

Об устойчивости томсоновских вихревых конфигураций внутри круговой области

Л. Г. Куракин

Факультет математики, механики и компьютерных наук,
Южный Федеральный Университет
ул. Мильчакова 8а, 344090, Ростов-на-Дону, Россия

Южный математический институт ВНЦ РАН
Владикавказ, 362027, Россия

kurakin@math.rsu.ru

Получено 11 марта 2009 г.

Работа посвящена проблеме устойчивости стационарного вращения системы n одинаковых точечных вихрей, расположенных в вершинах правильного n -угольника радиуса R_0 внутри круговой области радиуса R . Т. Х. Хавелок установил (1931 г.), что соответствующая линеаризованная система имеет экспоненциально растущие решения, когда $n \geq 7$ или если параметр $p = R_0^2/R^2$ больше некоторой критической величины p_{*n} ($p_{*n} < p < 1$) при $2 \leq n \leq 6$. В данной работе задача устойчивости исследована в точной нелинейной постановке во всех остальных случаях: $0 < p \leq p_{*n}$, $n = 2, \dots, 6$. Указаны необходимые и достаточные условия устойчивости и неустойчивости при $n \neq 5$. Приведено подробное доказательство для вихревого треугольника. Часть условий устойчивости обоснована тем, что относительный гамильтониан системы достигает минимума на траектории стационарного движения вихревого треугольника. Особого подхода потребовал случай его знакопеременности. Для анализа применены результаты КАМ-теории. Перечислены и исследованы все встречающиеся здесь резонансы до четвертого порядка включительно. Оказалось, что один из них приводит к неустойчивости.

Ключевые слова: точечный вихрь, стационарное движение, устойчивость, резонанс

L. G. Kurakin

The stability of Thomson's configurations of vortices in a circular domain

The paper is devoted to stability of the stationary rotation of a system of n equal point vortices located at vertices of a regular n -gon of radius R_0 inside a circular domain of radius R . T. H. Havelock stated (1931) that the corresponding linearized system has an exponentially growing solution for $n \geq 7$, and in the case $2 \leq n \leq 6$ — only if parameter $p = R_0^2/R^2$ is greater than a certain critical value: $p_{*n} < p < 1$. In the present paper the problem on stability is studied in exact nonlinear formulation for all other cases $0 < p \leq p_{*n}$, $n = 2, \dots, 6$. We formulate the necessary and sufficient conditions for $n \neq 5$. We give full proof only for the case of three vortices. A part of stability conditions is substantiated by the fact that the relative Hamiltonian of the system attains a minimum on the trajectory of a stationary motion of the vortex n -gon. The case when its sign is alternating, arising for $n = 3$, did require a special study. This has been analyzed by the KAM theory methods. Besides, here are listed and investigated all resonances encountered up to fourth order. It turned out that one of them lead to instability.

Keywords: point vortices, stationary motion, stability, resonance

Mathematical Subject Classifications: 76B47, 34D20, 70K30



1. Введение

В последнее время модель точечных вихрей доказала свою фундаментальность в связи с исследованием вихрей в жидком гелии [1, 2] и электронных колонн в физике плазмы [3, 4], что стимулирует новые приложения и продолжение исследований на всех фронтах (экспериментальном, теоретическом, численном) [5]–[7]. Это уже привело к решению ряда старых проблем. Усилия многих авторов сравнительно недавно завершились математически строгим решением задачи Кельвина (В. Томсона) об устойчивости стационарного вращения системы n одинаковых точечных вихрей на плоскости, расположенных в вершинах правильного n -угольника [8, 9]: устойчивость имеет место лишь при $n \leq 7$, а при $n \geq 8$ рассматриваемый режим неустойчив. При этом в случае $n \neq 7$ линейный анализ оказывается достаточным для заключения о нелинейной устойчивости, а при $n = 7$ необходимо привлекать к рассмотрению и нелинейные члены.

Решена в точной нелинейной постановке и проблема Кельвина, обобщенная на сферу (см. работы [11]–[14], а также обзор [7]). Доказано, что кривизна не может стабилизировать томсоновский вихревой многоугольник и, в частности, делает семиугольник неустойчивым.

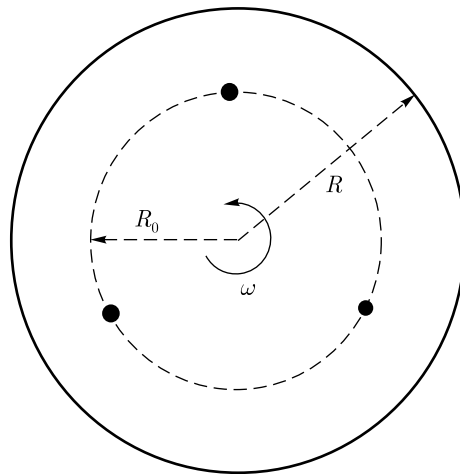


Рис. 1. Стационарное вращение правильного вихревого треугольника внутри круговой области. Угловая скорость вращения ω и устойчивость зависят от параметра $p = R_0^2/R^2$

Данная работа посвящена проблеме Кельвина, когда вихревой n -угольник радиуса R_0 расположен внутри круговой области R с общим центром симметрии (см. рис. 1). Математическими методами она впервые исследована Хавелоком (1931 г.) [17], рассмотревшим ее в линейной постановке. В [17] показано, что соответствующая линеаризованная система имеет экспоненциально растущие решения при $n \geq 7$, а также при $2 \leq n \leq 6$, когда параметр $p = \frac{R_0^2}{R^2}$ больше некоторой критической величины: $p_{*n} < p < 1$. Во всех остальных случаях в линейной системе имеется лишь степенная неустойчивость, обычная и неизбежная для такого рода систем.

Согласно известной теореме Ляпунова, равновесие полной системы неустойчиво, когда линеаризованная система экспоненциально неустойчива. Степенной неустойчивости линеаризованной системы для такого заключения недостаточно — нужно привлекать нелинейные слагаемые.

Обоснование всех условий нелинейной устойчивости в задаче Кельвина на плоскости и сфере основывается на том, что относительный гамильтониан (см., например, [8, 9]) на траектории стационарного движения вихревого n -угольника достигает минимума. При этом устойчивость стационарного движения трактуется как устойчивость по Раусу.

В работах [20, 21] такой подход позволил доказать устойчивость стационарного вращения правильного вихревого n -угольника в круге в точной нелинейной постановке в случаях: а) $0 < p \leq p_{*n}$ при четном $n = 2, 4, 6$; б) $0 < p < p_{03}$ для трех вихрей; в) $0 < p < p_{05}$ в случае $n = 5$. Величины p_{0k}, p_{*n} заданы в таблице 1.

Таблица 1. Критические значения p_{*n} и p_{0n} — корни полиномов P_n и Q_n соответственно

$P_2 = 7p^3 - 3p^2 + 5p - 1$	$p_{*2} \approx .2137403629$
$P_3 = 10p^6 + 3p^5 + 6p^4 + 10p^3 + 6p^2 + 3p - 2$	$p_{*3} \approx 0.3212811546$
$Q_3 = 5p^6 + 9p^5 + 5p^3 + 9p^2 - 1$	$p_{03} \approx 0.3040641646$
$P_4 = 7p^6 + p^4 + 9p^2 - 1$	$p_{*4} \approx .3298399891$
$P_5 = 18p^{10} + 10p^8 + 15p^7 + 34p^5 + 15p^3 + 10p^2 - 2$	$p_{*5} \approx 0.3461008645$
$Q_5 = 27p^{12} + 81p^{11} + 132p^{10} + 135p^9 + 90p^8 + 96p^7 + 153p^6 + 196p^5 + 165p^4 + 60p^3 + 2p^2 - 9p - 3$	$p_{05} \approx .3410383818$
$P_6(x) = 23p^9 + 13p^6 + 37p^3 - 1$	$p_{*6} \approx .2991212951$

Кэмпбелл [16] численно обнаружил знакопеременность относительного гамильтониана при выполнении условий д) $n = 3, p_{03} < p < p_{*3}$ или е) $n = 5, p_{05} < p < p_{*5}$, хотя линеаризованная система обладает при этом лишь степенной неустойчивостью. Устойчивость вихревого треугольника в случае д) проанализирована ниже методами КАМ-теории. В частности, перечислены и исследованы на основе результатов Маркеева и Сокольского (см. книгу [18] и обзор [19]) все встречающиеся здесь резонансы до четвертого порядка включительно. Оказалось, что один из них ($n = 3, p = p_{03}$) приводит к неустойчивости. Теоремы об устойчивости вихревого пентагона в случае е) анонсированы в работах [20, 21]. Их доказательству автор надеется посвятить отдельную работу.

Итак, в данной работе указаны необходимые и достаточные условия устойчивости и неустойчивости правильного точечного вихревого n -угольника ($n \neq 5$), расположенного внутри круга.

Настоящая статья организована следующим образом. В пункте 2 выписаны уравнения движения n точечных вихрей внутри круговой области, указаны их интегралы и группы симметрии. Затем приведено определение стационарного движения. Группе вращений уравнений движения отвечает стационарное вращение правильного вихревого многоугольника внутри круговой области в случае одинаковых интенсивностей вихрей.

