_1 + g \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{\omega_1 - \Delta_1} \cos \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 &= \Delta_1 + \delta - g \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $g = \frac{\gamma}{2}$ ,  $C = \frac{C_0}{2\omega_{ex}\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $\Delta_1 = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_{ex}} \simeq \omega_1 - \omega_{ex}$ ,  $\delta = \omega_2 - \omega_1$ . Далее везде полагаем  $\omega_1 = 1$ .

Уравнения (1.9) описывают фазовую динамику исходной системы (1.1) и дают возможность бифуркационного анализа эффектов фазовой синхронизации при вариации амплитуды  $C$  и частоты  $\omega_{ex}$  внешней силы для выбранных значений связи  $g$  и расстройки генераторов по частотам  $\delta$ .

## 2. Бифуркации состояния равновесия

Координаты состояния равновесия системы (1.9) определяются из условий  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$ , т. е. из уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_1 + g \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{1 - \Delta_1} \cos \varphi_1, \\ 0 &= \Delta_1 + \delta - g \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Условия существования действительных решений имеют вид

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta_1 + \delta}{g} \right| &\leq 1, \\ \left| \frac{(1 - \Delta_1)(2\Delta_1 + \delta)}{C} \right| &\leq 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

При этих условиях уравнения (2.10) имеют четыре решения, которым отвечают следующие четыре пары координат неподвижных точек:

$$\begin{cases} \varphi_1^{(1)} = \arccos\left(\frac{(1 - \Delta_1)(2\Delta_1 + \delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)} + \arcsin\left(\frac{\Delta_1 + \delta}{g}\right), \\ \varphi_1^{(2)} = -\arccos\left(\frac{(1 - \Delta_1)(2\Delta_1 + \delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(2)} = \varphi_1^{(2)} + \arcsin\left(\frac{\Delta_1 + \delta}{g}\right), \\ \varphi_1^{(3)} = \arccos\left(\frac{(1 - \Delta_1)(2\Delta_1 + \delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(3)} = \varphi_1^{(3)} - \arcsin\left(\frac{\Delta_1 + \delta}{g}\right) + \pi, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \varphi_1^{(4)} = -\arccos\left(\frac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(4)} = \varphi_1^{(4)} - \arcsin\left(\frac{\Delta_1+\delta}{g}\right) + \pi. \end{cases}$$

Система (1.9) характеризуется четырьмя состояниями равновесия, устойчивость и бифуркации которых необходимо исследовать. Решение характеристического уравнения матрицы линеаризации системы (1.9) дает следующие собственные значения для состояний равновесия:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} & \left\{ - \left[ 2g \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{1-\Delta_1} \sin \varphi_1 \right] \pm \right. \\ & \pm \left[ \left[ 2g \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{1-\Delta_1} \sin \varphi_1 \right]^2 + \right. \\ & \left. \left. + 4g \frac{C}{1-\Delta_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \sin \varphi_1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма системы (1.9).

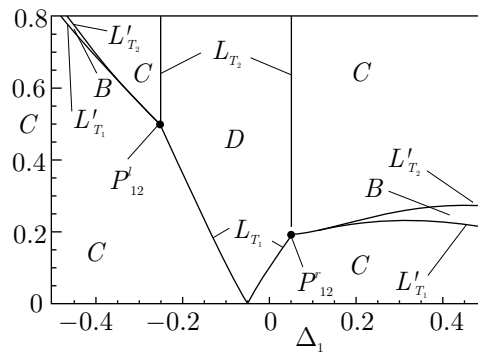


Рис. 2. Линии бифуркаций коразмерности 1 системы (1.9) на плоскости параметров  $(\Delta_1, C)$  при фиксированных значениях  $g = 0.15, \delta = 0.1$ .  $L_{T_1}$  — линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия  $\varphi^{(1)} \leftrightarrow \varphi^{(2)}$  и  $\varphi^{(3)} \leftrightarrow \varphi^{(4)}$ ;  $L_{T_2}$  — линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия  $\varphi^{(1)} \leftrightarrow \varphi^{(3)}$  и  $\varphi^{(2)} \leftrightarrow \varphi^{(4)}$ ;  $L'_{T_1}$  и  $L'_{T_2}$  — линии касательных бифуркаций устойчивых и седловых инвариантных замкнутых кривых.

В области  $D$ , ограниченной бифуркационными линиями  $L_{T_1}$  и  $L_{T_2}$ , существует 4 состояния равновесия, из которых одно является устойчивым узлом, два — седла и одно — неустойчивый узел (репеллер). При выходе из области  $D$  с пересечением линий  $L_{T_1}$  и  $L_{T_2}$  имеют место седло-узловые бифуркации состояний равновесия. Обсудим это более детально. На рис. 3 представлены фазовые портреты состояний равновесия на  $2\pi$ -периодической фазовой плоскости координат  $\varphi_1, \varphi_2$  до пересечения линий  $L_{T_1}$  (рис. 3а) и на бифуркационной линии  $L_{T_1}$  (рис. 3б). Как видно из рис. 3б, на линии  $L_{T_1}$  состояния равновесия попарно сливаются в негрубые состояния равновесия типа седло-узел и затем исчезают. В момент бифуркации (на линии  $L_{T_1}$ ) собственные значения соответствующих пар неподвижных точек  $\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}$  и  $\lambda_2^{(3)}, \lambda_2^{(4)}$  обращаются в нуль, свидетельствуя о седло-узловой бифуркации.

Качественно эквивалентная картина реализуется при пересечении бифуркационных линий  $L_{T_2}$ , что иллюстрирует рис. 4. Отличия рис. 3 и рис. 4 в том, что в первом случае



