

Движение твердого тела и точечных вихрей на поверхности двумерной сферы

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, С. М. Рамоданов

Институт компьютерных исследований
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1
borisov@ics.org.ru, mamaev@ics.org.ru, ramodanov@mail.ru

Получено 6 июня 2009 г.

В работе рассматривается класс задач, связанных с динамикой твердого тела, взаимодействующего с точечными вихрями на двумерной сфере. Развивается общий подход к двумерной гидродинамике на сфере. Показана интегрируемость задачи о взаимодействии динамически симметричного кругового цилиндра и единственного вихря. Вводится новая модель массовых вихрей на S^2 , обсуждаются возникающие для этой модели основные задачи — уравнения движения, вопросы интегрируемости, частные решения. Работа является продолжением более ранних исследований авторов, посвященных взаимодействию твердого тела и вихрей на плоскости.

Ключевые слова: гидродинамика на сфере, взаимодействие тел и вихрей в жидкости, массовый вихрь, уравнения движения, интегрируемость

A. V. Borisov, I. S. Mamaev, S. M. Ramodanov

Coupled motion of a rigid body and point vortices on a sphere

The paper is concerned with a class of problems which involves the dynamical interaction of a rigid body with point vortices on the surface of a two-dimensional sphere. The general approach to the 2D hydrodynamics is further developed. The problem of motion of a dynamically symmetric circular body interacting with a single vortex is shown to be integrable. Mass vortices on S^2 are introduced and the related issues (such as equations of motion, integrability, partial solutions, etc.) are discussed. This paper is a natural progression of the author's previous research on interaction of rigid bodies and point vortices in a plane.

Keywords: hydrodynamics on a sphere, coupled body-vortex system, mass vortex, equations of motion, integrability

Mathematical Subject Classifications: 76B47, 70Exx, 70Hxx

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	320
1. Гидродинамика на двумерных поверхностях	321
2. Движение кругового твердого тела с циркуляцией на S^2	329
3. Движение твердого тела с циркуляцией на S^2 , взаимодействующего с точечными вихрями	332
4. Массовые вихри	335
5. Приложение	337
6. Нерешенные задачи	340

Введение

Изучение движений идеальной несжимаемой жидкости, при которых скорости ее частиц параллельны некоторой плоскости (так называемые плоскопараллельные течения), представляет собой классическую и хорошо проработанную область гидродинамики. По сравнению с ней задача о движении жидкости на произвольной двумерной поверхности представляется малоизученной. Первые исследования движения криволинейного слоя жидкости относятся ко второй половине XIX века: это работы Бельтрами, Больцмана, Кирхгофа, Умова и др. из области электродинамики (анalogии в электро- и гидродинамике подробно обсуждались, например, еще у Пуанкаре [36]); эти труды, однако, ограничиваются рассмотрением случая существования однозначного потенциала, т. е. безвихревых течений.

Первое систематическое исследование движения *завихренной* жидкости на двумерных поверхностях принадлежит русскому механику И. С. Громеке [7]. В работе [7] он постулировал само понятие точечных вихрей (привлекая гидродинамические соображения), вывел уравнения их движения, ограничиваясь, однако, случаем сферы и кругового цилиндра, а также, в частности, исследовал задачу о движении точечного вихря на сфере в ограниченных областях. Некоторые его результаты были независимо получены современными авторами (см., например, Кидаджи и Ньютон [30], Кроуди [27]).

Наиболее полное, систематическое исследование по двумерной гидродинамике было выполнено знаменитым немецким ученым Э. Цермело (чье имя широко известно благодаря фундаментальным достижениям в области теории множеств, а также работам по статистической механике). Исследование вопросов вихревой гидродинамики составило предмет его диссертационной работы, состоящей из двух частей [43, 44] (из которых была опубликована лишь первая). Подробное обсуждение диссертации Цермело в научно-историческом контексте имеется в статье [3].



