

Стабилизация внешними импульсами и синхронный отклик в системе Рёсслера до порога бифуркации седло-узел

А. П. Кузнецов, Н. В. Станкевич, Л. В. Тюрюкина

Саратовский государственный университет
410026, Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83
stankevichnv@mail.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН,
410019, Россия, Саратов, ул. Зеленая, 38
alkuz@sgu.ru, ludmila@forpost.ru

Получено 12 мая 2008 г.

Рассматривается действие импульсов на систему Рёсслера, в ситуации, когда автономная система находится до бифуркации седло-узел и характеризуется уходящими на бесконечность фазовыми траекториями. Показано, что внешнее импульсное воздействие приводит к возникновению в неавтономной системе устойчивых периодических и квазипериодических режимов. Наблюдается эффект синхронного отклика при взаимодействии внешнего сигнала с внутренним ритмом системы, связанным с «вращением» изображающей точки в трехмерном фазовом пространстве. Обнаружено, что такая система при определенных параметрах внешней силы может демонстрировать удвоения торов в стробоскопическом сечении Пуанкаре.

Ключевые слова: импульсное воздействие, седло-узловая бифуркация, синхронизация

A. P. Kuznetsov, N. V. Stankevich, and L. V. Turukina

Stabilization by external pulses and synchronous response in the Rossler system before saddle-node bifurcation

The pulse driven Rössler system before the saddle-node bifurcation in the regime of divergence is considered. It is shown that external pulses initiate stable periodic and quasi-periodic regimes in non-autonomous system. The effect of synchronous response due interaction between external signal and own rhythm of autonomous system concerned with the «rotation» of the representation point in the three-dimensional phase space is observed. It is revealed that the torus doublings in the stroboscopic section exist in the certain area on the parameter plane of external force in this system.

Keywords: pulses force, saddle-node bifurcation, synchronization

Mathematical Subject Classifications: 39Axx, 93C10, 93D99

1. Введение

Проблема управления хаоса и стабилизации различных режимов нелинейных систем привлекает большое внимание благодаря как своему теоретическому значению, так и большой практической значимости [1]–[5]. Традиционно различают два основных направления: стабилизация неустойчивых периодических орбит динамической системы, вложенных в хаотический аттрактор, и стабилизация неустойчивых состояний равновесия (неподвижных точек). В рамках первого направления проблема управления хаосом изучена достаточно широко [5]–[6]. Одним из наиболее популярных методов решения таких задач является метод Пирагаса — метод автосинхронизации запаздывающей обратной связью [6]. Метод автосинхронизации запаздывающей обратной связью может быть обобщен и на случай стабилизации неустойчивых положений равновесия [7].

Весьма интересными являются ситуации, когда внешнее воздействие на систему с неустойчивым режимом не просто приводит к его стабилизации, но инициирует систему периодических и квазипериодических режимов, имеющих на плоскости *период — амплитуда воздействия* вид классической системы языков Арнольда. Возможность таких режимов в простейшей возбуждаемой импульсами двумерной системе с неустойчивым предельным циклом была показана в [8]. Была рассмотрена система с импульсным возбуждением вида:

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = A \sum \delta(t - nT). \quad (1)$$

Здесь x — динамическая переменная, λ — управляющий параметр, отвечающий за обратную (субкритическую) бифуркацию Андронова–Хопфа рождения неустойчивого предельного цикла в автономном осцилляторе, T — период следования внешних импульсов, A — их амплитуда, β — параметр, введенный по аналогии с осциллятором Дуффинга и отвечающий за неизохронность малых колебаний. За механизм стабилизации неустойчивости ответственна именно неизохронность малых колебаний [8].

В настоящей работе мы обсудим возможность стабилизации и возникновение системы языков Арнольда и квазипериодических режимов в случае, когда в автономной системе вообще нет положений равновесия, т. е. изображающая точка в фазовом пространстве «убегает» на бесконечность. Такая ситуация может возникнуть, например, у порога бифуркации седло-узел, когда сливаются и исчезают устойчивое и неустойчивое положения равновесия. Для двумерных динамических систем в результате такой бифуркации остается однородный «поток» фазовых траекторий на фазовой плоскости, и новых интересных режимов не возникает. Иная ситуация возникает для трехмерных динамических систем. Их особенность состоит в том, что в точке седло-узловой бифуркации могут слиться равновесия различных типов. В зависимости от взаимного расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости возможны несколько разновидностей этой бифуркации [9]. Одной из них отвечает слияние устойчивого фокуса и седло-фокуса, для которых характерно наличие одного действительного и двух комплексно-сопряженных корней. Комплексные части корней ответственны за особенность потока фазовых траекторий в трех измерениях: изображающие точки движутся с некоторым «вращением». В этом случае в системе возникает определенный внутренний ритм, который, как будет показано, приводит к возможности своего рода синхронного отклика системы при наличии внешнего импульсного воздействия. Этот эффект не является синхронизацией в классическом понимании [3, 10], поскольку в автономной системе отсутствуют автоколебания и предельный цикл в фазовом пространстве. Однако, как мы покажем, он обладает некоторыми признаками этого явления. Это наличие на плоскости *период — амплитуда воздействия* области устойчивых