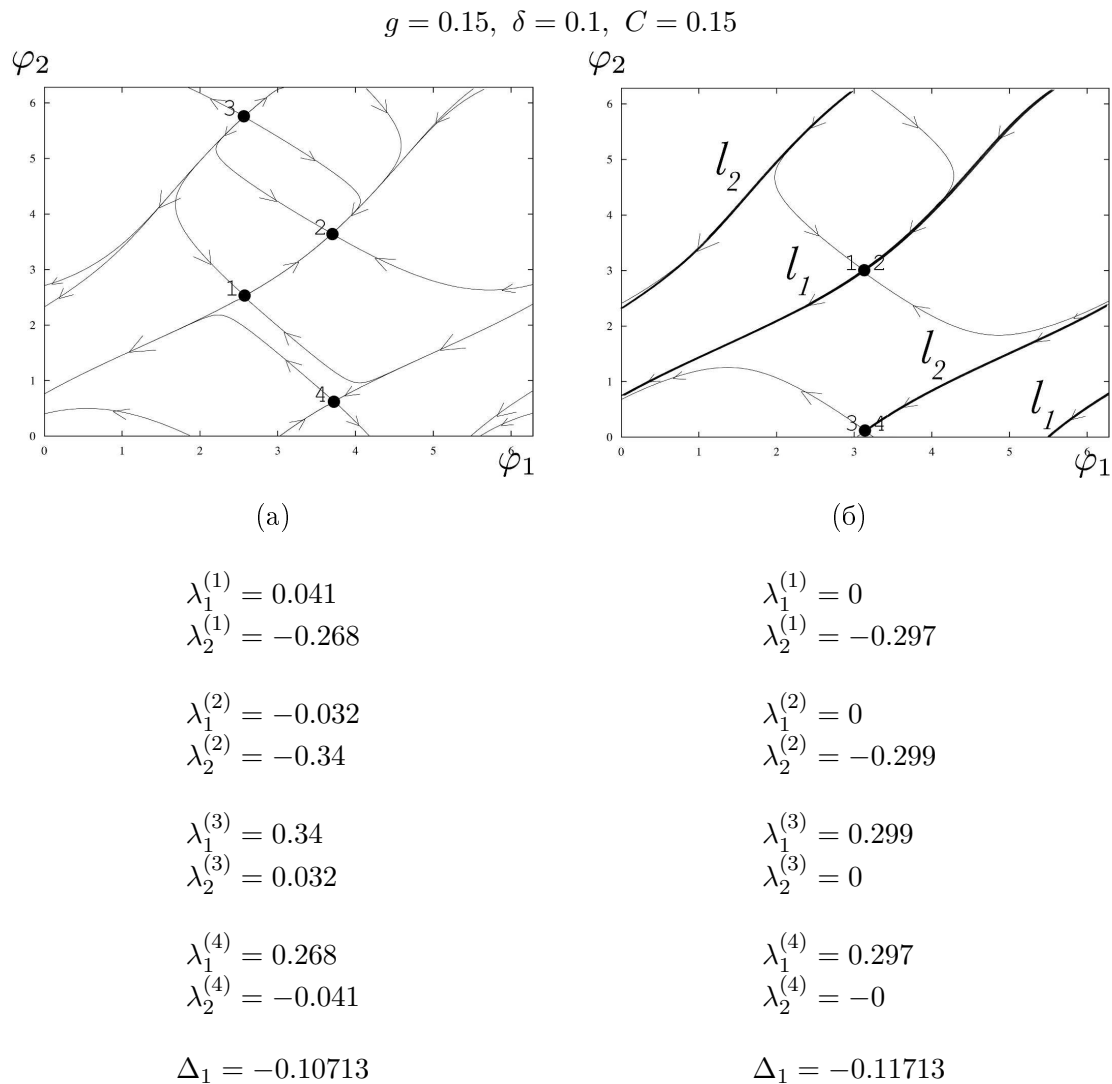


Рис. 3. Седло-узловые бифуркации состояний равновесия при пересечении кривой  $L_{T_1}$  на плоскости параметров (рис. 2): (а) — состояния равновесия и их инвариантные многообразия до бифуркации; (б) — неглубокое состояние «седло-узел» в момент бифуркации;  $\lambda_i^{(j)}$  —  $i$ -е собственное значение  $j$ -го состояния равновесия.

седло-узловая бифуркация реализуется для точек 1, 2 и 3, 4, а во втором — для точек 3, 1 и 4, 2.

Как видно из рис. 3, 4, в результате седло-узловых бифуркаций состояния равновесия исчезают и вне области  $D$  (в областях  $C$ ) рождаются соответствующие пары устойчивых ( $l_1$ ) и неустойчивых ( $l_2$ ) инвариантных кривых.

С точки зрения полной системы уравнений (1.1) область  $D$  на рис. 2, в которой существует одна устойчивая неподвижная точка, отвечает устойчивому предельному циклу режима полной синхронизации. При этом обе частоты генераторов  $\omega_1$  и  $\omega_2$  захвачены сигналом внешнего воздействия и выполняется равенство  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{ex}$ . При выходе из области  $D$  возникают биения, т. е. двухчастотные колебания, образом которых является устойчивая инвариантная кривая  $l_1$ .