Основной целью работы Громеки было получение уравнений движения точечных вихрей на поверхности сферы. Исследование же Цермело представляет собой фундаментальное построение двумерной гидродинамики, где, рассматривая течение идеальной жидкости на произвольной поверхности, он доказывает основные аналоги теорем из классической гидродинамики на плоскости (интеграл Бернулли, теорема Гельмгольца, сохранение энергии). И лишь основательно разработав общую теорию [43, § 1], Цермело сосредоточивается на задаче о движении точечных вихрей [43, § 2], [44]. В работе [44], весьма ценной в научном отношении, но сохранившейся до недавнего времени лишь в рукописном виде (см. [3]), подробно изучена задача о движении на сфере трех точечных вихрей: выполнено сведение задачи к квадратурам, получено общее представление о движении с помощью теории эллиптических функций (детально разработанной во времена Цермело, но теперь уже основательно позабытой).

Цермело также впервые получил уравнения движения точечных вихрей в гамильтоновой форме. Аналогичные уравнения были получены в 1970-х годах В. А. Богомоловым [1]. В современной литературе работы Богомолова [1, 2] цитируются как исторически первые систематические исследования динамики точечных вихрей на сфере, однако (см. [3]), эти вопросы, как мы видим, были строго исследованы примерно на сто лет раньше в работах Цермело и Громеки. Отметим также, что многие другие результаты диссертации Цермело были независимо получены и развиты в современных работах (например, [16, 24, 31]). В [15] предложена альтернативная гидродинамическая модель движения точечных вихрей на сфере.

Попытка получить уравнения движения точечных вихрей на поверхностях вращения содержится в работе Хелли [29], а авторами препринта [14] рассматривается общий случай движения на поверхностях. Результаты [14, 29] во многом носят лишь предварительный характер.

В настоящей работе мы остановимся вкратце на идеях и методах работ Громеки и Цермело [7, 43, 44], которые демонстрируют два идейно различных подхода к задаче о движении идеальной жидкости на поверхностях. Эти подходы мы будем развивать и в нашей работе, в которой рассмотрим две модельные задачи:

- 1) движение на поверхности сферы кругового твердого тела (сферического сегмента) при наличии циркуляции;
- 2) движение кругового твердого тела, взаимодействующего с точечными вихрями.

Для случая плоскости различные формы уравнений движения, описывающие плоское взаимодействие твердого кругового цилиндра и вихрей в идеальной жидкости, были недавно и почти одновременно получены в работах [38–40]. Гамильтонова форма этих уравнений движения с нетривиальной пуассоновой структурой, а также интегрируемость уравнений движения кругового цилиндра, взаимодействующего с одним точечным вихрем, была указана в [21, 23]. Иная гамильтонова структура уравнений движения была установлена и в [40]. Взаимосвязь между этими пуассоновыми структурами исследована в недавней обзорной работе [42].

1. Гидродинамика на двумерных поверхностях

1.1. Динамика идеальной жидкости на двумерных поверхностях

Уравнения движения в форме Эйлера. Пусть S — двумерная поверхность с метрикой $ds^2 = Ed\xi^2 + Gd\eta^2$. Движение на S точки с массой m под действием сил с потенциа-

лом mV задается обычными уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \xi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \eta}, \quad (1)$$

где $L = \frac{m}{2}(E\dot{\xi}^2 + G\dot{\eta}^2) - mV$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем, как правило, мы предполагаем, что S — двумерная поверхность, погруженная в трехмерное евклидово пространство, хотя при таком подходе это ограничение необязательно.

Как известно (что также отмечает в своей работе Цермело), чтобы перейти от уравнений движения дискретных масс (1) к уравнениям движения идеальной жидкости, необходимо:

- заменить массу m на поверхностную плотность $\rho(\xi, \eta)$,
- в правую часть уравнений добавить градиент давления $p(\xi, \eta)$.