квазипериодических режимов, в которую, в свою очередь, встроены области периодических режимов, аналогичных языкам Арнольда. Для более корректного обоснования этого факта будет представлен полный спектр ляпуновских показателей системы. Еще один характерный момент состоит в том, что при переходе из области квазипериодического поведения в области периодических режимов циклы разной кратности в стробоскопическом сечении Пуанкаре возникают на соответствующей инвариантной кривой, как и резонансные циклы в случае классической синхронизации.

2. Автономная система у порога седло-узловой бифуркации

Описанную ситуацию рассмотрим на примере эталонной в нелинейной динамике модели — системе Рёсслера [11]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + z(x - r). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь x, y, z — динамические переменные, p, q, r — параметры системы. Система (2) — автоколебательная система с трехмерным фазовым пространством. Если фиксировать два параметра, например, (r, q) , то с увеличением r в системе (2) может наблюдаться следующая последовательность перестроек типов режимов. При малых r в системе вообще нет положений равновесия, и любая изображающая точка в фазовом пространстве «убегает» на бесконечность. Затем происходит седло-узловая бифуркация рождения устойчивой и неустойчивой неподвижных точек. Далее из устойчивой точки в результате бифуркации Андронова–Хопфа рождается устойчивый предельный цикл, который претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода с переходом к хаосу. Мы сосредоточимся на «тривиальной», на первый взгляд, ситуации у порога бифуркации седло-узел.

Система (2) имеет две неподвижные точки, которые легко найти аналитически:

$$x_0 = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4pq}}{2}, y_0 = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4pq}}{2p}, z_0 = \frac{-r \mp \sqrt{r^2 - 4pq}}{2p}. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что седло-узловая бифуркация имеет место при условии

$$r^2 = 4pq. \tag{4}$$

Таким образом, если $r^2 - 4pq > 0$, то мы имеем две неподвижные точки (устойчивую и неустойчивую), а если $r^2 - 4pq < 0$ — неподвижных точек вообще нет.

Рассмотрим более подробно типы неподвижных точек, возможные в системе Рёсслера (2). Для этого необходимо найти собственные числа линеаризованной матрицы системы (2):

$$M = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda - p & 0 \\ z_0 & 0 & \lambda - x_0 + r \end{vmatrix}, \tag{5}$$

которые являются решением следующего характеристического уравнения:

$$\lambda^3 + \lambda^2(r - p + py_0) + \lambda(1 - r - py_0 - y_0) - 2py_0 = 0. \tag{6}$$



Возможны следующие варианты комбинаций трех корней характеристического уравнения:

- узел: три действительных корня;
- седло: три действительных корня, один из которых имеет отличный знак;
- фокус: два комплексно-сопряженных и один действительный корень, причем действительные части всех корней должны иметь одинаковый знак;
- седло-фокус: два комплексно-сопряженных и один действительный корень, но знаки у корней должны быть различными.

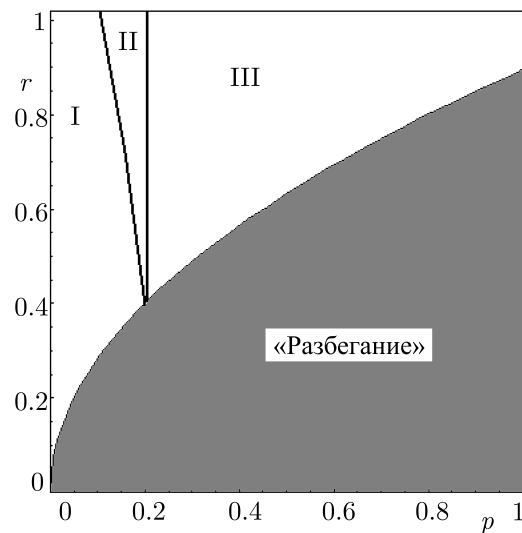


Рис. 1. Плоскость параметров системы Рёсслера (2).

Седло-фокус может быть двух типов: 1-ый тип — имеется устойчивое двумерное многообразие и неустойчивое одномерное; 2-ой тип — имеется неустойчивое двумерное многообразие и устойчивое одномерное [9].