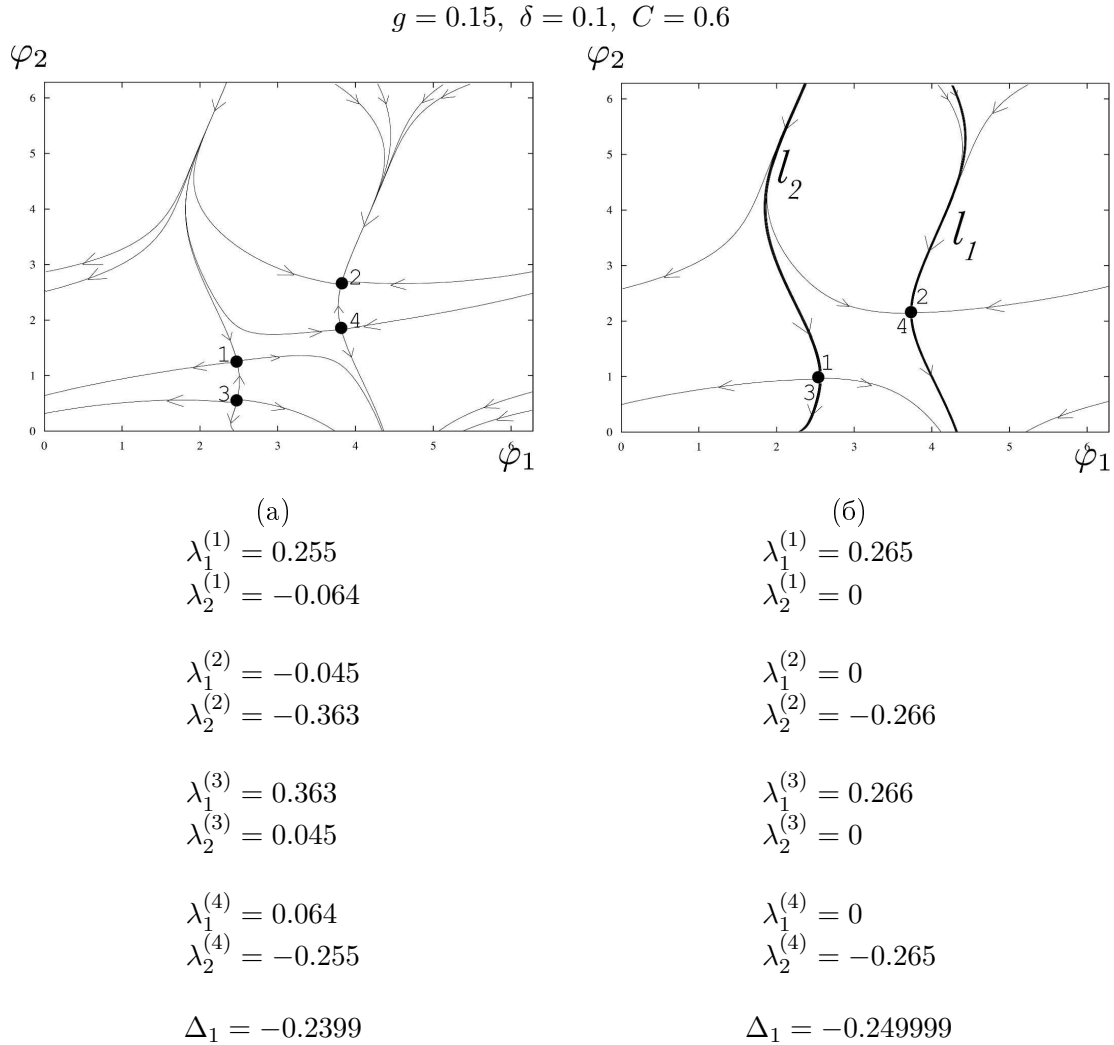


Рис. 4. Седло-узловые бифуркации состояний равновесия при пересечении кривой  $L_{T_2}$  на плоскости параметров (рис. 2): (а) — состояния равновесия и их инвариантные многообразия до бифуркации; (б) — негрубое состояние «седло-узел» в момент бифуркации;  $\lambda_i^{(j)}$  —  $i$ -е собственное значение  $j$ -го состояния равновесия.

### 3. Бифуркации инвариантных замкнутых кривых

Бифуркации состояний равновесия при выходе из области  $D$  в область  $C$  исследованы аналитически с использованием выражений (2.12) и (2.13). Для анализа бифуркаций инвариантных кривых  $l_1, l_2$  применим метод численного моделирования. Результаты расчетов представлены на рис. 5 (для инвариантных кривых рис. 3б).

Если двигаться в пространстве параметров диаграммы рис. 2 из области  $C$  в область  $B$ , то наблюдается следующая картина. Инвариантные кривые  $l_1$  и  $l_2$  приближаются друг к другу, на бифуркационных линиях  $L'_{T_1}$  они сливаются в единую седло-узловую инвариантную кривую, а с пересечением линии  $L'_{T_1}$  кривые  $l_{1,2}$  исчезают<sup>1</sup>. После точки бифур-

<sup>1</sup>Экспериментально показано, что эффект касания инвариантных кривых в бифуркационной точке осуществляется одновременно по всей длине инвариантных кривых  $l_1$  и  $l_2$ .



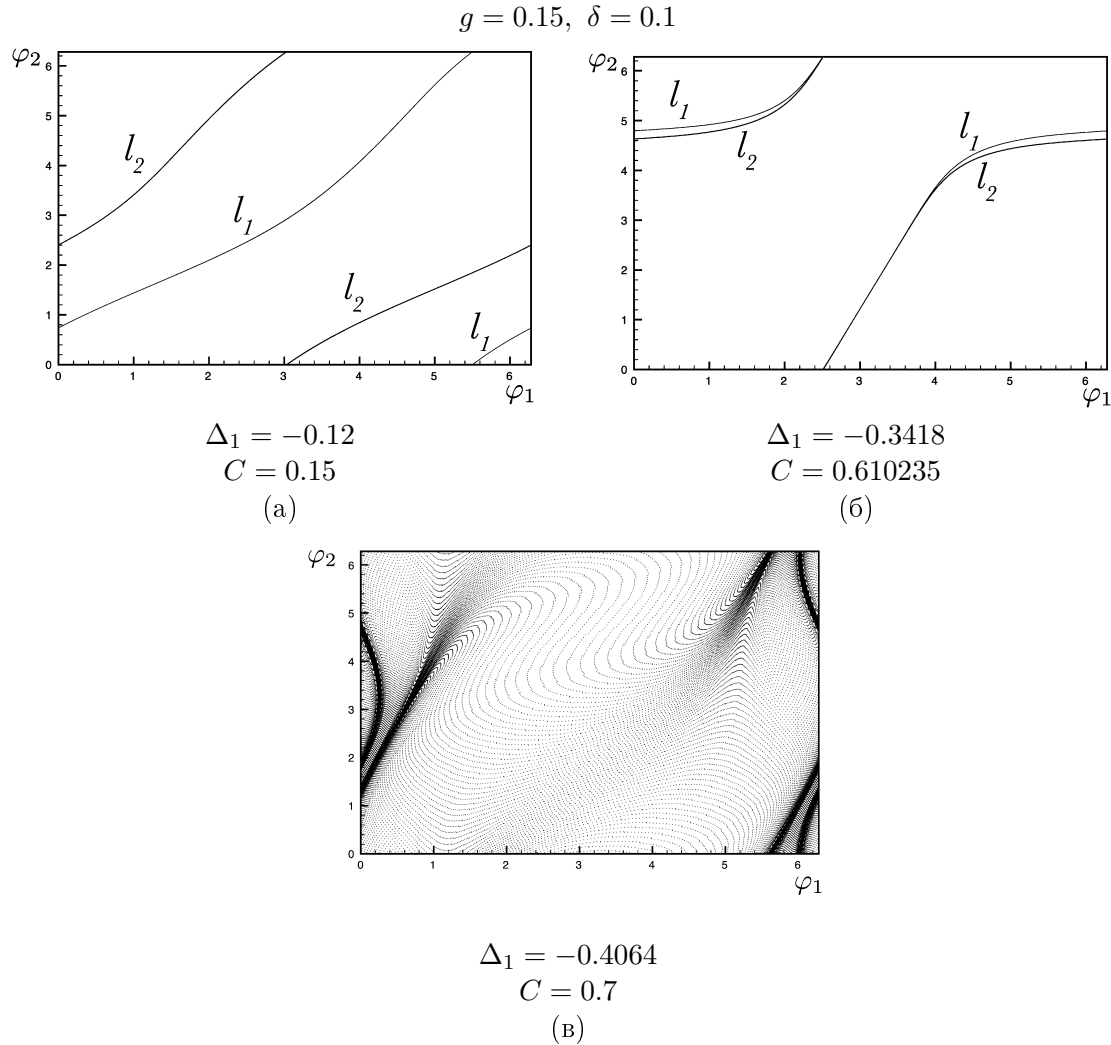


Рис. 5. Трансформации фазового портрета в результате седло-узловой бифуркации инвариантных кривых (переход из области  $C$  в область  $B$  диаграммы рис. 2).