Пункт 3 посвящен устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника внутри круговой области.

В теореме 3.1 разбираются случаи, когда линейного приближения (квадратичной части относительного гамильтониана) достаточно для решения проблемы устойчивости. Остальным случаям посвящена теорема 3.2, доказательство которой требует привлечения слагаемых ряда Тейлора относительного гамильтониана до четвертого порядка включительно. Проблема устойчивости, рассматриваемая в теореме 3.2, естественным образом распадается на ряд содержательных задач, требующих индивидуального подхода. Их решение в случае четного числа вихрей ($n = 2, 4, 6$) подробно разобрано в [21]. В пункте 4 дается детальное доказательство утверждений теоремы 3.2, касающиеся вихревого треугольника ($n = 3$):

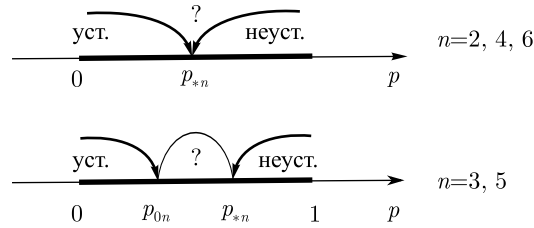


Рис. 2. Условия устойчивости правильного вихревого n -угольника, получаемые методом линеаризации (см. теорему 3.1). Остается открытым вопрос об устойчивости в случаях $p = p_{*n}$ ($n = 2, 4, 6$) и $p_{0n} \leq p \leq p_{*n}$ ($n = 3, 5$)

последовательно анализируются случаи (i) $p \in (p_{03}, p_{*3})$, (ii) $p = p_{03}$, (iii) $p = p_{*3}$.

В пункте 5 даны приложения. Приведены известные результаты о циркулянтных матрицах и выписаны явные выражения ряда величин, используемых в работе.

Результаты данной статьи анонсированы в сообщении [20].

2. Уравнения движения

Систематизации основных результатов по движению точечных вихрей внутри и вне круговой области посвящена работа [22].

Движение системы n точечных вихрей на плоскости внутри круга радиуса R описывается уравнениями:

$$\dot{z}_k^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \prime \frac{\varkappa_j}{z_k - z_j} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \frac{\varkappa_j}{z_k - \hat{z}_j}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k, k = 1, \dots, n$ — комплексные переменные, x_k, y_k — декартовы координаты k -го вихря, \varkappa_k — его интенсивность, $\hat{z}_k = \frac{R^2}{z_k^*}$ — отражение k -го вихря границей круга. Штрих означает пропуск слагаемого $j = k$, а звёздочка — комплексное сопряжение. Фазовое пространство Z системы (2.1) есть $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ с вырезами вдоль всех гиперплоскостей $z_j = z_k, j \neq k$.

Система (2.1) — гамильтонова, с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \varkappa_j \varkappa_k \ln[(z_j - z_k)(z_j^* - z_k^*)] + \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \varkappa_j \varkappa_k \ln[(R^2 - z_j z_k^*)(R^2 - z_j^* z_k)], \tag{2.2}$$

имеет два интеграла: энергию H и суммарный момент инерции

$$M = \sum_{k=1}^n \varkappa_k |z_k|^2. \tag{2.3}$$

Система (2.1) инвариантна относительно группы G , образующие которой суть зеркальное отражение $j: z \mapsto z^*$ и вращение $g^{\text{rot}}: z \mapsto e^{i\alpha} z, \alpha \in \mathbb{R}$. Действие $g \mapsto L_g$ группы G на

фазовом пространстве Z определяется равенством $L_g z = (gz_1, \dots, gz_n)$ для любой точки $z = (z_1, \dots, z_n) \in Z$ и любого движения $g \in G$.

Напомним, что стационарным называется движение, которое осуществляется преобразованиями некоторой однопараметрической подгруппы группы симметрии данного уравнения.

Стационарное движение, отвечающее подгруппе вращений g^{rot} , разыскиваем в виде $z_k = e^{i\omega t} u_k$. Тогда уравнение стационарных движений записывается в виде системы

$$-i\omega u_k^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \prime \frac{\varkappa_j}{u_k - u_j} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \frac{\varkappa_j}{u_k - \widehat{u}_j}, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

для неизвестных $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}$ и $\omega \in \mathbb{R}$.

В случае одинаковых интенсивностей $\varkappa_1 = \dots = \varkappa_n = \varkappa$ хорошо известно ее точное решение

$$u_k = R_0 e^{2\pi i(k-1)/n}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

$$\omega = \frac{\varkappa}{4\pi R_0^2} \left(\frac{2n}{1-p^n} - n - 1 \right), \quad (2.6)$$

где введено обозначение $p = \frac{R_0^2}{R^2}$, а величина R_0 удовлетворяет неравенству $0 < R_0 < R$.

Соответствующий стационарный режим дается равенствами

$$z_k(t) = e^{i\omega t} u_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Таким образом, конфигурация одинаковых вихрей, расположенных на окружности радиуса R_0 в вершинах правильного n -угольника, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \omega(p)$.

3. Устойчивость правильного вихревого n -угольника

Предположим, что все вихри имеют одинаковую интенсивность \varkappa . Исследуем устойчивость стационарного решения (2.7).

Замена переменных в системе (2.1)

$$z_k(t) = R_0 e^{i\omega t} v_k(t)$$

приводит к уравнению относительного движения:

$$\dot{v}_k^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \prime \frac{\varkappa}{v_k - v_j} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \frac{\varkappa}{v_k - \widehat{v}_j} + i\omega v_k^*, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

с относительным гамильтонианом

$$E(v) = H(v) + \frac{\omega}{2} M(v), \quad M = \varkappa \sum_{k=1}^n |v_k|^2, \quad (3.2)$$

где $v = (v_1, \dots, v_n) \in C^n$.

На каждой плоскости переменных v_k введем квазиполярные координаты и запишем v_k в виде

$$v_k = \sqrt{2\left(\frac{R_0^2}{2} + r_k\right)} e^{i\left(\frac{2\pi}{n}(k-1) + \theta_k\right)}. \quad (3.3)$$

В переменных $r = (r_1, \dots, r_n), \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ уравнение (3.1) принимает вид

$$\dot{r}_k = \frac{\partial E}{\partial \theta_k}(v(r, \theta)), \quad (3.4)$$

$$\dot{\theta}_k = -\frac{\partial E}{\partial r_k}(v(r, \theta)). \quad (3.5)$$

Стационарному движению (2.7) отвечает непрерывное семейство равновесий системы (3.4), (3.5), расположенное на прямой $\Gamma = \{(r, \theta) \in R^{2n} : r = 0, \theta_1 = \dots = \theta_n\}$.

Разложение функции $E(v(\rho)), \rho \stackrel{\text{def}}{=} (r, \theta)$ в ряд Тейлора — одно и то же в окрестности любого равновесия семейства Γ :

$$E(v(\rho)) = \frac{\varkappa^2}{4\pi} (E_0 + E_2(v(\rho)) + E_3(v(\rho)) + E_4(v(\rho)) + \dots), \quad (3.6)$$

где точками обозначены слагаемые выше четвертой степени. Квадратичная форма E_2 представима в виде

$$E_2 = (S\rho, \rho), \quad (3.7)$$

$$S = \begin{pmatrix} F_1 & \frac{1}{2}G_0 \\ -\frac{1}{2}G_0 & F_2 \end{pmatrix}, \quad \rho = (r, \theta),$$

а матрица линеаризации системы (3.4), (3.5) на нулевом равновесии имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} -G_0 & 2F_2 \\ -2F_1 & -G_0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Матрицы F_1, F_2, G_0 являются циркулянтами (см. пункт 5.1), причем F_1, F_2 — симметрические матрицы, а G_0 — кососимметрическая. Они выписаны в работе Хавелока [17] и являются полиномами от циклической матрицы \mathbb{C} :

$$F_m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} f_{mk} \mathbb{C}^k, \quad G_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} g_{0k} \mathbb{C}^k.$$

Здесь участвуют величины:

$$f_{10} = -\frac{n^2 - 1}{12} - (n - 1) - \frac{n^2 p^n}{(1 - p^n)^2} + \frac{2n}{1 - p^n} - \frac{2p^2 - 3p + 2}{(1 - p)^2},$$

$$f_{1k} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \cos \frac{2\pi k}{n}} - \frac{p((1 + p^2) \cos \frac{2\pi k}{n} - 2p)}{(1 - 2p \cos \frac{2\pi k}{n} + p^2)^2}, \quad k = 1, \dots, n - 1,$$

$$f_{20} = \frac{n^2 - 1}{12} + \frac{n^2 p^n}{(1 - p^n)^2} - \frac{p}{(1 - p)^2},$$

$$f_{2k} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \cos \frac{2\pi k}{n}} - \frac{p((1 + p^2) \cos \frac{2\pi k}{n} - 2p)}{(1 - 2p \cos \frac{2\pi k}{n} + p^2)^2}, \quad k = 1, \dots, n - 1,$$

$$g_{0k} = \frac{2p(1 - p^2) \sin \frac{2\pi k}{n}}{(1 - 2p \cos \frac{2\pi k}{n} + p^2)^2}.$$