На рис. 1 изображена плоскость параметров (p, r) системы (2), на которой обозначена линия бифуркации седло-узел, а также возможные варианты неподвижных точек при $q = 0.2$. Как видно из рисунка, плоскость параметров системы за порогом бифуркации седло-узел разделяется на три области. В первой области (I) сосуществуют устойчивый фокус и седло-фокус 1-го типа, во второй (II) — седло-фокусы 1-го и 2-го типа и в третьей (III) — неустойчивый фокус и седло-фокус 2-го типа. Таким образом, в результате седло-узловой бифуркации могут слиться, например, устойчивый фокус и седло-фокус 1-го типа [12].

Зафиксируем теперь кроме $q = 0.2$ также $p = 0.2$. Тогда седло-узловая бифуркация в соответствии с (4) происходит при $r = 0.4$. Характеристическое уравнение (6) в этой точке имеет одно действительное и пару комплексно-сопряженных собственных чисел

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}. \quad (7)$$

Поскольку получение характеристического уравнения предполагает решение в виде $e^{\lambda t}$, то наличие чисто мнимых корней (7) отвечает осцилляциям решения во времени по закону $e^{iIm\lambda t}$. Соответственно, можно оценить период внутреннего «ритма» системы как

$$T_{\text{вн}} = \frac{2\pi}{Im\lambda_{2,3}} = \sqrt{2}\pi \approx 4.5. \quad (8)$$

Понятно, что при некотором смещении от точки бифуркации период осцилляций несколько изменится, но не сильно.

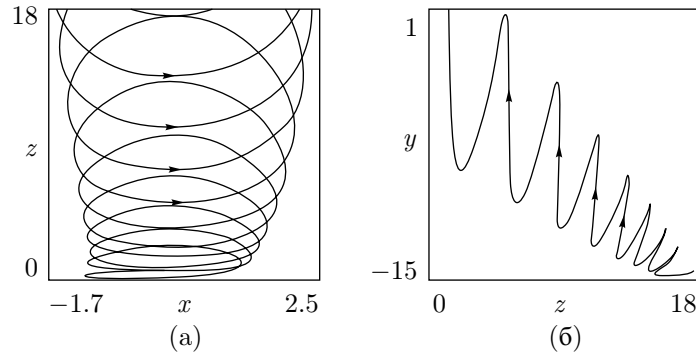


Рис. 2. Проекция фазовой траектории автономной системы Рёсслера (2) на плоскости (x, z) и (z, y) в случае отсутствия неподвижных точек при $p = 0.2, q = 0.2, r = 0.2$.

Положим далее $r = 0.2$, что ниже порога бифуркации, но близко к нему. На рис. 2 показан вид проекций фазовой траекторий системы (2) на плоскости (x, z) и (y, z) в этом случае. На первом рисунке можно видеть характерные «вращения» изображающей точки, о которых мы говорили выше. Соответственно, на рис. 2б на плоскости можно видеть, что на это движение наложен некоторый дрейф изображающей точки, ответственный, в конечном итоге, за ее убегание на бесконечность.

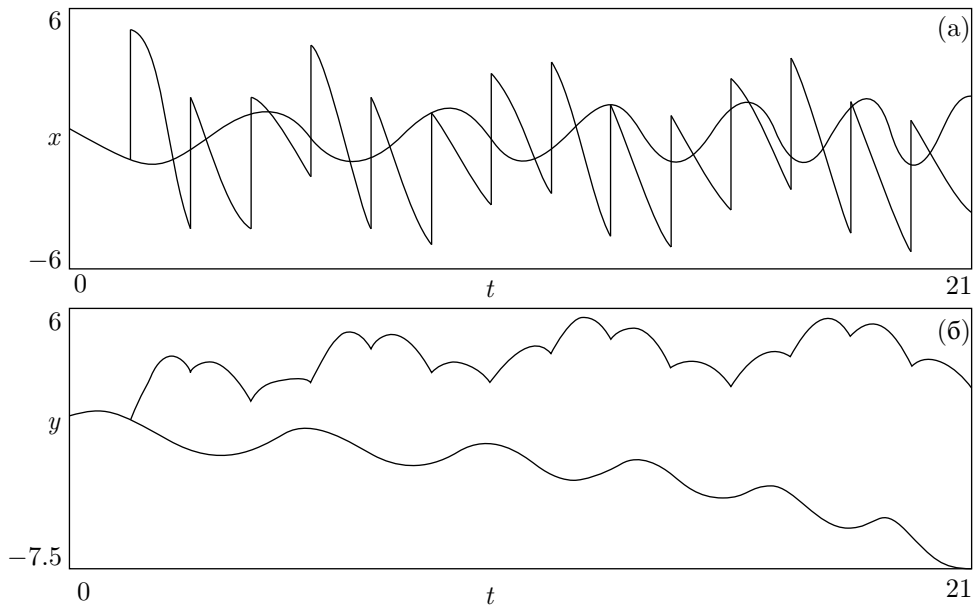


Рис. 3. Реализации автономной (2) и возбуждаемой импульсами системы Рёсслера (9) $x(t)$ и $y(t)$ при $p = 0.2, q = 0.2, r = 0.2$.