кации в областях  $B$  траектории всюду плотно покрывают всю фазовую плоскость, что иллюстрирует рис. 5в. Таким образом, имеет место бифуркация, которую можно называть седло-узловой бифуркацией инвариантных замкнутых кривых по аналогии с седло-узловой бифуркацией состояний равновесия. Для инвариантных кривых рис. 4б аналогичная бифуркация реализуется при пересечении линий  $L'_{T_2}$  из областей  $C$  в область  $B$ . С точки зрения динамики исходной дифференциальной системы (1.1), описанной бифуркации отвечает переход от режима двухчастотных колебаний к режиму трехчастотных колебаний, когда все три частоты системы рационально не связаны ( $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_{ex}$ ) [14].

Седло-узловую бифуркацию инвариантных кривых удобно иллюстрировать следующим образом. Введем определение средней частоты фазовых осцилляторов (1.9) [15]:

$$\langle \omega_{1,2} \rangle = \langle \dot{\varphi}_{1,2} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\varphi}_{1,2}(t) dt. \quad (3.14)$$

Используя систему уравнений (1.9), произведем расчет зависимости средних частот  $\langle \omega_{1,2} \rangle$  от параметров. Зафиксируем значения параметров  $C = 0.25$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $g = 0.15$  и будем



двигаться по плоскости бифуркационной диаграммы рис. 2, изменяя параметр  $\Delta_1$ . С увеличением  $\Delta_1$  мы последовательно пересечем области  $D$ ,  $C$  и  $B$  бифуркационной диаграммы рис. 2. Результаты представлены на рис. 6.

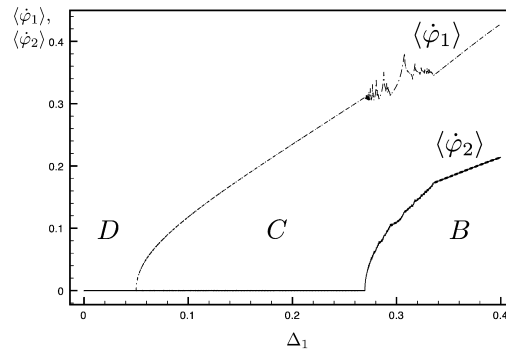


Рис. 6. Зависимости средних частот  $\langle \omega_{1,2} \rangle$  от параметра  $\Delta_1$ , рассчитанные по уравнениям (1.9) при значениях  $C = 0.25$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $g = 0.15$ .

В области  $D$  ( $\Delta_1 \leq 0.05$ ) имеем  $\langle \omega_1 \rangle = \langle \omega_2 \rangle = 0$ , что соответствует устойчивой неподвижной точке в области синхронизации  $D$ . С пересечением линии  $L_{T_2}$  (переход из области  $D$  в область  $C$ ) имеет место бифуркация рождения инвариантных кривых  $l_1$  и  $l_2$ . На рис. 6 этой бифуркации отвечает появление отличной от нуля частоты  $\langle \omega_1 \rangle \neq 0$ . При этом другая частота  $\langle \omega_2 \rangle = 0$ . Далее, при пересечении бифуркационной линии  $L'_{T_2}$  (переход в область  $B$ ), имеет место седло-узловая бифуркация инвариантных кривых  $l_1$  и  $l_2$ , в результате которой рождается двумерный тор. На рис. 6 этой бифуркации отвечает появление отличной от нуля второй частоты  $\langle \omega_2 \rangle$  при  $\Delta_1 = 0.27$ . Таким образом, в области  $B$  диаграммы рис. 2 имеют место колебания с двумя независимыми частотами  $\langle \omega_1 \rangle \neq 0$  и  $\langle \omega_2 \rangle \neq 0$ , которые возникают в результате седло-узловой бифуркации инвариантных кривых  $l_1$ ,  $l_2$ .

Отметим важный результат. Существование в системе (1.9) четырех состояний равновесия является следствием того, что система (1.9) описывает фазовую динамику двух взаимодействующих осцилляторов (1.1). Попарное слияние неподвижных точек 1, 2 и 3, 4 (рис. 3) в результате седло-узловой бифуркации порождает две инвариантные замкнутые кривые (устойчивую  $l_1$  и неустойчивую  $l_2$  соответственно). В результате становится возможной седло-узловая бифуркация инвариантных кривых, представляющая собой следующий по уровню сложности тип бифуркации по сравнению с классической седло-узловой бифуркацией состояний равновесия.

#### 4. Радиофизический эксперимент

Проведем экспериментальное исследование синхронизации двухчастотных колебаний внешним гармоническим сигналом на примере системы двух связанных радиофизических генераторов низкочастотного диапазона в окрестности резонансов  $1 : 1$  и  $1 : 3$ . Результаты сравним с численными, полученными на основе фазового приближения и для полных уравнений системы.