Собственные значения $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}$ и $i\lambda_{0k}$ ($k = 1, \dots, n$) матриц F_1, F_2 и G_0 соответственно также выписаны в работе Хавелока [17]:

$$\lambda_{1k} = -\frac{1}{2}k(n - k) - (n + 1) - \frac{n^2 p^{n-k}(1 + p^k)^2}{2(1 - p^n)^2} - \frac{nk(p^k - p^{n-k})}{2(1 - p^n)} + \frac{2n}{1 - p^n}, \quad (3.9)$$

$$\lambda_{2k} = \frac{1}{2}k(n - k) - \frac{nk(p^k - p^{n-k})}{2(1 - p^n)} - \frac{n^2 p^{n-k}(1 - p^k)^2}{2(1 - p^n)^2}, \quad (3.10)$$

$$\lambda_{0k} = \frac{nk(p^k + p^{n-k})}{1 - p^n} - \frac{n^2 p^{n-k}(1 - p^{2k})}{(1 - p^n)^2}. \quad (3.11)$$

Собственные значения матрицы S получаем, собирая корни полиномов:

$$\Lambda^2 - (\lambda_{1k} + \lambda_{2k})\Lambda + \lambda_{1k}\lambda_{2k} - \frac{1}{4}\lambda_{0k}^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Собственные значения матрицы линеаризации (3.8) вычисляются по формулам [17]:

$$\sigma_k^\pm = -i\lambda_{0k} \pm 2\sqrt{-\lambda_{1k}\lambda_{2k}}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Заметим, что при любом числе вихрей n и значении параметра $p \in (0, 1)$ матрицы F_2, G_0 имеют нулевое собственное значение $\lambda_{2n} = 0, \lambda_{0n} = 0$ и общий собственный вектор $h_n = (1, \dots, 1) : F_2 h_n = 0, G_0 h_n = 0$. Следовательно, матрица S в представлении формы (3.7) также имеет собственный вектор $(0, h_n) \in R^{2n}$, отвечающий нулевому собственному значению: $S(0, h_n) = 0$.

Введем ряд обозначений:

$\Gamma^\perp = R^{2n} \ominus \Gamma$ — подпространство пространства R^{2n} , дополнительное к одномерному подпространству Γ , целиком заполненному равновесиями системы (3.4), (3.5);

$\rho = (r, \theta) \in R^{2n}$ — переменная, представимая в виде $\rho = \rho_\perp + \rho_0$, так что $\rho_\perp \in \Gamma^\perp, \rho_0 \in \Gamma$;

S^\perp — сужение матрицы S на подпространство Γ^\perp , так что ее спектр устойчивости $\sigma(S^\perp) = \sigma(S) \setminus \{0\}$.

Относительный (редуцированный) гамильтониан $E(v(\rho))$ инвариантен относительно замены $\rho \rightarrow \rho + \gamma\rho_0, \gamma \in \mathbb{R}$. Потому в окрестности любого равновесия семейства Γ имеет место асимптотика:

$$E(v(\rho)) = E(v(\rho_\perp)) = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(E_0 + (S^\perp \rho_\perp, \rho_\perp) + o(|\rho_\perp|^2)). \quad (3.14)$$

Следующая теорема обосновывает метод линеаризации в задаче устойчивости вихревого n -угольника. Устойчивость по Раусу стационарного решения (2.7) означает устойчивость семейства равновесий Γ уравнения относительного движения (3.4), (3.5). Неустойчивость понимается в наиболее сильном смысле — (трансверсально) неустойчиво инвариантное множество стационарных вращений. Величины p_{0k}, p_{*k} заданы в таблице 1.

Теорема 3.1. *Стационарное вращение (2.7) правильного вихревого n -угольника устойчиво по Раусу в случаях*

1°. $0 < p < p_{*n}$ при четном $n = 2, 4, 6$;

2°. $0 < p < p_{0n}$ для $n = 3, 5$ а также при $n = 1$,

и неустойчиво, когда $n \geq 7$ или $p_{*n} < p < 1$ при любом $n = 2, \dots, 6$.

Доказательство. Наличие собственных значений (3.13) матрицы линеаризации (3.8) в правой полуплоскости равносильно выполнению неравенства

$$\lambda_{1k} \lambda_{2k} < 0, \quad (3.15)$$

по крайней мере, при одном значении индекса $k = 1, \dots, n$.

Из (3.9), (3.10) следует, что λ_{1k} и λ_{2k} симметричны по k и $n - k$. Чтобы изучить критическое значение индекса k , положим его равным $k = n/2$ для четных n или $k = (n + 1)/2$ — для нечетных.

Для четных n величина $\lambda_{2\frac{n}{2}}$ всегда положительна при $0 < p < 1$:

$$\lambda_{2\frac{n}{2}} = \frac{n^2(1 - p^{n/2})^2}{8(1 + p^{n/2})^2}. \quad (3.16)$$

Условие отрицательности величины $\lambda_{1\frac{n}{2}}$:

$$\lambda_{1\frac{n}{2}} = -\frac{1}{8}n^2 - n - 1 - \frac{1}{2} \frac{n^2 p^{n/2}}{(1 + p^{n/2})^2} + \frac{2n}{1 - p^n} < 0 \quad (3.17)$$

перепишем в виде

$$\begin{aligned} P_n &> 0, \\ P_n &\stackrel{\text{def}}{=} (n^2 + 8n + 8)p^{3n/2} + (3n^2 - 8n - 8)p^n + \\ &\quad + (3n^2 + 8n - 8)p^{n/2} + n^2 - 8n + 8. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Неравенство (3.18) выполняется для $n \geq 8$ и $p > 0$. Полиномы P_2, P_4, P_6 выписаны в таблице 1.



В случае нечетного $n = 2m + 1$ условие $\lambda_{2, \frac{n+1}{2}} > 0$ при $0 < p < 1$ эквивалентно тому, что полином

$$\begin{aligned} \hat{P}_{2m+1} = & p^{4m+2}(m^2 + m) - p^{3m+2}(2m^2 + m) - p^{3m+1}(2m^2 + 3m + 1) + \\ & + p^{2m+1}(6m^2 + 6m + 2) - p^{m+1}(2m^2 + 3m + 1) - \\ & - p^m(2m^2 + m) + (m^2 + m) \end{aligned}$$

не имеет корней на этом интервале. Покажем, что это так. Согласно теореме Декарта [32], число положительных корней многочлена \hat{P}_{2m+1} , подсчитываемых с учетом их кратности, равно числу знакоперемен его ряда коэффициентов либо на четное число меньше. Осталось заметить, что полином \hat{P}_{2m+1} имеет четырехкратный корень $p = 1$, а его ряд коэффициентов имеет четыре знакоперемены.

Действуя аналогичным образом в случае нечетного $n = 2m + 1$, приходим к условию отрицательности $\lambda_{1, \frac{n+1}{2}}$

$$\begin{aligned} & m(m - 3) + m(2m + 1)p^m + (m + 1)(2m + 1)p^{m+1} + \\ & + 2(3m^2 + 3m - 1)p^{2m+1} + (m + 1)(2m + 1)p^{3m+1} + \\ & + m(2m + 1)p^{3m+2} + (m + 4)(m + 1)p^{4m+2} > 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

выполняющемуся при $m \geq 3$ и $p > 0$. Полагая $m = 1$ и 2 , получаем неравенства $P_3 > 0$ и $P_5 > 0$ с полиномами P_3 и P_5 (табл. 1). Для семи вихрей неравенство (3.19) принимает вид

$$P_7 \stackrel{\text{def}}{=} 7p^3(3 + 4p + 10p^4 + 4p^7 + 3p^8 + 4p^{11}) > 0.$$

Обратимся теперь к собственным значениям матрицы S , задаваемым уравнениями (3.12). Условие их положительности имеет вид

$$\lambda_{1k} > 0, \quad (3.20)$$

$$\lambda_{1k}\lambda_{2k} - \frac{1}{4}\lambda_{0k}^2 > 0. \quad (3.21)$$

Из выражений (3.11) следует, что в случае четного n величина $\lambda_{0, \frac{n}{2}} = 0$. Следовательно, при $k = \frac{n}{2}$ неравенство (3.21) противоположно неравенству (3.15).

В случае $n = 3, 5$ неравенство (3.21) равносильно неравенствам $Q_3 < 0$ и $Q_5 < 0$. Полиномы Q_3 и Q_5 заданы в таблице 1.

Пусть выполнены условия 1° теоремы 3.1 в случае четного числа вихрей или 2° в случае нечетного n . Все собственные значения матриц S^\perp положительны. Поэтому квадратичная форма E_2 является положительно-определенной в подпространстве Γ^\perp . Теперь из асимптотики (3.14) следует, что относительный гамильтониан $E(v(\rho))$ достигает трансверсально строгого минимума на семействе равновесий Γ . Таким образом, стационарный режим (2.7) устойчив по Раусу.