Так что в итоге получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u\sqrt{E}) + u^2\sqrt{E}\frac{\partial(1/\sqrt{E})}{\partial\xi} + v^2\sqrt{G}\frac{\partial(1/\sqrt{G})}{\partial\xi} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\xi} - \frac{\partial V}{\partial\xi}, \\ \frac{d}{dt} (v\sqrt{G}) + u^2\sqrt{E}\frac{\partial(1/\sqrt{E})}{\partial\eta} + v^2\sqrt{G}\frac{\partial(1/\sqrt{G})}{\partial\eta} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\eta} - \frac{\partial V}{\partial\eta}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u = \dot{\xi}\sqrt{E}, v = \dot{\eta}\sqrt{G}$ — составляющие скорости частиц жидкости в направлении координатных линий ξ, η , полная производная по времени представляется в форме $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{v}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\eta}$, V — объемный потенциал внешних сил.

Для получения замкнутой системы, уравнения (2) следует дополнить уравнением неразрывности

$$\sqrt{EG}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho\sqrt{G})}{\partial\xi} + \frac{\partial(v\rho\sqrt{E})}{\partial\eta} = 0. \quad (3)$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие *баротропности*, а именно давление p и плотность ρ связаны тем условием, что выражение $\frac{dp}{\rho}$ вновь является дифференциалом некоторой функции P , то есть

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\xi} = \frac{\partial P}{\partial\xi}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\eta} = \frac{\partial P}{\partial\eta}.$$

Таким образом, в случае баротропности в правой части уравнения (2) стоит дифференциал функции $\Phi = P + V$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для несжимаемой жидкости, $\rho = \text{const}$, условие баротропности заведомо выполнено.



Уравнения движения в форме Громеки–Ламба. Теорема Гельмгольца. Для получения аналога интеграла Коши–Лагранжа, из которого, в свою очередь, можно будет выразить давление жидкости, перепишем уравнения (2) в несколько ином виде. Введем *завихренность* жидкости по формуле

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (v\sqrt{G}) - \frac{\partial}{\partial \eta} (u\sqrt{E}) \right) \quad (4)$$

и, используя (2), получаем уравнения, аналогичные известным в классической гидродинамике как *уравнения Громеки–Ламба*,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Omega v - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\Omega u - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

С помощью (5), а также уравнения неразрывности (3) несложно получить утверждение, которое Цермело называет *теоремой Гельмгольца*.

Теорема 1. *Для баротропного течения идеальной несжимаемой жидкости под действием потенциальных массовых сил циркуляция $\Gamma_C = \int_C u\sqrt{E} d\xi + v\sqrt{G} d\eta$ вдоль замкнутой кривой C , состоящей из одних и тех же частиц жидкости, остается неизменной во время движения.*

В литературе [34] эта теорема (для случая плоскости) более известна как *теорема Томсона*. Общеизвестная теорема Гельмгольца о переносе завихренности потоком получается из нее как простое следствие.

Несжимаемая жидкость. Функция тока. Остановимся теперь подробнее на случае *несжимаемой однородной* жидкости ($\rho = \text{const}$). Пусть массовые силы отсутствуют $V = 0$ и, следовательно, $\Phi = \frac{p}{\rho}$. Аналогично плоскому случаю, введем понятие функции тока $\psi(\xi, \eta)$. Фиксируем на S точку O , тогда значение ψ в точке A положим равным потоку жидкости через кривую, соединяющую O и A :

$$\psi(A) = \int_{OA} \mathbf{v}_n ds,$$

где \mathbf{v}_n — компонента скорости в направлении нормали к кривой OA . В силу несжимаемости этот поток имеет одно и то же значение для всех гомотопных кривых, соединяющих O и A . Как и на плоскости, скорость частиц жидкости равна косому градиенту функции тока:

$$(u, v) = \mathbf{J}\nabla\psi,$$

где \mathbf{J} — оператор поворота на 90 градусов, или в координатной записи

$$u = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (6)$$

Следовательно, завихренность (3) и функция тока ψ связаны соотношением

$$\Omega = -\Delta\psi, \quad (7)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right) \quad (8)$$

— оператор Лапласа–Бельтрами на S . Используя (3), (5) и (7), можно показать [43], что завихренность Ω удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right), \quad (9)$$

являющемуся аналогом уравнения Гельмгольца для случая плоскости. Отметим также, что с учетом (7), уравнение (9) представляет собой *дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка, которому должна удовлетворять функция тока $\psi(\xi, \eta, t)$ течения идеальной несжимаемой жидкости*.