На рис. 3а показаны реализации системы (2). Нетрудно видеть, что динамика переменной x действительно характеризуется наличием осцилляций во времени, причем их период

очень хорошо совпадает с оценкой (8). Динамика переменной y также характеризуется наличием осцилляций, на которые наложен медленный дрейф, уводящий изображающую точку на бесконечность (рис. 3б).

Рис. 2б и рис. 3б сигнализируют о том, что можно попытаться стабилизировать траекторию, воздействуя импульсами так, чтобы компенсировать имеющийся дрейф. В свою очередь, наличие внутреннего ритма, проявляющегося на рис. 2а и 3а, говорит о возможности в случае внешнего воздействия интересных режимов, обусловленных взаимодействием внутреннего и внешнего ритмов системы.

3. Неавтономная система. Стабилизация и синхронный отклик

Добавим в нашу систему (2) внешнее воздействие. В задачах синхронизации наиболее часто рассматривается случай гармонического сигнала. Однако, как можно видеть из характера динамики переменной $y(t)$ на рис. 3б, такое воздействие будет неэффективным. Одним из альтернативных вариантов является импульсное воздействие, когда внешняя сила представляет собой периодическую последовательность значительных по амплитуде и коротких по времени импульсов. В качестве соответствующей модели можно использовать, как это сделано в [8], [13]–[17], периодическую последовательность δ -функций.

Рассмотрим случай, когда внешняя сила действует вдоль оси x , то есть дополнительное слагаемое, отвечающее за воздействие, добавляем в первое уравнение системы (2). В этом случае неавтономную систему можно записать так:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z + A \sum \delta(t - nT), \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + z(x - r),\end{aligned}\tag{9}$$

где A — амплитуда внешнего воздействия, а T — его период.

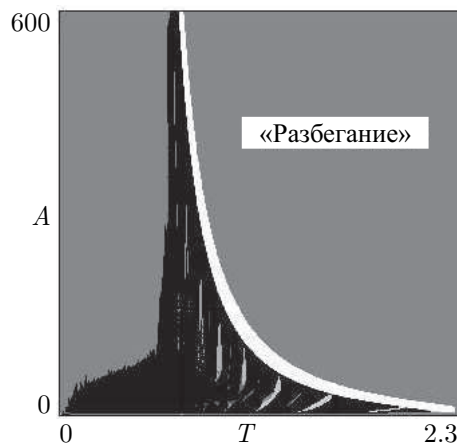


Рис. 4. Карта динамических режимов неавтономной системы Рёсслера (9) на плоскости параметров период T — амплитуда A воздействия для $p = 0.2$, $q = 0.2$, $r = 0.2$.

На рис. 3 вместе с реализациями автономной системы, показаны и реализации возбуждаемой системы (9). Из рис. 3а нетрудно видеть, что при наличии внешнего воздействия

возник новый режим с соотношением частот $1 : 4$ по отношению к внутреннему ритму системы. Графики реализации $y(t)$ на рис. 3б демонстрируют, как внешние толчки меняют скорость изменения переменной y , и тем самым компенсируют дрейф, характерный для свободного движения¹.

На рис. 4 изображена построенная численно карта динамических режимов для системы (9) на плоскости параметров *амплитуда — период внешней силы*. На этой карте белым цветом обозначен режим периода 1, светло-серым — режим периода 2 и т. д., черный цвет отвечает хаосу, а область убегания траектории на бесконечность обозначена одним из оттенков серого. Период движения определен в сечении Пуанкаре. Сечение Пуанкаре выбиралось