Пусть выполнены условия неустойчивости теоремы 3.1. Матрица линеаризации L имеет собственные значения в правой полуплоскости.

Для доказательства неустойчивости осталось заметить, что в рассматриваемой задаче трансверсальная компонента данной системы отделяется — оказывается независимой от тангенциальной. Поэтому неустойчивость для нее следует из общих теорем Ляпунова о неустойчивости. Это завершает доказательство теоремы 3.1.

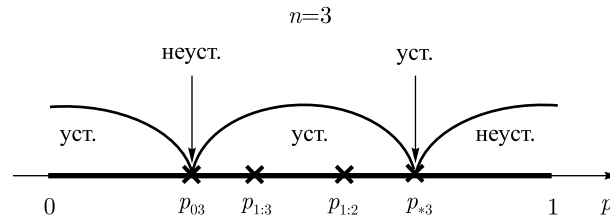


Рис. 3. Критерий устойчивости правильного вихревого треугольника (теоремы 3.1, 3.2). Критическим значениям параметра p соответствуют резонансы: p_{03} — двукратный нуль, диагонаizableмый случай; $p_{k:m}$ — резонанс $k : m$; p_{*3} — резонанс $1 : 1$, недиагонаizableмый случай.

Следующая теорема требует для своего доказательства учета нелинейных слагаемых системы.

Теорема 3.2. *Стационарное вращение (2.7) правильного вихревого n -угольника устойчиво по Раусу в случаях*

- 1) $p = p_{*n}$ при любом $n = 2, 3, 4, 6$,
- 2) $p_{03} < p < p_{*3}$ для $n = 3$, и неустойчиво в резонансном случае
- 3) $n = 3, p = p_{03}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 3.1, 3.2 не дают ответ об устойчивости правильного вихревого пентагона, когда $p_{05} \leq p \leq p_{*5}$. Этому случаю автор планирует посвятить отдельную работу. Результаты частично анонсированы в статьях [20, 21].

Доказательство.

Подробное доказательство устойчивости в критическом случае $p = p_{*n}$ для четного числа вихрей $n = 2, 4, 6$ приведено в статье [21] и состоит в том, что относительный гамильтониан (3.14) системы достигает минимума на траектории стационарного движения вихревого n -угольника. Как и в случае вихревого семиугольника [8, 9, 10] на плоскости, это потребовало привлечение слагаемых ряда Тейлора гамильтониана до четвертого порядка включительно.

Доказательству утверждений теоремы для вихревого треугольника посвящен следующий пункт 4. Прежде всего, благодаря наличию циклической переменной, уменьшаем на единицу (до двух) число степеней свободы рассматриваемой гамильтоновой системы.

В отсутствие резонансов до четвертого порядка включительно и выполнении неравенства 2) устойчивость обосновывается проверкой условий теоремы Арнольда–Мозера [23, 24].

Отдельно исследуется устойчивость во всех встречающихся резонансных случаях (см. книгу Маркеева [18]). Их всего оказалось четыре:

- a) $p = p_{03} \approx .3040641646$ — случай двукратного нулевого собственного значения и простых элементарных делителей (резонанс первого порядка);
- b) $p = p_{1:3} \approx .3168967611$ — случай резонанса $1 : 3$;
- c) $p = p_{1:2} \approx .3193266263$ — случай резонанса $1 : 2$;
- d) $p = p_{*3} \approx 0.3212811546$ — случай равных частот (резонанс $1 : 1$), недиагонаizableмый случай.

4. Детали доказательства теоремы 3.2 для случая вихревого треугольника ($n = 3$)

Пусть $n = 3$. Собственные значения $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}$ и $i\lambda_{0k}$ ($k = 1, 2, 3$) матриц F_1, F_2 и G_0 , соответственно, задаются выражениями (3.9)–(3.11):

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = -\frac{1}{2} \frac{P_3}{(p-1)^2 M}, \quad \lambda_{13} = -2 \frac{2p^6 + 8p^3 - 1}{(p-1)^2 M},$$

$$\lambda_{21} = \lambda_{22} = \frac{1}{2} \frac{(p+2)(2p+1)(p-1)^2}{M}, \quad \lambda_{23} = 0,$$

$$\lambda_{01} = -\lambda_{02} = -3 \frac{(p^2-1)p}{M}, \quad \lambda_{03} = 0.$$

Здесь введено обозначение $M = (1+p+p^2)^2$, а полином P_3 задан в таблице 1.

Матрицы F_1, F_2 имеют общий собственный базис

$$\begin{aligned} h_1 &= \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\ h_2 &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ h_3 &= (1, 1, 1), \end{aligned}$$

так что

$$F_j h_k = \lambda_{jk} h_k, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3.$$

Для матрицы G_0 выполняются соотношения:

$$G_0 h_1 = -\lambda_{01} h_2, \quad G_0 h_2 = \lambda_{01} h_1, \quad G_0 h_3 = 0.$$

Из (3.12) получаем, что критическое значение величины $p = p_{03}$ для знакоположительности собственных значений матрицы S , заданной в (3.7), то есть знакоположительности квадратичной части E_2 гамильтониана (3.6), находится из уравнения

$$4\lambda_{12}\lambda_{22} - \lambda_{02}^2 = 0.$$

Собственные значения матрицы линеаризации L , заданной в (3.8), вычисляются по формулам (3.13). Критическое значение величины $p = p_{*3}$ находится из условия $\lambda_{12} = 0$. Все собственные значения матрицы L лежат на мнимой оси, когда выполнено неравенство $0 < p < p_{*3}$. Если же это условие нарушено грубо ($p_{*3} < p < 1$), то среди них есть с положительной вещественной частью.

Далее понадобится симплектическая матрица A нормализующего преобразования квадратичной части гамильтониана E_2 (способ построения см., например, в книге [18]).

Пусть выполнено условие

$$0 < p < p_{*3}. \quad (4.1)$$

Матрица A имеет вид

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\nu h_2 & -\nu h_2 & \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{13}}} h_3 & \nu h_1 & -\nu h_1 & 0 \\ -\nu^{-1} h_1 & \nu^{-1} h_1 & 0 & -\nu^{-1} h_2 & -\nu^{-1} h_2 & \sqrt{2\lambda_{13}} h_3 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Здесь участвует величина

$$\nu = \sqrt[4]{\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}}}. \quad (4.3)$$

Матрица A симплектическая (см., например, [25]) — выполняется условие:

$$A^T J A = J.$$

Здесь, как обычно,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Симплектическая замена переменных

$$\begin{aligned} (r, \theta) &= A(\xi, \zeta), \\ \xi &= (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \end{aligned} \quad (4.4)$$

приводит квадратичные слагаемые E_2 разложения (3.6) к виду

$$\begin{aligned} E_2(r(\xi, \zeta), \theta(\xi, \zeta)) &= -\omega_1(\xi_1^2 + \zeta_1^2) + \omega_2(\xi_2^2 + \zeta_2^2) + \frac{1}{2}\xi_3^2, \\ \omega_1 &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}Im \sigma_1^+, \quad \omega_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}Im \sigma_2^+. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Величины ω_1, ω_2 вычисляются по формулам (3.13) (см. рис. 4). Они положительны ($\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$) при выполнении условий $p_{03} < p < p_{*3}$.

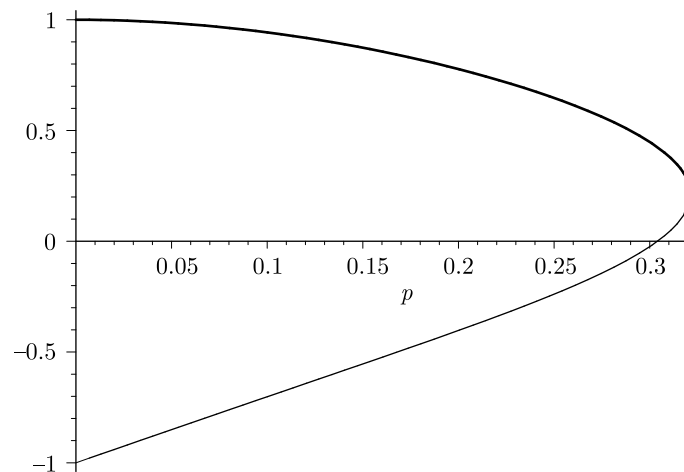


Рис. 4. Графики частот ω_1 (тонкая линия) и ω_2 (толстая линия) в случае вихревого треугольника и $0 < p \leq p_{*3}$

Непрерывное семейство равновесий (3.4), (3.5) лежит на прямой $\Gamma = \{(\xi, \zeta) \in R^6 : \xi = 0, \zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0\}$.