Потенциальные течения. В случае отсутствия завихренности ($\Omega = 0$) течение обладает потенциалом скоростей φ :

$$u = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad (10)$$

а функция тока ψ и потенциал φ представляют собой сопряженные гармонические функции на S , то есть

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \Delta \psi = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (11)$$

Интеграл Коши–Лагранжа. В предположении, что завихренность постоянна, из (5) несложно получить аналог интеграла Коши–Лагранжа (кстати говоря, не отмеченный Цермело). Из (5) и (7) получаем (при $\rho = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(p + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) &= \Omega \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(p + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) &= \Omega \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку завихренность $\Omega = \text{const}$, из (7) находим $\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$, то есть имеет место

Предложение 1. Пусть $\psi(\xi, \eta, t)$, функция тока баротропных течений на произвольной двумерной поверхности идеальной несжимаемой жидкости при условии $\Omega = \text{const}$, функция $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ является гармонической.

Рассмотрим функцию $\varphi(\xi, \eta, t)$, такую, что $\frac{\partial \varphi(\xi, \eta, t)}{\partial t}$ — гармоническая на S функция, сопряженная к $\frac{\partial \psi(\xi, \eta, t)}{\partial t}$ (гармоничность функции $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ в случае постоянной завихренности отмечалась рядом авторов [34]). С учетом двух последних соотношений (11), правые части (12) есть производные одной и той же функции и, следовательно, справедлива

Теорема 2 (интеграл Коши–Лагранжа). *Для баротропных течений идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью $\Omega = \text{const}$ выполнено соотношение*

$$p + \frac{u^2 + v^2}{2} = \Omega\psi - \frac{\partial\varphi}{\partial t} + f(t). \quad (13)$$

Заметим, что произвольную функцию времени $f(t)$ можно обратить в нуль калибровочным преобразованием $\varphi \rightarrow \varphi + \int f(t) dt$, не меняющим поле скоростей.

1.2. Точечные вихри на двумерных поверхностях

Приведем еще раз известные в настоящее время результаты о движении на поверхностях. Как уже указывалось, в работах [7, 43, 44] представлены идейно различные подходы к определению точечного вихря на сфере. Движение точечных вихрей на сфере подробно обсуждается в [16, 24, 25, 35]. Отличная от классической модель вихревого движения на сфере введена недавно в [15]. Уравнения движения точечных вихрей на поверхностях вращения, как уже отмечалось, получены Хелли [29], в предположении, что суммарная интенсивность вихрей равна нулю, а также решение уравнения Пуассона (7) известно. Интересное с дифференциально-геометрической точки зрения обобщение этих частных результатов на случай произвольной компактной двумерной поверхности дано в недавней работе [14]. Отметим также работу [32], где кроме сферы S^2 рассмотрен случай плоскости Лобачевского H^2 . В работе [14] доказана выдвинутая в [32] гипотеза, что вихревой диполь на двумерной поверхности движется по геодезической. Однако даже о движении единственного точечного вихря (самопродвижении) на произвольной двумерной поверхности пока мало что известно (возможно, для трехосного эллипсоида решение может быть получено в эллиптических квадратурах). Рассмотрим подробнее различные возникающие ситуации.

Точечные вихри на компактных поверхностях. Вихревое течение на компактной поверхности S имеет по сравнению с плоскостью существенную особенность:

суммарная завихренность всей поверхности равна нулю.