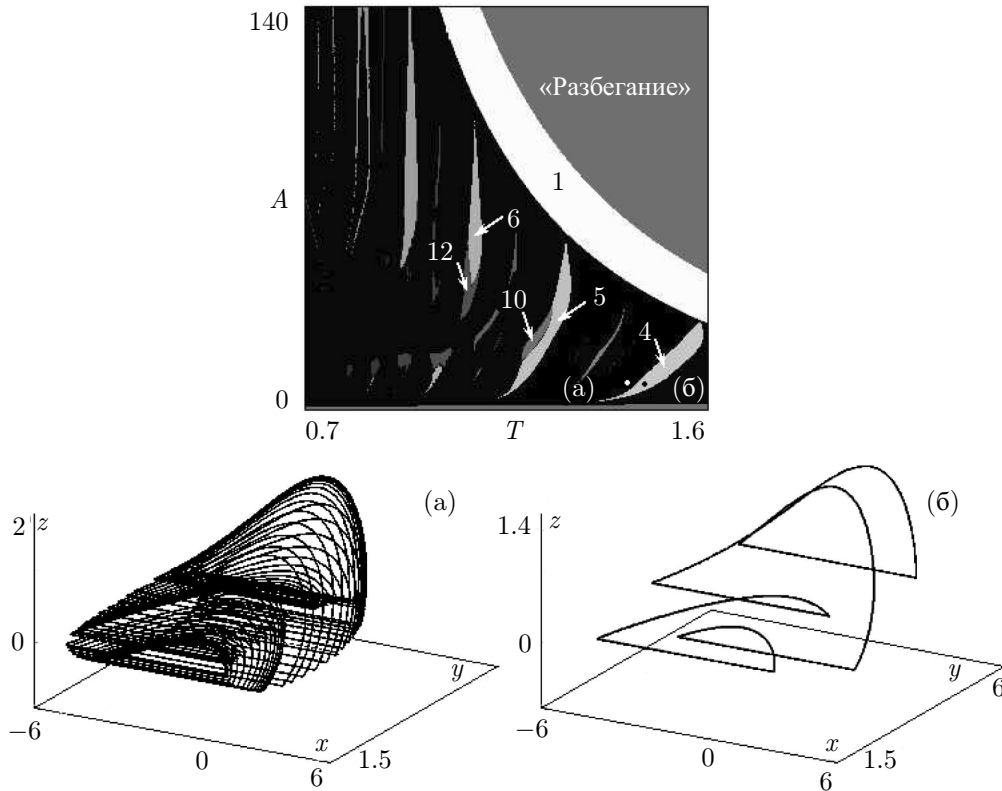


Рис. 5. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов неавтономной системы Рёсслера (9) при $p = 0.2, q = 0.2, r = 0.2$ и аттракторы неавтономной системы (9): (а) — периода 4 и (б) — квазипериодического режима. Цифры на карте обозначают периоды в стробоскопическом сечении.

традиционным для неавтономных систем способом — по периоду внешней силы. На рис. 4 изображена карта, построенная «с наследованием», то есть начальная точка для каждого значения управляющих параметров наследовалась от установившегося режима предыдущего значения параметров. На рис. 5 показан увеличенный фрагмент карты, рядом с которой показаны два характерных фазовых портрета неавтономной системы.

Анализ рис. 4–5 показывает, что в рассматриваемой системе возможны не только режимы, отвечающие «разбеганию» траекторий, но возникают и устойчивые режимы.

¹ Действие дельта-функций в соответствии с первым уравнением (9) скачком меняет величину переменной x . В соответствии со вторым уравнением (9) это приводит к скачку скорости изменения переменной y . Это выражается в появлении «изломов» на зависимости $y(t)$, что можно видеть на рис. 3б



Обсудим их подробнее. На рис. 5 мы видим обширную область квазипериодических режимов, в которую встроена система областей периодических режимов, аналогичная по виду системе языков Арнольда, характерной для автоколебательных систем с импульсным воздействием [13]–[17]. Это, как мы отмечали во введении, сближает обсуждаемый эффект с явлением синхронизации. В нашем случае мы видим также, что внутри языков имеются области удвоенного периода.

Для того чтобы более корректно обосновать существование квазипериодических режимов, был рассчитан полный спектр ляпуновских показателей системы. На рис. 6 показана

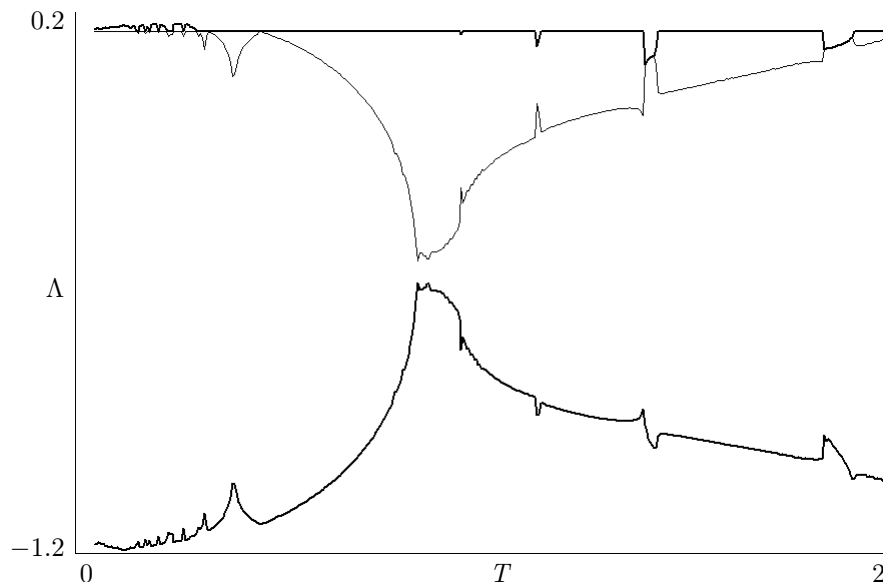


Рис. 6. Спектр показателей Ляпунова неавтономной системы Рёсслера (9) для $p = 0.2$, $q = 0.2$, $r = 0.2$ в зависимости от периода внешнего воздействия T при $A = 6$.