Переменная ζ_3 — циклическая, то есть гамильтониан $E(r(\xi, \zeta), \theta(\xi, \zeta))$ не зависит от переменной ζ_3 . Полагая $\xi_3 = 0$, понижаем число степеней свободы рассматриваемого гамильтониана до двух. Пришли к гамильтоновой системе с гамильтонианом W :

$$W(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) = E(r(\xi^0, \zeta^0), \theta(\xi^0, \zeta^0)), \quad (4.6)$$

где введены величины $\xi^0 = (\xi_1, \xi_2, 0)$, $\zeta^0 = (\zeta_1, \zeta_2, 0)$.

Напомним общепринятую терминологию (см., например, [18]). Пусть (n, m) — произвольный вектор с целочисленными компонентами и выполнены неравенства $n > 0, m > 0, \omega_1 > 0, \omega_2 > 0$. В задаче устойчивости нулевого равновесия гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.5), (4.6) имеет место резонансный случай $n : m$, если выполнено одно из равенств

$$n\omega_1 = m\omega_2$$

или

$$n\omega_2 = m\omega_1.$$

Порядком резонанса при этом называется величина $k = n + m$.

Критический случай двукратного нулевого корня имеет место, если одна из величин $\omega_j (j = 1, 2)$ равна нулю, а другая нет, например, когда выполнены условия

$$\omega_1 = 0, \omega_2 \neq 0.$$

Далее последовательно рассматриваются случаи (i) $p \in (p_{03}, p_{*3})$, (ii) $p = p_{03}$, (iii) $p = p_{*3}$.

4.1. Случай общего положения: $p \in (p_{03}, p_{*3})$

В этой ситуации гамильтониан (4.6) с квадратичной частью (4.5) является знакопеременным ($\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$), но все собственные значения матрицы линеаризации (3.8) лежат на мнимой оси. Доказательство утверждений теоремы 3.2 состоит в проверке условий теоремы Арнольда–Мозера [23, 24, 30]. Для этого нужно нормализовать гамильтониан (4.6) до четвертого порядка включительно. При этом резонансные случаи не выше четвертого порядка подлежат отдельному рассмотрению. Их всего два (см. рис. 3): резонанс $1:3$ ($p_{1:3} \approx .3168967611, \omega_2 = 3\omega_1$) и $1:2$ ($p_{1:2} \approx .3193266263, \omega_2 = 2\omega_1$). Далее будет показано, что при нормализации гамильтониана (4.6) до четвертого порядка включительно резонансные нелинейные слагаемые, специфические для этих резонансов, не появляются. Поэтому и для них применима теорема Арнольда–Мозера.

Квадратичные слагаемые W_2 гамильтониана (4.6), (4.5) уже имеют нормальную форму

$$W_2(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) = -\omega_1 (\xi_1^2 + \zeta_1^2) + \omega_2 (\xi_2^2 + \zeta_2^2).$$

Разложение гамильтониана (4.6), (4.5) в ряд Тейлора в окрестности нуля теперь имеет вид

$$W(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(E_0 + W_2(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) + W_3(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) + \dots) + W_4(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) + \dots \quad (4.7)$$

Здесь W_3, W_4 — формы третьей и четвертой степени соответственно, имеющие следующую структуру:

$$\begin{aligned} W_3 &= c(\zeta_1^2 \zeta_2 - \xi_1^2 \zeta_2 + 2\zeta_1 \xi_1 \xi_2) + \\ &+ d(-\zeta_1 \zeta_2^2 + \xi_2^2 \zeta_1 - 2\zeta_2 \xi_1 \xi_2) + \\ &+ e(-\zeta_1^3 + 3\zeta_1 \xi_1^2) + f(\zeta_2^3 - 3\zeta_2 \xi_2^2), \\ W_4 &= a_4(\xi_2^2 + \zeta_2^2)^2 + b_4(\xi_1^2 + \zeta_1^2)^2 + d_4(\xi_2^2 \zeta_1^2 + \zeta_2^2 \xi_1^2) + \\ &+ e_4(\xi_2^2 + \zeta_2^2)(\xi_1 \xi_2 - \zeta_1 \zeta_2) + f_4(\xi_1^2 + \zeta_1^2)(\xi_1 \xi_2 - \zeta_1 \zeta_2) + \\ &+ g_4(\zeta_1^2 \zeta_2^2 + \xi_2^2 \xi_1^2) + h_4 \xi_1 \zeta_2 \xi_2 \zeta_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Явные выражения их коэффициентов, существенных для дальнейшего, приведены в пункте 5.2.

Все слагаемые третьей степени можно удалить в этом разложении канонической заменой переменных

$$(\xi_i, \zeta_i) \longrightarrow (\Psi_i, \Phi_i), \quad i = 1, 2,$$

задаваемой следующими формулами (см. замечание в конце данного подпункта 4. 1).

$$\Psi_i = \xi_i + \frac{\partial N_3(\xi_1, \xi_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_i}, \quad (4.9)$$

$$\zeta_i = \Phi_i + \frac{\partial N_3(\xi_1, \xi_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \xi_i}. \quad (4.10)$$

Здесь N_3 — форма третьей степени

$$N_3 = a_1 \xi_2 (\xi_2^2 - 3 \Phi_2^2) + b_1 (-\Phi_2^2 \xi_1 + 2 \Phi_2 \Phi_1 \xi_2 + \xi_2^2 \xi_1) + k_1 (-\xi_2 \Phi_1^2 + 2 \Phi_2 \Phi_1 \xi_1 + \xi_2 \xi_1^2) + m_1 \xi_1 (\xi_1^2 - 3 \Phi_1^2) \quad (4.11)$$

с коэффициентами

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{c}{\omega_2 + 2\omega_1}, \quad b_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{\omega_1 + 2\omega_2}, \quad a_1 = \frac{1}{6} \frac{f}{\omega_2}, \quad m_1 = \frac{1}{6} \frac{e}{\omega_1}.$$

Переходим к комплексным переменным:

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} Z_1 + \frac{1}{2} Z_1^*, \quad \Psi_2 = \frac{1}{2} Z_2 + \frac{1}{2} Z_2^*, \quad \Phi_1 = -\frac{i}{2} (Z_1 - Z_1^*), \quad \Phi_2 = -\frac{i}{2} (Z_2 - Z_2^*).$$

Получаем разложение:

$$W(Z_1, Z_2, Z_1^*, Z_2^*) = -\omega_1 |Z_1|^2 + \omega_2 |Z_2|^2 + c_{20} |Z_1|^4 + c_{11} |Z_1|^2 |Z_2|^2 + c_{02} |Z_2|^4 + 0 \cdot Z_1^3 Z_2 + 0 \cdot Z_1^3 Z_2^* + \dots, \quad (4.12)$$

в котором точками обозначены слагаемые четвертой степени и выше, кроме выписанных, задаваемые выражениями:

$$c_{20} = \frac{1}{4} \frac{3e^2 \omega_2 + 6e^2 \omega_1 - c^2 \omega_1}{\omega_1 (\omega_2 + 2\omega_1)} + b_4,$$

$$c_{11} = \frac{2c^2 \omega_2 - d^2 \omega_2 - 2d^2 \omega_1 + c^2 \omega_1}{(\omega_1 + 2\omega_2)(\omega_2 + 2\omega_1)} + \frac{1}{2} d_4 + \frac{1}{2} g_4,$$

$$c_{02} = -\frac{1}{4} \frac{6\omega_2 f^2 - d^2 \omega_2 + 3f^2 \omega_1}{\omega_2 (\omega_1 + 2\omega_2)} + a_4.$$

Заметим, что в разложении (4.12) отсутствуют слагаемые $Z_1^3 Z_2$ и $Z_1^3 Z_2^*$. Это означает, что теорема Арнольда–Мозера применима и в случае резонанса $1 : 3$, то есть когда $\omega_2 = 3\omega_1$ при значении параметра $p = p_{1:3}$.