Действительно, пусть D — область на S . По теореме Стокса, циркуляция скорости вдоль границы ∂D равна двойному интегралу от завихренности Ω по D , но также равна и двойному интегралу со знаком « $-$ » от Ω по M/D , таким образом, $\int_S \Omega dS = 0$.

Следовательно, на компактной поверхности завихренность не может быть сосредоточена в одной точке. На S точечный вихрь может существовать при наличии

1. либо такого же вихря, но противоположной интенсивности [1, 7],
2. либо фоновой завихренности [14, 43, 44].

Уравнение движения точечных вихрей на плоскости. Таким образом, чтобы для заданной поверхности S записать уравнения движения в явном виде, необходимо прежде решить уравнение Пуассона

$$\Delta\psi = \Omega, \quad (14)$$

где Ω — постоянная на S функция (кроме точек, где расположены вихри), Δ — оператор Бельтрами–Лапласа на S .

ЗАМЕЧАНИЕ. Более точно, Ω представляет собой сумму δ -функций Дирака и некоторой константы.

Движение точечного вихря $\mathbf{s}_0 = (\xi_0, \eta_0)$ описывается «десингуляризованной» функцией тока, известной в римановой геометрии как функция Робина [26],

$$\dot{\xi}_0 = \frac{1}{G} \frac{\partial \psi_R(\mathbf{s}_0)}{\partial \eta_0}, \quad \dot{\eta}_0 = -\frac{1}{E} \frac{\partial \psi_R(\mathbf{s}_0)}{\partial \xi_0}, \quad \psi_R(\mathbf{s}_0) = \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0} \left(\psi(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) - \frac{\ln d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)}{2\pi} \right), \quad (15)$$

где функция тока ψ — решение уравнения Пуассона (14) с особенностью в точке \mathbf{s}_0 , $d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$ — геодезическое расстояние от \mathbf{s} до \mathbf{s}_0 . В [14] отмечается, что в отличие от случая плоскости и сферы, на поверхности переменной кривизны S точечный вихрь может двигаться под действием вызванного им самим потока.

Заметим в связи с этим, что явное решение уравнения (14) известно лишь для очень незначительного числа поверхностей. Так, например, в явном виде уравнения движения вихрей на трехосном эллипсоиде до сих пор не получены. В этой связи упомянем также работу [26], в которой рассмотрено движение вихрей по поверхности эллипсоида вращения, полученного малым возмущением сферы: $x^2 + y^2 + x^2/(1 + \varepsilon) = R^2$. В работе выведены приближенные, с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$, уравнения движения вихрей, а также исследованы случаи двух и (численно) трех вихрей.

Точечный вихрь Цермело–Богомолова на сфере. На единичной сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ введем сферические координаты $x = \sin \theta \cos \lambda$, $y = \sin \theta \sin \lambda$, $z = \cos \theta$ и будем искать решение уравнения (14), которое теперь запишется как

$$\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \right) = -\Omega, \quad (16)$$

в виде $\psi = \psi(\theta)$, предполагая $\Omega = \text{const}$. Отсюда немедленно находим

$$\psi = -2\Omega \ln \sin \frac{\theta}{2}. \quad (17)$$

Величина циркуляции жидкости вдоль параллели, определяемой углом θ , равна $-2\pi\Omega(1 + \cos \theta)$.

Определение [43]. Будем говорить, что в точке $\theta = 0$ находится точечный вихрь интенсивности $2\pi\Omega$, если течение жидкости определяется функцией тока (17). Заметим, что при этом равенство нулю общей завихренности выполняется.