зависимость трех ляпуновских показателей системы от периода воздействия при фиксированном значении амплитуды $A = 6$. В правой части рисунка при $T > 0.7$ хорошо видно, что старший показатель остается нулевым в определенных диапазонах изменения периода воздействия, что отвечает квазипериодическим режимам. Они разделены областями периодических режимов, для которых показатель становится отрицательным².

С увеличением периода воздействия языки не становятся более сложно устроенными, а становятся «неразличимыми» в области квазипериодического поведения. Это связано с тем, что автономная система не имеет периодического аттрактора, а изображающая точка системы (2) движется по спиралевидной траектории (рис. 2). При этом с течением времени увеличивается число витков. Когда мы добавляем внешнее воздействие, то импульс возвращает изображающую точку в начало траектории. Подобную природу, в определенной степени, имеет и метод автосинхронизации с запаздывающей обратной связью, когда с помощью обратной связи состояние системы возвращается в предыдущее. В нашем же случае вместо обратной связи используется внешний импульс, возвращающий траекторию в прежнее состояние. В зависимости от того, как далеко уйдет изображающая точка без

²В этом плане полезно сравнить рис. 6 с аналогичным графиком ляпуновского показателя для стандартного синус-отображения окружности, см. [11, с. 290].

воздействия, то есть от величины периода внешней силы, импульс стабилизирует систему или нет. Таким образом, можно сказать, что при $T > 2.3$ траектория уже достаточно далеко «убежала», так что внешний импульс не в состоянии ее стабилизировать. Стоит также обратить внимание на достаточно большую полосу периода один, в которую упираются все вершины языков периодических режимов. Эта полоса разграничивает области разбегания траектории на бесконечность и области квазипериодических режимов.

Фазовые портреты на рис. 5 относятся к двум близким точкам на плоскости параметров и иллюстрируют, соответственно, режим синхронизации типа $1 : 4$ и близкий к нему квазипериодический режим. На фазовом портрете периодического аттрактора хорошо видно действие четырех импульсов, направленных вдоль оси x . Отметим, что значения амплитуды и периода воздействия как раз соответствуют обсуждавшемуся выше рис. 3.

На рис. 7 изображены эти же два режима, но в виде соответствующих стробоскопических сечений Пуанкаре в проекции на плоскость (x, y) . Это позволяет более наглядно продемонстрировать, что квазипериодическому режиму отвечает замкнутая инвариантная кривая, а периодическому — четыре фиксированные точки. Поскольку периоды внешнего сигнала отличаются мало, то хорошо видно, что цикл является резонансным, возникающим на соответствующей инвариантной кривой.

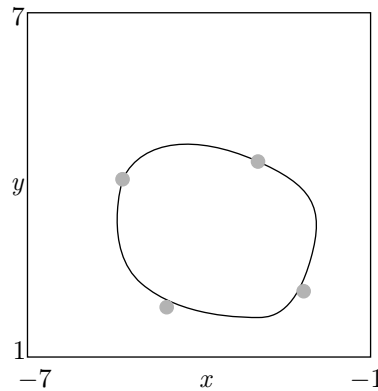


Рис. 7. Проекция стробоскопического сечения Пуанкаре системы (9) на плоскость (x, y) при $p = 0.2$, $q = 0.2$, $r = 0.2$ для режима периода 4 и квазипериодического режима.

Одним из немаловажных вопросов в данной задаче является вопрос устойчивости стабилизированных режимов. Как видно из рисунка 5, режимы неавтономной системы устойчивы к изменению параметров внешнего воздействия. Также важен и вопрос устойчивости стабилизированных режимов к вариации начальных условий. На рис. 8 показаны проекции периодических аттракторов неавтономной системы (9) на плоскость (x, y) и соответствующие им точки в сечении Пуанкаре (показаны белым цветом). Кроме того, представлены бассейны притяжения данных аттракторов в стробоскопическом сечении для фиксированного начального значения третьей переменной ($z_0 = 0.5$). Как видно из рисунка 8, размеры бассейнов притяжения на плоскостях динамических переменных достаточно большие, что говорит об устойчивости стабилизированных режимов к изменению начальных условий.