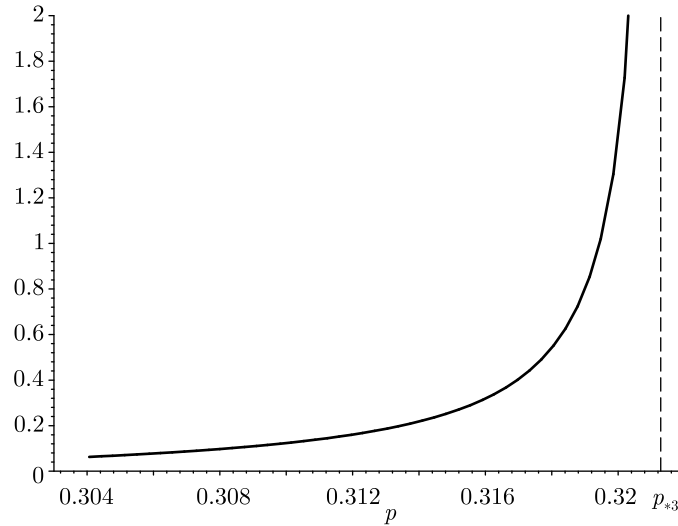
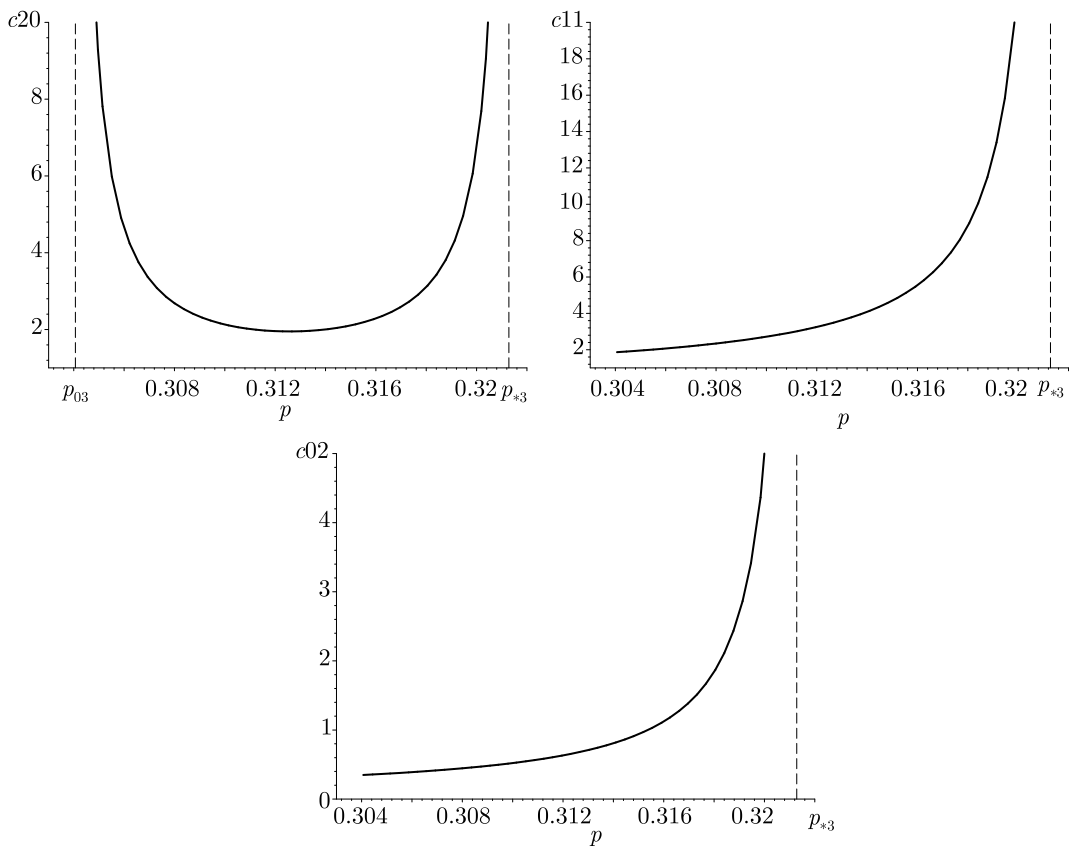
К такому же заключению приходим и в случае резонанса $1 : 2$, когда $\omega_2 = 2\omega_1$ при значении параметра $p = p_{1:2}$. Теперь это следствие отсутствия слагаемых $Z_1^2 Z_2$ и $Z_1^{*2} Z_2^*$ в разложении (4.12).

Согласно теореме Арнольда–Мозера, если выполнено условие

$$c_{20}\omega_1^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_2^2 \neq 0, \quad (4.13)$$

то нулевое равновесие гамильтоновой системы с двумя степенями свободы и гамильтонианом W устойчиво по Ляпунову.



Рис. 5. График зависимости $c_{20}\omega_1^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_2^2$ от p на интервале $p_{03} < p < p_{*3}$ Рис. 6. График зависимости коэффициентов c_{20} , c_{11} , c_{02} от p на интервале $p_{03} < p < p_{*3}$

Вычисления показывают, что условие (4.13) выполнено (см. рис. 5, 6).

Утверждение 2 теоремы 3.2 для $n = 3$ доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Система уравнений (4.9), (4.11) линейна относительно ξ_1 и ξ_2 . Учитывая это, прежние переменные ξ_1 и ξ_2 нетрудно выразить через новые — $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2$.

4.2. Критический случай двукратного нулевого собственного значения: $p = p_{03}$

В этих условиях $\omega_1 = 0$ и матрица линеаризации на нулевом решении гамильтоновой системы с гамильтонианом W имеет двукратное нулевое собственное значение (случай простых элементарных делителей). Разложение (4.7) гамильтониана (4.6) в окрестности нуля до третьего порядка включительно имеет вид:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varkappa^2}{4\pi}(W_0 + W_2 + W_3 + \dots), \\ W_2 &= \omega_{20}(\xi_2^2 + \zeta_2^2), \\ W_3 &= c_0(\zeta_1^2 \zeta_2 - \xi_1^2 \zeta_2 + 2\zeta_1 \xi_1 \xi_2) + \\ &+ d_0(-\zeta_1 \zeta_2^2 + \xi_2^2 \zeta_1 - 2\zeta_2 \xi_1 \xi_2) + \\ &+ e_0(-\zeta_1^3 + 3\zeta_1 \xi_1^2) + \\ &+ f_0(\zeta_2^3 - 3\zeta_2 \xi_2^2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь $\omega_{20} = \omega_2(p_{03}) = 0.4244835326$ и участвуют величины

$$\begin{aligned} c_0 &= 0.628911375, & d_0 &= 0.488941391, \\ e_0 &= 0.256293787, & f_0 &= -0.011646841, \end{aligned}$$

вычисляемые по формулам (5.10) при $p = p_{03}$.

Форма W_3 на ядре квадратичной части W_2 ($\xi_2 = 0, \zeta_2 = 0$) не обращается тождественно в нуль: $W_3(\xi_1, 0, \zeta_1, 0) = e_0(-\zeta_1^3 + 3\zeta_1 \xi_1^2)$. Отсюда (см. [28]) и следует неустойчивость нулевого решения рассматриваемой гамильтоновой системы.

4.3. Критический случай двукратной пары чисто мнимых собственных значений: резонанс 1 : 1, $p = p_{*3}$

Пусть квадрат отношения радиуса окружности, на которой лежат точечные вихри, к радиусу круговой области принимает критическое значение $p = p_{*3}$ (см. таблицу 1). Тогда выполнены условия

$$\lambda_{21}(p_{*3}) > 0, \quad \lambda_{11}(p_{*3}) = \lambda_{12}(p_{*3}) = 0.$$

Матрица линеаризации L состоит из двукратного нулевого собственного значения $\sigma = 0$ и двукратной пары чисто мнимых собственных значений $\sigma = \pm i\lambda_{01}$. Каждому из них соответствует жорданова клетка в жордановой форме матрицы L .

Устойчивость по Раусу стационарного вращения (2.7) правильного вихревого треугольника в рассматриваемых условиях докажем следующим образом. Сначала сведем задачу к исследованию устойчивости гамильтониана с двумя степенями свободы, а затем применим результаты работ [29, 26, 27] об устойчивости равновесий гамильтоновых систем в критическом случае резонанса 1 : 1. Для этого придется нормализовать гамильтониан до четвертого порядка.

Понятие нормальной формы квадратичного гамильтониана в критических случаях двукратных жордановых клеток обсуждается в работах [28, 29] вместе с алгоритмом построения матрицы нормализации. В рассматриваемых условиях квадратичную часть гамильто-

ниана E_2 приводит к нормальной форме следующая матрица B

$$\begin{aligned} B &= [B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6], \\ B_1 &= -\frac{k_0}{x}[h_0, h_1], \quad B_2 = -\frac{k_0}{x}[h_0, h_2], \\ B_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\lambda_{13}(p_{*3})}}[h_3, h_0], \\ B_4 &= k_0x[h_1, h_0], \quad B_5 = k_0x[h_2, h_0], \\ B_6 &= \frac{\sqrt{2\lambda_{13}(p_{*3})}}{\sqrt{3}}[h_0, h_3]. \end{aligned}$$

Здесь B_k — колонки матрицы B ($k = 1, \dots, 6$), введено обозначение $[h_i, h_j]$ для 6-мерного вектора, первые три компоненты которого образуют вектор h_i , а последние h_j . Используются величины

$$k_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x = \sqrt{2\lambda_{21}(p_{*3})}$$

и нулевой вектор $h_0 = (0, 0, 0)$. Приведем собственные значения матриц G_0, F_1 и F_2 :

$$\begin{aligned} i\lambda_{01}(p_{*3}) &= 0.4259563340i, \quad i\lambda_{02}(p_{*3}) = -0.425956334i, \quad \lambda_{03}(p_{*3}) = 0, \\ \lambda_{11}(p_{*3}) &= 0, \quad \lambda_{12}(p_{*3}) = 0, \quad \lambda_{13}(p_{*3}) = 1.567214365, \\ \lambda_{21}(p_{*3}) &= .4327856420, \quad \lambda_{22}(p_{*3}) = .4327856420, \quad \lambda_{23}(p_{*3}) = 0. \end{aligned}$$

Матрица B симплектическая — выполнено условие $B^T J B = J$.