ЗАМЕЧАНИЕ. При таком «наивном» способе определения точечного вихря достаточно трудно доказать, что вихри движутся вместе с потоком. Доказательство, предложенное Цермело [44], трудно назвать прозрачным. К сожалению, даже в некоторых классических учебниках это утверждение почему-то принимается как самоочевидное и не требующее доказательства. Более правильно определять точечные вихри посредством предельного перехода, рассмотрев прежде динамику вихревых пятен малого радиуса r и постоянной завихренности Ω , устремляя затем $r \rightarrow 0$ и $\Omega \rightarrow \infty$ таким образом, чтобы произведение Ωr^2 оставалось постоянным (см. [7, 11, 14]).

Для системы из нескольких вихрей со сферическими координатами (θ_i, λ_i) и интенсивностями $\Gamma_i = 2\pi\varepsilon_i$ функция тока представляет собой сумму функций вида (17). Считая, что каждый вихрь системы движется со скоростью, индуцируемой остальными точечными вихрями уравнения движения можно представить в форме

$$\varepsilon_i \sin \theta_i \frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \quad \varepsilon_i \sin \theta_i \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (18)$$



Здесь функция Гамильтона H имеет вид

$$H = \sum_{i < j} \varepsilon_i \varepsilon_j \ln \sin \frac{r_{ij}}{2}, \quad (19)$$

где $r_{ij} = 2R^2(1 - \cos \theta_i \cos \theta_j - \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\lambda_i - \lambda_j))$ — хордовое расстояние между i -тым и j -тым вихрем.

Как уже отмечалось, уравнения Цермело по своей форме тождественны уравнениям Богомолова, имеющим вид [1]:

$$\dot{\theta}_k = \{H, \theta_k\}, \quad \dot{\lambda}_k = \{H, \lambda_k\}, \quad \{\lambda_k, \cos \theta_k\} = \frac{\delta_{ik}}{R^2 \Gamma_i},$$

здесь H лишь несущественным множителем отличается от (19).

Антиподальные точечные вихри на сфере. Помимо решения (17), уравнение (16) допускает решение вида

$$\psi = \alpha \cdot \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right), \quad \alpha = \operatorname{const},$$

что соответствует наличию вихрей противоположной интенсивности в полюсах, причем в остальных точках сферы $\Omega = 0$.

Оказывается, такую пару вихрей можно рассматривать как единый гидродинамический объект, так называемый *антиподальный вихрь*.

Движение антиподальных точечных вихрей изучено в недавней работе [15], где, в частности, показано, что если изначально вихри противоположной интенсивности лежат на концах одного диаметра, то такое же положение они сохраняют и во время движения. Кроме того, в [15] приведена классификация движений *интегрируемой* задачи трех антиподальных вихрей.

Исследования И. С. Громеки. В отличие от Цермело, И. С. Громека приходит к рассмотрению вихревых движений на двумерных поверхностях, изучая течения идеальной жидкости в трехмерном пространстве, параллельные некоторому семейству поверхностей.

Выберем ортогонально систему криволинейных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 , в которой рассматриваемое семейство поверхностей определяется уравнением $\xi_3 = \operatorname{const}$, а метрика представляется в форме

$$ds^2 = h_1^2 d\xi_1^2 + h_2^2 d\xi_2^2 + h_3^2 d\xi_3^2,$$

где h_i — функции координат (коэффициенты Ламе). Будем также предполагать, следуя И. С. Громеке, что

$$h_3 = \operatorname{const}. \quad (20)$$

Замечание. Хорошо известно [28], что всякая двумерная поверхность может быть вложена в триортогональное семейство, то есть в окрестности всякой поверхности можно построить ортогональные криволинейные координаты. В то же время, не всякое однопараметрическое семейство поверхностей может быть достроено до триортогонального семейства (соответствующие семейства называются семействами Ламе).

Пусть u_1, u_2, u_3 — компоненты скорости частиц жидкости в выбранной системе координат, тогда условие параллельности течения семейству $\xi_3 = \text{const}$ представимо в виде

$$u_3 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_3}(h_1 u_1) = \frac{\partial}{\partial \xi_3}(h_2 u_2) = 0. \quad (21)$$

При сделанном выше предположении (20) о семействе поверхностей несложно показать, что если течение параллельно поверхностям $\xi_3 = \text{const}$ в начальный момент времени, то оно остается параллельным $\xi_3 = \text{const}$ и во все последующие моменты времени.