Функциональная схема экспериментальной установки изображена на рис. 7. Генератор типа Ван дер Поля, имеющий собственную частоту автоколебаний  $f_1$ , может быть соединен с аналогичным генератором, имеющим частоту  $f_2$ , близкую, но отличающуюся от  $f_1$ , или с генератором, имеющим частоту  $f_3$ , близкую к утроенному значению  $f_1$ . На первый гене-

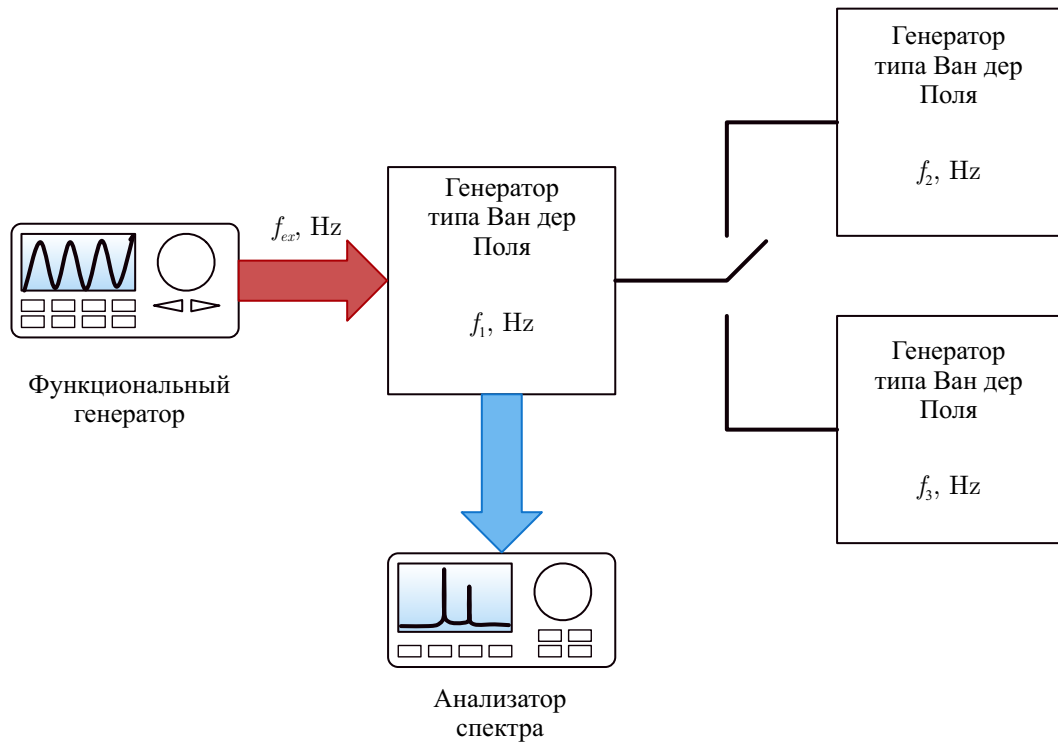


Рис. 7. Функциональная схема экспериментальной установки.

ратор подается гармоническое воздействие на некоторой частоте  $f_{ex}$ , сигнал с первого генератора подается на вход спектроанализатора. Пара связанных генераторов типа Ван дер Поля генерируют автоколебания, образом которых в фазовом пространстве системы является двумерный тор или, в случае рационального соотношения частот  $f_1$  и  $f_{2,3}$ , резонансный предельный цикл, лежащий на двумерном торе. Экспериментальная установка позволяет исследовать синхронизацию резонансного предельного цикла в окрестности резонанса 1 : 1 (в случае соединения генераторов с собственными частотами  $f_1$  и  $f_2$ ) и в окрестности резонанса 1 : 3 (в случае соединения генераторов с собственными частотами  $f_1$  и  $f_3$ ), то есть исследовать синхронизацию на третьей гармонике. Отметим, что уравнения фазового приближения не позволяют оценивать эффекты в окрестности резонанса 1 : 3 в силу большой расстройки частот генераторов.

Принципиальная схема системы связанных генераторов Ван дер Поля представлена на рис. 8. Как видно из схемы, колебательные контуры в генераторах реализованы на  $RLC$ -цепочках, а усиление осуществляется через транзистор. Такая схема предпочтительнее, чем схема на операционном усилителе с мостом Вина, поскольку в последней не удастся получить мягкую, суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа, характерную для классического осциллятора Ван дер Поля.

Соединим генераторы с собственными частотами  $f_1$  и  $f_2$  и установим значения  $f_1 = 19\,000 \text{ Hz}$  и  $f_2 = 18\,750 \text{ Hz}$ . Затем, уменьшая сопротивление связи  $r$ , добьемся взаимной синхронизации генераторов. В результате система связанных генераторов демонстрирует одночастотные периодические автоколебания, имеющие одну основную частоту в спектре, образом которых в фазовом пространстве является предельный цикл, лежащий на поверхности двумерного тора.

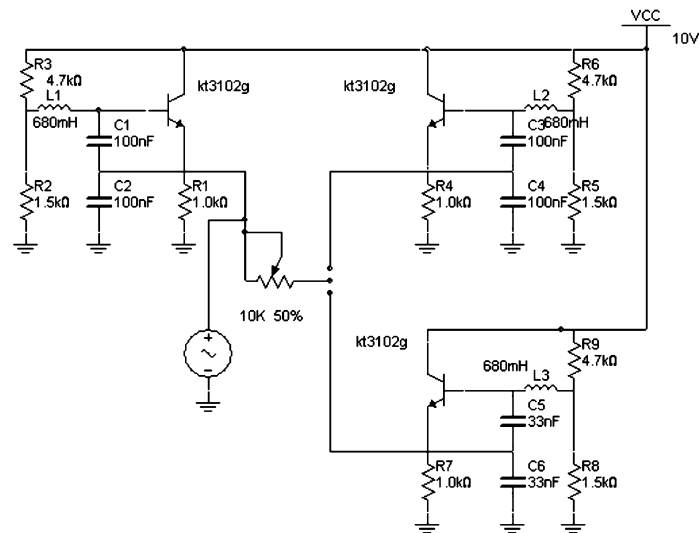


Рис. 8. Принципиальная схема экспериментальной установки.

Подадим внешнее гармоническое воздействие на частоте  $18\,600\text{ Hz}$  с амплитудой  $50\text{ mV}$ . В спектре колебаний системы появится еще один пик (см. рис. 9а). Размерность фазового пространства системы увеличится, и предельный цикл преобразуется в двумерный тор, лежащий на поверхности трехмерного тора. Увеличивая амплитуду внешнего воздействия до  $100\text{ mV}$ , в спектре можно наблюдать приближение пика, соответствующего общей частоте автоколебаний связанных генераторов, к частоте внешнего воздействия (рис. 9б). При переходе через линию  $l_{T2}$  (рис. 10), внешнее воздействие захватывает частоту автоколебаний системы связанных генераторов Ван дер Поля, и при изменении частоты внешнего сигнала, частота колебаний всей системы меняется идентично (рис. 9в). Рассмотренная ситуация полностью соответствует классическому сценарию синхронизации предельного цикла внешним периодическим воздействием через захват частоты.