Вводим симплектическую замену переменных

$$(r, \theta) = B(\xi, \zeta). \quad (4.15)$$

Переменная ζ_3 — циклическая переменная гамильтониана E . Полагая равным нулю переменную ξ_3 , понижаем число степеней свободы рассматриваемого гамильтониана до двух.

Квадратичные слагаемые W_2 гамильтониана (4.6), (4.15) приняли нормальную форму

$$W_2(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) = \lambda_{01}(p_{*3})(\zeta_2\xi_1 - \xi_2\zeta_1) + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \xi_1^2).$$

Разложение гамильтониана (4.6), (4.15) в ряд Тейлора в окрестности нуля принимает вид

$$\begin{aligned} W(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) &= \frac{\varkappa^2}{4\pi}(E_0 + W_2(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) + \\ &+ \tilde{c}(3\xi_1^2\xi_2 - \xi_2^3) + \tilde{d}(\xi_2^2\zeta_1 - \xi_1^2\zeta_1 + 2\xi_1\xi_2\zeta_2) + \\ &+ \tilde{e}(-2\xi_1\zeta_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1^2 + \xi_2\zeta_2^2) + \\ &+ \tilde{f}(-\zeta_1^3 + 3\zeta_1\zeta_2^2) + \\ &+ \tilde{a}_4(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Здесь точками обозначены слагаемые выше четвертой степени, кроме выписанного. Величины $\tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{e}, \tilde{f}$ вычисляются по формулам, в которых вместо p следует читать p_{*3} — индекс *3 опущен ради краткости записи:

$$\tilde{c} = \frac{1}{8} \frac{k_0^3(2p+1)(p+2)(p^2+7p+1)(p-1)^2}{(1+p+p^2)^3 x^3} \approx .1721024289,$$

$$\tilde{d} = -\frac{9k_0^3 p(p-1)(p+1)(p^2+7p+1)}{8x(1+p+p^2)^3} \approx .2199243590,$$

$$\tilde{e} = \frac{3k_0^3 x(32p^3 + 9p^5 + 21p^4 + 9p^2 - 3p + 2 + 2p^6)}{8(1+p+p^2)^3} \approx .2156968287,$$

$$\tilde{f} = -\frac{1}{8} \frac{x^3 k_0^3 (44p^9 + 27p^8 + 72p^7 + 78p^6 + 135p^5 + 99p^4 - 18p^3 - 9p + 4)}{(p-1)^3(1+p+p^2)^3} \approx .1300071065,$$

$$\tilde{a}_4 = -\frac{9}{64} \frac{K_4 x^4 k_0^4}{(p-1)^4(1+p+p^2)^4} \approx .1787248462,$$

$$K_4 = 86p^{12} + 69p^{11} + 224p^{10} + 586p^9 + 636p^8 + 609p^7 + 252p^6 + 105p^5 - 36p^4 + 58p^3 + 13p - 10.$$

Сделаем каноническую замену переменных

$$(\xi_i, \zeta_i) \longrightarrow (\Psi_i, \Phi_i), \quad i = 1, 2,$$

задаваемую формулами

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \xi_i + \frac{\partial S_3(\xi_1, \xi_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_i}, \\ \zeta_i &= \Phi_i + \frac{\partial S_3(\xi_1, \xi_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \xi_i}. \end{aligned}$$

Здесь S_3 — форма третьей степени

$$\begin{aligned} S_3 &= (2\xi_2\Phi_1\Phi_2 + \xi_1\Phi_2^2 - \xi_1\Phi_1^2)\tilde{a}_1 + (-\xi_2^2\Phi_2 + \xi_1^2\Phi_2 + 2\xi_2\xi_1\Phi_1)\tilde{b}_1 \\ &+ (-\Phi_2^3 + 3\Phi_1^2\Phi_2)\tilde{c}_1 + (3\xi_1\xi_2^2 - \xi_1^3)\tilde{d}_1, \end{aligned}$$

коэффициенты которой имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \frac{1}{3} \frac{\lambda \tilde{e} + \tilde{f}}{\lambda^2}, \quad \tilde{b}_1 = \frac{1}{9} \frac{-2\lambda \tilde{e} - 2\tilde{f} + 3\lambda^2 \tilde{d}}{\lambda^3}, \\ \tilde{d}_1 &= \frac{1}{27} \frac{-2\lambda \tilde{e} - 2\tilde{f} - 9\lambda^3 \tilde{c} + 3\lambda^2 \tilde{d}}{\lambda^4}, \quad \tilde{c}_1 = \frac{1}{3} \frac{\tilde{f}}{\lambda}, \end{aligned}$$

$$\lambda = \lambda_{01}(p_{*3}) \approx .4259563340.$$

Получили гамильтониан W , нормализованный до третьего порядка

$$\begin{aligned} W(\Psi, \Phi) &= \frac{\varkappa^2}{4\pi} (E_0 + \lambda_{01}(p_{*3})(\Phi_2\Psi_1 - \Psi_2\Phi_1) + \frac{1}{2}(\Psi_2^2 + \Psi_1^2) + \\ &+ \mathbb{A}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 + \dots, \end{aligned}$$

где точками обозначены слагаемые выше четвертой степени, кроме выписанных. Отметим также, что нормализация слагаемых четвертого порядка гамильтониана W не меняет величину \mathbb{A} .

Ляпуновская величина \mathbb{A} вычисляется по формуле

$$\mathbb{A} = \frac{9}{2} \tilde{c}_1^2 + 3\tilde{f}\tilde{a}_1 - 9\lambda\tilde{c}_1\tilde{a}_1 + 3\tilde{e}\tilde{c}_1 + \tilde{a}_4 \approx .2911354372$$



и является положительной. Согласно работам [29, 26, 27], отсюда следует устойчивость по Ляпунову нулевого равновесия гамильтоновой системы (4.6), (4.15). Отметим, что сначала в работе [29] была показана формальная устойчивость и лишь затем в работах [26, 27] разными методами была доказана устойчивость по Ляпунову. Оба эти доказательства опираются на результаты работ Арнольда [30] и Мозера [24].

Осталось заметить, что устойчивость по Ляпунову нулевого решения гамильтоновой системы с гамильтонианом W означает устойчивость семейства равновесий Γ системы (3.4), (3.5) (см., например, пункт IID работы [9]). Это и означает устойчивость по Раусу стационарного вращения (2.7) правильного вихревого треугольника.

5. Приложения

5.1. Циклическая матрица и циркулянты

Здесь мы представим известные (см., например, [31]) результаты о циркулянтных матрицах, использованные в данной работе.

Определим *циклическую матрицу* \mathbb{C} , полагая

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Линейный оператор \mathbb{C} циклически переставляет координаты вектора $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, так что $\mathbb{C}x = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \xi_1)$.

Пусть задан полином

$$f(\lambda) = a_1 + a_2\lambda + \dots + a_n\lambda^{n-1} \quad (5.2)$$

от λ с комплексными коэффициентами. Простое вычисление показывает, что полином $f(\mathbb{C})$ от матрицы \mathbb{C} есть *циркулянт*, то есть матрица вида

$$f(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Характеристический полином $\chi_n(\lambda) = \det(\lambda I - \mathbb{C})$ матрицы \mathbb{C} есть

$$\chi_n(\lambda) = \lambda^n - 1. \quad (5.4)$$

Его корни λ_j — собственные значения матрицы \mathbb{C} — даются равенством

$$\lambda_j = e^{i\frac{2\pi j}{n}}, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (5.5)$$

Все они простые. Им соответствуют собственные векторы

$$\varphi_j = (1, \lambda_j, \dots, \lambda_j^{n-1}), \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.6)$$

Циркулянтная матрица (5.3) имеет те же собственные векторы φ_j , которым соответствуют собственные значения

$$f(\lambda_j) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i \frac{2\pi j}{n} (k-1)}. \quad (5.7)$$

5.2. Явные выражения величин, используемых в пункте 4

Операторная форма слагаемых третьей степени E_3 ряда Тейлора (3.6) имеет вид

$$\begin{aligned} E_3 &= a(F_* r, r^2) + g_1(G_* \theta, r^2) + g_2(G_* r \theta, r) + \\ &+ f_2(F_* r, \theta^2) - 2f_2(F_* r \theta, \theta) + 2f_2(r, \theta^2) + \\ &+ 3g_3(G_* \theta, \theta^2) + (f_3 + 2f_1)(r, r^2). \end{aligned}$$

Здесь F_* и G_* — циркулянтные матрицы, симметричная и кососимметричная соответственно,

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

введены обозначения для векторов

$$r^2 \stackrel{\text{def}}{=} (r_1^2, r_2^2, r_3^2), \quad r\theta \stackrel{\text{def}}{=} (r_1\theta_1, r_2\theta_2, r_3\theta_3), \quad \theta^2 \stackrel{\text{def}}{=} (\theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2),$$