Подставив соотношения (21) в уравнения, определяющие завихренность $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ жидкости

$$\omega_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \frac{\partial h_k u_k}{\partial \xi_j},$$

где ε_{ijk} — антисимметричный тензор Леви-Чивиты, находим

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial \xi_2} \right) = \Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (22)$$

Используя уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} u_i \right) = 0,$$

определим функцию тока ψ для течений параллельных поверхностям $\xi_3 = \text{const}$, по формулам

$$u_1 = -\frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}, \quad u_2 = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}.$$

Таким образом, чтобы найти течения несжимаемой жидкости, параллельные поверхности $\xi_3 = \text{const}$, с заданной завихренностью (22) необходимо решить уравнение вида

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right) \right) = \Delta \psi = -h_3 \Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

где Δ — оператор Лапласа-Бельтрами на S , здесь переменная ξ_3 входит в качестве параметра.

Простейшими поверхностями, удовлетворяющими сформулированным выше условиям, являются:

- параллельные плоскости;
- соосные круговые цилиндры;
- концентрические сферы.

При этом вектор ротора скорости (22) перпендикулярен к ним.

Остановимся подробнее на случае сферы. Так, для обычных сферических координат (r, θ, φ) в \mathbb{R}^3 соответствующие коэффициенты Ламе $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r \sin \theta$, то есть условие (20) выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сам И. С. Громека использует стереографическую проекцию либо координаты проекции Меркатора, для которых $h_1 = h_2$. Хотя это, очевидно, не влияет на результат.

В дальнейшем И. С. Громека предполагает, что

$$\Omega = 0 \text{ всюду, за исключением точек, в которых находятся вихри.}$$

В такой постановке заведомо исключена фоновая завихренность. В связи с этим И. С. Громека сосредоточился на задаче о *движении n точечных вихрей произвольной интенсивности в подобласти сферы, ограниченной неподвижными непроницаемыми стенками.*

В этом случае суммарная завихренность на всей сфере остается равной нулю за счет зеркальных изображений вихрей с противоположной завихренностью за пределами рассматриваемой подобласти. Таким образом, из-за им же самим введенного ограничения, что суммарная завихренность Ω равна нулю, Громека не смог получить уравнения движения вихрей (18) на полной сфере, стягивая границу области в точку.

2. Движение кругового твердого тела с циркуляцией на S^2

Хорошо известно [33], что в обычном евклидовом пространстве E^3 и на плоскости \mathbb{R}^2 движение твердого тела в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности, описывается конечномерной гамильтоновой системой уравнений, известной как уравнения Кирхгофа. С. А. Чаплыгиным [12] было показано, что в случае плоскопараллельного движения твердого тела при наличии постоянной циркуляции вокруг тела в правых частях уравнений Кирхгофа появляются слагаемые, линейные по скоростям. (Чаплыгин показал также интегрируемость этой системы.) В работе [20] доказана неинтегрируемость системы Чаплыгина при наличии поля тяжести, а также содержится краткий обзор известных результатов. Укажем уравнения, аналогичные уравнениям Чаплыгина, для частного случая движения тела, ограниченного круговым контуром, с циркуляцией на поверхности двумерной сферы.

Уравнение движения. Пусть сфера в неподвижной декартовой системе координат задана уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

тело предполагается круговым пятном (сферическим сегментом) радиуса R_1 (см. рис. 1), вне тела сфера покрыта однородной несжимаемой жидкостью (ее плотность принимаем равной единице). Предположим, что циркуляция жидкости вокруг тела равна $\Gamma^* = \text{const}$; по теореме Гельмгольца (смотри раздел 1), она сохраняется во время движения. Пусть \mathbf{r}_0 — вектор, соединяющий центр сферы с центром тела.