Однако в нашем случае рассмотренный сценарий справедлив только для частоты внешнего воздействия, близкой к частоте колебаний синхронизированных генераторов Ван дер Поля. Подадим внешнее воздействие на частоте  $18\,300\text{ Hz}$  с амплитудой  $50\text{ mV}$  (см. рис. 11а). Увеличивая амплитуду, можно видеть смещение частоты колебаний системы генераторов в сторону частоты внешнего воздействия (рис. 11б). Однако, пересекая линию  $l_{T3}$  на бифуркационной диаграмме рис. 10, в спектре колебаний наблюдается явление, принципиально отличное от предполагаемых классической теорией синхронизации предельного цикла. Внешнее воздействие нарушает условие взаимной синхронизации, в результате чего система демонстрирует трехчастотные колебания (рис. 11в). При этом третья частота в спектре колебаний возникает сразу с ненулевой амплитудой, а кроме того, не наблюдается явление гистерезиса. Как было показано в [14], в основе наблюдаемых эффектов лежит седло-узловая бифуркация инвариантных двумерных торов — седлового и устойчивого, лежащих на поверхности трехмерного тора. До бифуркации на поверхности трехмерного тора сосуществуют устойчивый и седловой двумерные торы. Увеличение амплитуды внешнего воздействия заставляет их сближаться, и в момент пересечения линии  $l_{T3}$  происходит касательная бифуркация торов. Именно поэтому наблюдается мгновенное возникновение третьей частоты в спектре без гистерезиса. Дальнейшее увеличение амплитуды внешнего воздействия вызывает захват внешним сигналом частоты одного из генераторов, что соответствует выходу из области  $T^3$  сверху.

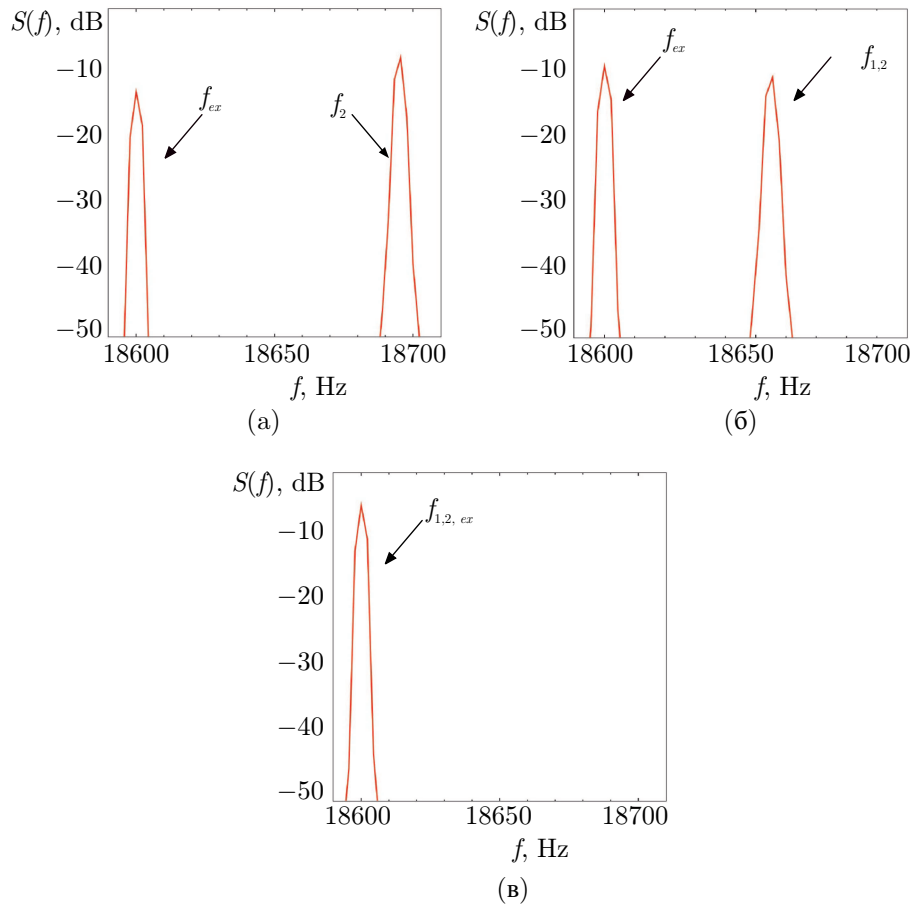


Рис. 9. Эволюция спектра колебаний  $S(f)$  при захвате частоты предельного цикла внешним периодическим воздействием при пересечении линии  $l_{T^2}$  на рис. 10.

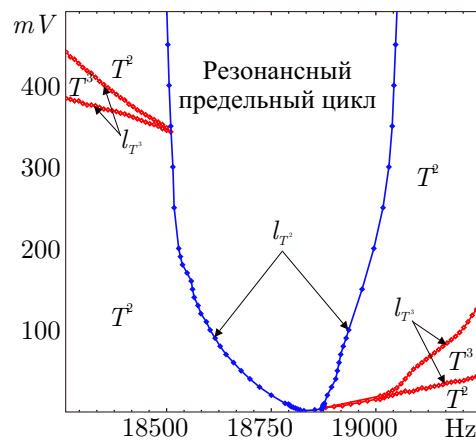


Рис. 10. Экспериментально полученная бифуркационная диаграмма. По горизонтали отложена частота внешнего воздействия, по вертикали — амплитуда внешнего воздействия.

Аналогичная ситуация имеет место и в правой части бифуркационной диаграммы на рис. 10. Следует отметить, что экспериментально полученная бифуркационная диаграмма топологически полностью эквивалентна теоретически рассчитанной на основе фазового приближения.