4. Удвоения торов

Возбуждаемая импульсами система Рёсслера (9) в режиме «убегающих» траекторий может демонстрировать еще один интересный тип поведения. При постепенном уменьше-

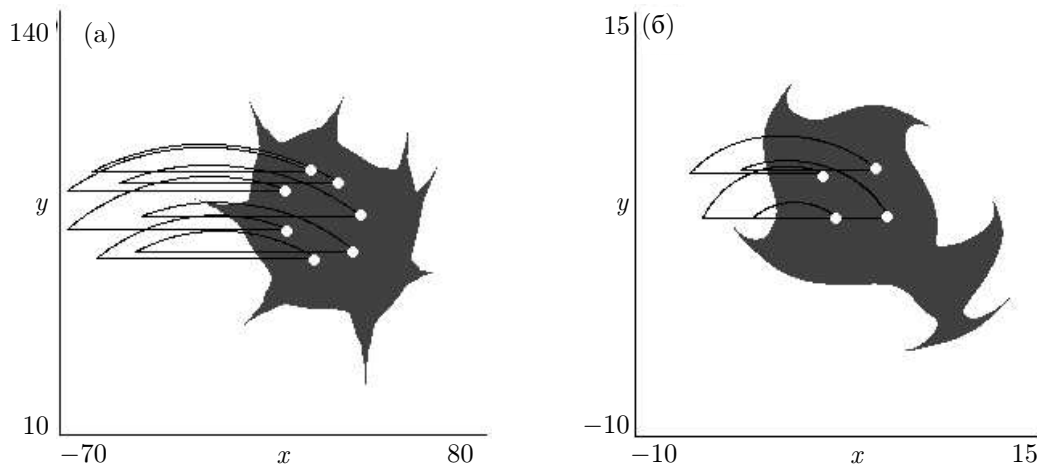


Рис. 8. Неавтономные аттракторы системы Рёсслера (9) периода 7 и 4 на плоскости $(x(t), y(t))$, соответствующие им точки в сечении Пуанкаре и бассейны притяжения

нии периода воздействия при фиксированной амплитуде в системе (9) возрастает кратность языков синхронизации (рис. 5) и, соответственно, число импульсов, наблюдаемых на аттракторе. В этом случае удобно перейти от фазовых портретов типа рис. 5 к сечениям Пуанкаре. С этой целью в трехмерном пространстве (x, y, z) изображаем последовательно точки, отвечающие стробоскопическому сечению Пуанкаре, т. е. точки, «зафиксированные» через период внешнего воздействия T . Примеры таких иллюстраций даны на рис. 9. На рис. 9а можно видеть замкнутую инвариантную кривую, которая, в силу определения сечения Пуанкаре, отвечает квазипериодическому режиму. Будем еще более уменьшать период воздействия. Если периоды воздействия будут совсем малыми, то возникает новый эффект. Инвариантная кривая становится «двухоборотной» (рис. 9б). В нелинейной динамике такой тип перестройки принято называть удвоением тора [18]. При дальнейшем уменьшении периода воздействия происходит удвоение уже двухоборотной инвариантной кривой и т. д. (рис. 9).

Удвоения торов также хорошо диагностируются с помощью графиков ляпуновских показателей системы. На рис. 6 видно, что в области $T < 0,7$ при уменьшении периода воздействия старший ляпуновский показатель остается нулевым, а второй, оставаясь в целом отрицательным, обращается в нуль как раз в точках удвоений торов. При дальнейшем уменьшении периода воздействия старший показатель становится положительным, что, как известно, свидетельствует о разрушении тора с возникновением хаоса.

Итак, в системе Рёсслера с «убегаящими» в автономном режиме траекториями возможен каскад удвоения торов, реализующийся при уменьшении периода воздействия. При этом особенность данной задачи — большое число наблюдаемых удвоений торов, когда торы не разрушаются, что связано, надо полагать, с очень простой динамикой автономной системы.

5. Заключение

Таким образом, в работе показано, что воздействие периодической последовательности δ -импульсов на систему Рёсслера до порога бифуркации рождения устойчивой и неустой-