и участвуют величины

$$\begin{aligned} a &= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \frac{p(3p^4 + 17p^3 + 12p^2 + 3p + 1)}{(1 + p + p^2)^3}, \\ f_1 &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \frac{p(16p^5 + 33p^4 + 27p^3 + 20p^2 + 9p + 3)}{(1 + p + p^2)^3}, \\ f_2 &= \frac{1}{2} \frac{p(p^2 - 1)(p^2 + 7p + 1)}{(1 + p + p^2)^3}, \\ f_3 &= \frac{8}{3} \frac{p^3}{(p - 1)^3}, \\ g_1 &= \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p(3p^4 + p^3 - 6p^2 - 3p - 1)}{(1 + p + p^2)^3}, \\ g_2 &= -\frac{2}{9} \sqrt{3} + \sqrt{3} \frac{p(p^4 - p^3 - 6p^2 - p + 1)}{(1 + p + p^2)^3}, \\ g_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{p(p^4 - p^3 - 6p^2 - p + 1)}{(1 + p + p^2)^3}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Коэффициенты c, d, e, f , входящие в представление формы третьей степени W_3 (4.8), задаются равенствами

$$\begin{aligned} -12 \frac{\nu^3}{\sqrt{3}} c &= (3f_3 + 6f_1 - 3a)\nu^6 + \sqrt{3}(g_2 - g_1)\nu^4 + 3f_2\nu^2 - 9g_3\sqrt{3}, \\ -12 \frac{\nu^3}{\sqrt{3}} d &= (3f_3 + 6f_1 - 3a)\nu^6 - \sqrt{3}(g_2 - g_1)\nu^4 + 3f_2\nu^2 + 9g_3\sqrt{3}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}
-12 \frac{\nu^3}{\sqrt{3}} e &= (2f_1 - a + f_3) \nu^6 + \sqrt{3} (g_2 - g_1) \nu^4 - 3f_2 \nu^2 + 3g_3 \sqrt{3}, \\
-12 \frac{\nu^3}{\sqrt{3}} f &= (2f_1 - a + f_3) \nu^6 - \sqrt{3} (g_2 - g_1) \nu^4 - 3f_2 \nu^2 - 3g_3 \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Величина ν вычисляется по формуле (4.3).

Выпишем коэффициенты, входящие в представление (4.8) формы четвертой степени W_4 . Введем полиномы R_k , $k = 1, \dots, 6$, и функцию D :

$$\begin{aligned}
R_1 &= -86p^{12} - 69p^{11} - 224p^{10} - 586p^9 - 636p^8 - 609p^7 - \\
&\quad - 252p^6 - 105p^5 + 36p^4 - 58p^3 - 13p + 10, \\
R_2 &= (p^6 + 9p^5 + 57p^4 + 55p^3 - 9p^2 - 3p - 2)(2p + 1)(p - 1)^5, \\
R_3 &= (2p^6 + 15p^5 + 84p^4 + 149p^3 + 84p^2 + 15p + 2)(p - 1)^6, \\
R_4 &= 4(4p^2 + p + 1)(p^5 + 16p^4 + 31p^3 + 8p^2 - 7p - 4)(p - 1)^5, \\
R_5 &= 36p(p + 1)(p^4 - 4p^3 - 21p^2 - 4p + 1)(p - 1)^5, \\
R_6 &= 2(10p^8 + 53p^7 + 200p^6 + 284p^5 + 246p^4 + 60p^3 - 24p^2 + \\
&\quad + 25p + 10)(p - 1)^4, \\
D &= 32(p - 1)^4 \nu^4 (1 + p + p^2)^4.
\end{aligned}$$

Величины a_4 и b_4 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{1}{6D} (3R_1 \nu^8 - R_4 \nu^6 - 6R_2 \nu^4 + R_5 \nu^2 + 3R_3), \\
b_4 &= \frac{1}{6D} (3R_1 \nu^8 + R_4 \nu^6 - 6R_2 \nu^4 - R_5 \nu^2 + 3R_3).
\end{aligned}$$

Величины d_4 и g_4 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
d_4 &= \frac{1}{D} (R_1 \nu^8 + R_3 - R_6 \nu^4), \\
g_4 &= \frac{1}{D} (3R_1 \nu^8 + 2R_2 \nu^4 + 3R_3).
\end{aligned}$$

Выкладки данной статьи проводились с использованием пакета аналитических вычислений Maple.

Работа поддержана Американским фондом гражданских исследований и развития (АФГИР), грант RUM1-2842-RO-06, Российским фондом фундаментальных исследований, гранты № 08-01-00895, № 09-01-92504-ИК. Исследование выполнено в рамках Европейской научной лаборатории (ЕНО) «Вихревая гидродинамика» (грант РФФИ № 07-01-92213-НЦНИЛ) и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/554.

Список литературы

- [1] Yarmuchk E., Gordon M., and Packard R. Observation of Stationary Vortex Array in Rotating Superfluid Helium // Phys. Rev. Lett., 1979, vol. 43, pp. 214–217.

- [2] Yarmchuk E. and Packard R. Photographic Studies of Quantized Vortex Lines // *J. Low Temp. Phys.*, 1982, vol. 46, pp. 479–515.
- [3] Fine K., Cass A., Flynn W., and Dryscoll C. Relaxation of 2D Turbulence to Vortex Crystal // *Phys. Rev. Lett.*, 1995, vol. 75, pp. 3277–3280.
- [4] Durkin D. and Fajans J. Experiments on Two-Dimensional Vortex Partens // *Phys. Fluids*, 2000, vol. 12, pp. 289–293.
- [5] Newton P. K. *The n -Vortex Problem: Analytical Techniques.* (Appl. Math. Sci., vol. 145.) New York: Springer, 2001.
- [6] Aref H., Newton P. K., Stremmer M. A., Tokieda T., and Vainchtein D. L. Vortex Crystals // *Adv. Appl. Mech.*, 2003, vol. 39, pp. 1–79.
- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: ИКИ, 2005.
- [8] Куракин Л. Г., Юдович В. И. О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // *Докл. РАН*, 2002, т. 384, № 4, с. 476–482.
- [9] Kurakin L. G. and Yudovich V. I. The Stability of Stationary Rotation of a Regular Vortex Polygon // *Chaos*, 2002, vol. 12, pp. 574–595.
- [10] Куракин Л. Г., Юдович В. И. Устойчивость стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей / А. В. Борисов [и др.]. М.–Ижевск: ИКИ, 2003, с. 238–303.*
- [11] Богомолов В. А. Модель колебаний центров действия атмосферы // *Физ. атм. и океана*, 1979, т. 15, с. 243–249.
- [12] Pekarsky S. and Marsden J. Point Vortices on a Sphere: Stability of Relative Equilibria // *J. Math. Phys.* 1998, vol. 39, pp. 5894–5907.
- [13] Borisov A. V. and Kilin A. A. Stability of Thomson’s Configurations of Vortices on a Sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2000, vol. 5, pp. 189–200.
- [14] Куракин Л. Г. О нелинейной устойчивости правильных вихревых многоугольников и многогранников на сфере // *Докл. РАН*, 2003, т. 388, № 4, с. 482–487.
- [15] Kurakin L. G. On Nonlinear Stability of the Regular Vortex Systems on a Sphere // *Chaos*, 2004, vol. 14, pp. 592–602.
- [16] Campbell L. J. Transverse Normal Modes of Finite Vortex Arrays // *Phys. Rev. A*, 1981, vol. 24, pp. 514–534.
- [17] Havelock T. H. The Stability of Motion of Rectilinear Vortices in Ring Formation // *Philos. Mag.*, 1931, vol. 11, no. 70, pp. 617–633.
- [18] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [19] Куницын А. Л., Маркеев А. П. Устойчивость в резонансных случаях // *Итоги науки и техники. Общая механика*, 1979, т. 4, с. 58–139.
- [20] Куракин Л. Г. Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // *Докл. РАН*, 2004, т. 399, № 1, с. 52–55.
- [21] Kurakin L. G. On Stability of a Regular Vortex Polygon in the Circular Domain // *J. Math. Fluid Mech.*, 2005, vol. 7, Suppl. 3, pp. S376–S386.
- [22] Килин А. А., Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области // *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей / А. В. Борисов [и др.]. М.–Ижевск: ИКИ, 2003. С. 414–440.*

- [23] Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук, 1963, т. 18, № 5, с. 13–40.
- [24] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
- [25] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2001. 262 с.
- [26] Ковалев А. М., Чудненко А. Н. К устойчивости положений равновесия двумерной гамильтоновой системы в случае равных частот // Докл. АН УССР, Сер. А, 1977, № 11, с. 1011–1014.
- [27] Сокольский А. Г. Доказательство устойчивости лагранжевых решений при критическом соотношении масс // Письма в астроном. журн., 1978, т. 4, № 3, с. 148–152.
- [28] Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // Прикл. матем. и механ., 1977, т. 41, вып. 1, с. 24–33.
- [29] Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот // Прикл. матем. и механ., 1974, т. 38, вып. 5, с. 791–799.
- [30] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движений в классической и небесной механике // Успехи матем. наук, 1963, т. 18, № 6, с. 91–192.
- [31] Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984. 336 с.
- [32] Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра: Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 300 с.