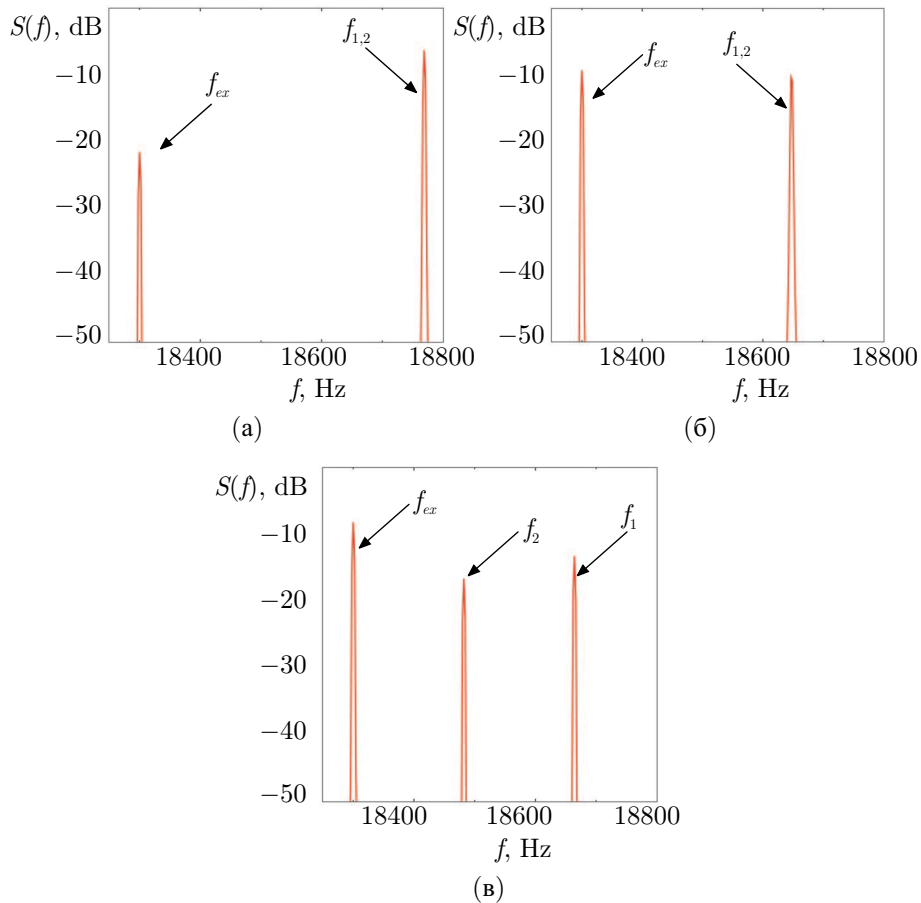


Рис. 11. Эволюция спектра колебаний  $S(f)$  при потере взаимной синхронизации связанных генераторов с пересечением линии  $l_{T^3}$  на рис. 10.

Описанные в предыдущей части результаты иллюстрируют бифуркационные механизмы синхронизации, описанные в [14]. Однако бифуркационный анализ, проведенный в [14], описывает синхронизацию связанных генераторов в окрестности резонанса 1 : 1. Возникает справедливый вопрос: возможна ли синхронизация по описанному выше сценарию на кратных частотах? Мы предполагаем, что синхронизация предельных циклов, возникающих при кратном соотношении частот взаимодействующих генераторов, лежащих на поверхности двумерного тора будет происходить по описанному выше бифуркационному сценарию.

Для проверки выдвинутого предположения в экспериментальной установке (рис. 7) соединим генераторы Ван дер Поля с собственными частотами  $f_1$  и  $f_3$ , а внешнее воздействие будем подавать на частотах, близких к утроенному значению  $f_1$ .

Установим следующие значения собственных частот связанных генераторов Ван дер Поля:  $f_1 = 15\,000$  Hz,  $f_3 = 45\,250$  Hz; и будем увеличивать связь между ними до тех пор, пока не произойдет синхронизация генераторов на третьей гармонике собственной частоты первого генератора. В результате в фазовом пространстве системы возникает предельный цикл, лежащий на поверхности двумерного тора. При этом предельный цикл трижды опоясывает двумерный тор. Добавим внешнее гармоническое воздействие на частоте  $f_{ex} = 45\,100$  Hz с амплитудой 100 mV. Размерность фазового пространства будет увеличена, а трехтактный предельный цикл преобразуется в трехобходный инвариантный двумерный тор. В спектре колебаний системы это соответствует появлению нового пика (рис. 12а). Увеличение

амплитуды внешнего воздействия вызывает последовательность эффектов «отрыва» частоты одного из синхронизированных генераторов Ван дер Поля внешним воздействием (рис. 12б) и ее дальнейшего захвата внешним воздействием (рис. 12в, г). В целом, ситуация полностью повторяет случай с синхронизацией однократного предельного цикла внешним воздействием, описанную выше. Экспериментально полученная бифуркационная диаграмма (рис. 13) является топологически эквивалентной диаграмме, полученной в окрестности резонанса  $1 : 1$ , и бифуркационной диаграмме, построенной для математической модели системы в фазовом приближении.