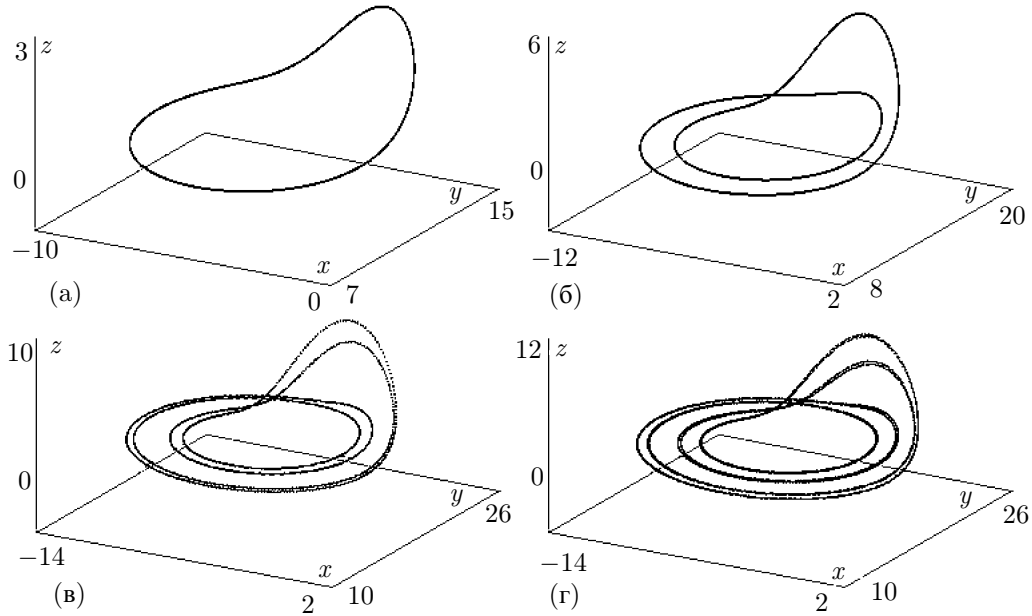


Рис. 9. Удвоения торов в трехмерном сечении Пуанкаре для неавтономной системы Рёсслера (9) в режиме «убегающей» траектории.

чивой неподвижной точек приводит к возникновению в неавтономной системе устойчивых периодических и квазипериодических режимов. Интересной особенностью обнаруженного эффекта являются некоторые черты, сближающие его с явлением синхронизации, хотя в автономной системе отсутствуют автоколебания и предельный цикл. Так на плоскости *перриод — амплитуда воздействия* области периодических режимов имеют вид характерных языков, встроенных в область квазипериодической динамики. Внутри этих языков частоты возникающих режимов находятся в кратном соотношении с внутренним ритмом системы, связанным с «вращением» изображающей точки в трехмерном фазовом пространстве. При пересечении границ языков устойчивые циклы в стробоскопическом сечении возникают в окрестности инвариантной кривой. Старший ляпуновский показатель является нулевым в области квазипериодической динамики и становится отрицательным внутри встроенной в нее системы областей периодических режимов. Также обнаружено, что при уменьшении периода внешней силы можно наблюдать удвоения торов в сечении Пуанкаре, причем в точках таких бифуркаций второй ляпуновский показатель обращается в нуль, затем происходит разрушение торов с возникновением хаоса, что диагностируется по положительной величине старшего показателя. Существенно, что эти особенности динамики возможны только, если автономная система характеризуется трехмерным фазовым пространством.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-02-07007 и программой «Развитие научного потенциала высшей школы» 2.1.1/1738

Список литературы

[1] Ott E. Chaos in Dynamical System. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
 [2] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.

- [3] Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [4] Schuster Н. G. Handbook of Chaos Control. Weinheim: Wiley, 1999.
- [5] Ott E., Grebogi C., and Yorke J. A. Controlling Chaos // Phys. Rev. Lett., 1990, vol. 64, no. 11, pp. 1196–1199.
- [6] Pyragas K. Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback // Phys. Lett. A, 1992, vol. 170, pp. 421–431.
- [7] Hoevel P. and Schoell E. Control of Unstable Steady States by Time-Delay Feedback Methods // Phys. Rev. E, 2005, vol. 72, pp. 046203.
- [8] Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В. Иницированные короткими импульсами устойчивые квазипериодические и периодические режимы в системе с неустойчивым предельным циклом // Изв. ВУЗов, ПНД, 2006, т. 14, № 1, с. 72–81.
- [9] Постнов Д. Э. Бифуркации регулярных аттракторов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996.
- [10] Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит, 1997.
- [11] Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
- [12] Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
- [13] Ding E. J. Structure of Parameter Space for a Prototype Nonlinear Oscillator // Phys. Rev. A, 1987, vol. 36, no. 3, pp. 1488–1491.
- [14] Ding E. J. Structure of the Parameter Space for the van der Pol Oscillator // Phys. Scripta, 1988, vol. 38, pp. 9–16.
- [15] Glass L. and Sun J. Periodic Forcing of a Limit-Cycle Oscillator: Fixed Points, Arnolds Tongues, and the Global Organization of Bifurcations // Phys. Rev. E, 1994, vol. 50, no. 6, pp. 5077–5084.
- [16] Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В. Синхронизация автоколебательной системы Ван дер Поля–Дуффинга короткими импульсами // Изв. ВУЗов, ПНД, 2004, т. 12, № 5, с. 16–30.
- [17] Кузнецов А. П., Станкевич Н. В., Тюрюкина Л. В. Особенности картины синхронизации импульсами в системе с трехмерным фазовым пространством на примере системы Ресслера // Изв. ВУЗов, ПНД, 2006, т. 14, № 6, с. 43–53.
- [18] Анищенко В. С. Сложные колебания простых систем. М.: Наука, 1990.