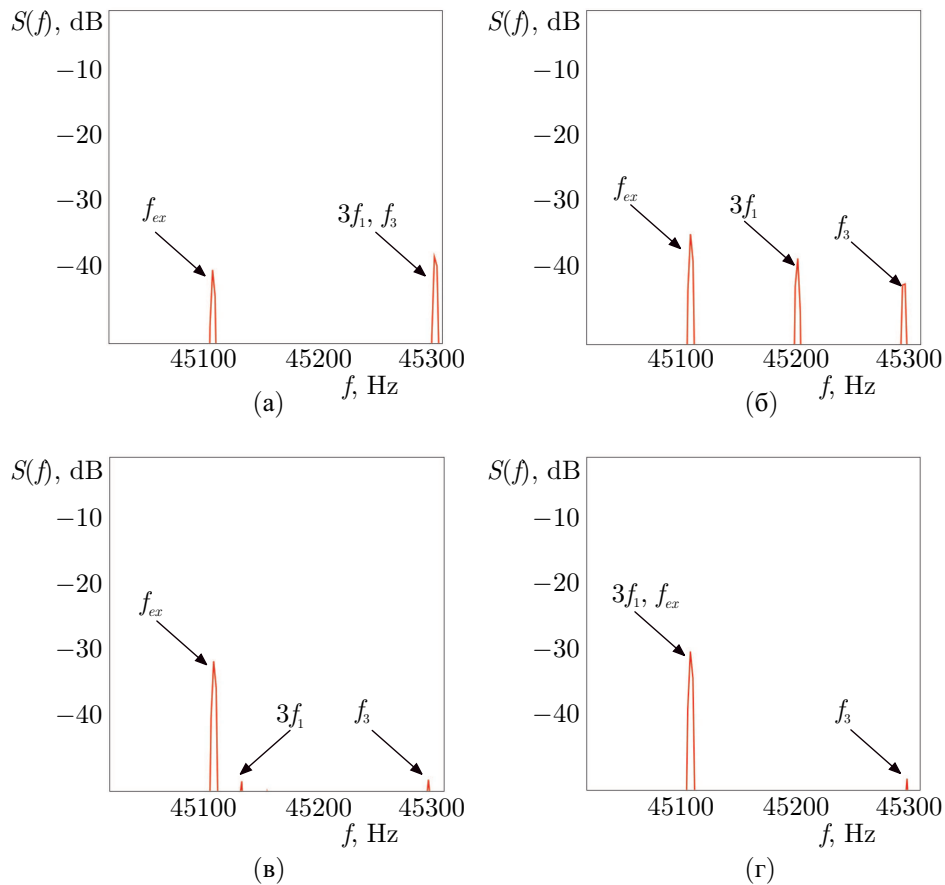


Рис. 12. (а), (б) — потеря взаимной синхронизации при выходе из области  $T^2$  в область  $T^3$  через нижнюю линию  $l_{T^3}$  на рис. 13; (в), (г) — захват частоты при выходе из области  $T^3$  в область  $T^2$  через верхнюю линию  $l_{T^3}$  на рис. 13.

## Заключение

Представленный бифуркационный анализ динамики системы фазового приближения (1.9) показал следующее. При наличии расстройки частот двух связанных генераторов  $\delta \neq 0$  и расстройки между частотой внешней силы и частотой первого генератора  $\Delta_1 \neq 0$  в системе реализуются эргодические квазипериодические колебания с двумя независимыми частотами (области  $B$  на диаграмме рис. 2). Их образом в фазовом пространстве является двумерный тор. Выход из области  $B$  в область  $C$  приводит к возникновению пары инвариантных кривых, устойчивой  $l_1$  и седловой  $l_2$ . Далее, переходу из областей  $C$  в область  $D$

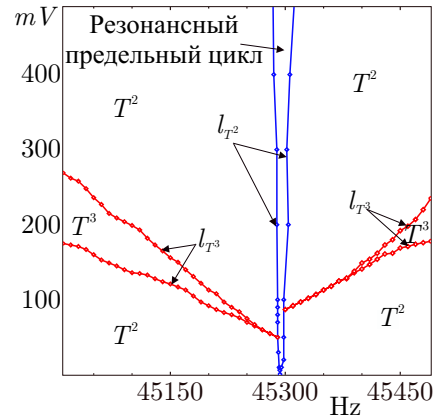


Рис. 13. Экспериментально полученная бифуркационная диаграмма. По горизонтали отложена частота внешнего воздействия, по вертикали — амплитуда внешнего воздействия.

отвечает классическая седло-узловая бифуркация, в результате которой в области  $D$  появляются 4 неподвижные точки, одна из которых является устойчивой.

В исходной дифференциальной системе (1.1) описанным бифуркационным переходам отвечают следующие перестройки режимов. В области  $B$  система (1.1) характеризуется квазипериодическими колебаниями с тремя независимыми частотами  $\omega_{ex}$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Выход из областей  $B$  в области  $C$  характеризует возникновение двумерного тора как частичного резонанса на трехмерном торе. Частичный резонанс отвечает эффекту захвата одной из парциальных частот системы (1.1). Здесь возможны случаи:  $\omega_{ex} = \omega_1$  и  $\omega_2 \neq \omega_1$ , либо  $\omega_{ex} = \omega_2$ , но  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Имеет место частичная синхронизация. Переходу из областей  $C$  в область  $D$  отвечает режим установления устойчивых периодических движений. Рождается устойчивый предельный цикл, лежащий на поверхности двумерного тора, который, в свою очередь, лежит на поверхности трехмерного тора. Этому предельному циклу отвечает режим полной синхронизации, при котором внешний сигнал захватывает обе частоты парциальных генераторов ( $\omega_{ex} = \omega_1 = \omega_2$ ).

Отметим, что представленные результаты анализа динамики уравнений фазового приближения (1.9) находятся в полном качественном соответствии с результатами радиофизического эксперимента и результатами работ [13, 14].

Работа выполнена при поддержке CRDF и Министерства образования и науки РФ в рамках АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» на 2009 г. (грант № 2.2.2.2/229).

## Список литературы

- [1] Hayashi C. Nonlinear Oscillations in Physical Systems. New York: McGraw-Hill, 1964.
- [2] Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
- [3] Guckenheimer J. and Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer, 1983.
- [4] Pikovsky A., Rosenblum M., and Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.

- [5] Balanov A., Janson N., Postnov D., and Sosnovtseva O. Synchronization: From Simple to Complex. Berlin–Heidelberg: Springer, 2008.
- [6] Mosekilde E., Maistrenko Y., and Postnov D. Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems. Singapore: World Sci., 2002.
- [7] Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., and Shimansky-Geier L. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Development. Berlin: Springer, 2007.
- [8] Rosenblum M., Pikovsky A., and Kurths J. Phase Synchronization of Chaotic Oscillators // Phys. Rev. Lett., 1996, vol. 76, pp. 1804–1807.
- [9] Shulgin B., Neiman A., and Anishchenko V.S. Mean Switching Frequency Locking in Stochastic Bistable Systems Driven by a Periodic Force // Phys. Rev. Lett., 1995, vol. 75, pp. 4157–4160
- [10] Neiman A., Silchenko A., Anishchenko V.S., and Shimansky-Geier L. Stochastic Resonance: Noise-Enhanced Phase Coherence // Phys. Rev. E, 1998, vol. 58, pp. 7118–7125.
- [11] Anishchenko V., Nikolaev S., and Kurths J., Winding Number Locking on a Two-Dimensional Torus: Synchronization of Quasiperiodic Motions // Phys. Rev. E, 2006, vol. 73, pp. 056202.
- [12] Anishchenko V., Nikolaev S., and Kurths J. Peculiarities of Synchronization of a Resonant Limit Cycle on a Two-Dimensional Torus // Phys. Rev. E, 2007, vol. 76, pp. 046216.
- [13] Анищенко В. С., Николаев С. М. Механизмы синхронизации предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 1, с. 39–56.
- [14] Anishchenko V., Nikolaev S., and Kurths J. Bifurcational Mechanisms of Synchronization of a Resonant Limit Cycle on a Two-Dimensional Torus // Chaos, 2008, vol. 18, no. 3, pp. 037123.
- [15] Zheng Zh., Hu G., and Hu B. Phase Slips and Phase Synchronization of Coupled Oscillators // Phys. Rev. Lett., 1998, vol. 81, pp. 5318–5321.