Получим уравнения движения тела, учитывая, что на него действуют только нормальная реакция связи (со стороны сферы) и сила гидродинамического давления. Свяжем с телом подвижную систему координат $Ox_1y_1z_1$ (см. рис. 1), полагая, что ось Oz_1 проходит через его центр. Как видно из рисунка, движение двумерного тела на сфере эквивалентно движению обычного (трехмерного) тела с неподвижной точкой, совпадающей с центром сферы O . Обозначим моменты инерции эквивалентного трехмерного твердого тела через A, B, C и запишем теорему об изменении кинетического момента в проекциях на подвижные оси (уравнения Эйлера):

$$A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = M_1, \quad B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1 = M_2, \quad C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = M_3. \quad (23)$$

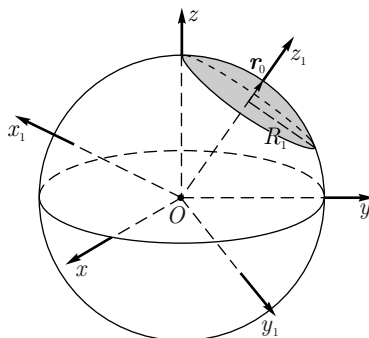


Рис. 1

Здесь ω_i , M_i — проекции угловой скорости (трехмерного) тела и момента внешних сил на подвижные оси $Ox_1y_1z_1$. Мы предполагаем распределения масс в теле произвольным, так что в общем случае $A \neq B$.

Вследствие того, что нормальная реакция, действующая на тело, проходит через центр сферы, ее момент равен нулю; момент сил давления со стороны жидкости \mathcal{M}^L вычислен в приложении (раздел 5), он равен

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^L &= -ar_0 \times a_0 - \Gamma^* \frac{R+d}{2} v_0, \\ a &= \pi R_1^2, \quad d = \sqrt{R^2 - R_1^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

где v_0, a_0 — скорость и ускорение центра тела соответственно. Здесь первое слагаемое обусловлено эффектом присоединенных масс (как и в плоском случае, оно пропорционально ускорению тела), второе слагаемое — аналог подъемной силы Жуковского.

Записывая скорость v_0 и ускорение a_0 через угловую скорость тела по формулам

$$v_0 = \omega \times r_0, \quad a_0 = \dot{\omega} \times r_0 + \omega \times (\omega \times r_0), \quad (25)$$

получим уравнения движения в виде

$$\mathbf{I}\dot{\omega} + ar_0 \times (\dot{\omega} \times r_0) = (\mathbf{I}\omega + ar_0 \times (\omega \times r_0)) \times \omega - \Gamma^* \frac{R+d}{2} \omega \times r_0, \quad (26)$$

где $\mathbf{I} = \text{diag}(A, B, C)$.

Учитывая, что в выбранной подвижной системе координат $r_0 = (0, 0, R)$, представим уравнение (26) в форме

$$\tilde{\mathbf{I}}\dot{\omega} = (\tilde{\mathbf{I}}\omega + \mathbf{k}) \times \omega, \quad (27)$$

где $\tilde{\mathbf{I}} = \text{diag}(A + aR^2, B + aR^2, C)$, $\mathbf{k} = \left(0, 0, \Gamma^* \frac{R(R+d)}{2}\right)$.

Сравнивая (27) с уравнениями уравновешенного гиростата без внешнего поля [4], заключаем, что справедлива следующая

Теорема. *Динамика осесимметричного (двумерного) твердого тела (с произвольным распределением масс) на сфере, погруженного в идеальную несжимаемую жидкость с ненулевой циркуляцией, эквивалента динамике волчка в случае Жуковского–Вольтерра при условии, что гиростатический момент направлен вдоль главной оси.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Как известно, система Жуковского–Вольтерра описывает свободное движение твердого тела, внутри которого имеется уравновешенный вращающийся ротор с постоянным вектором гиристатического момента \mathbf{k} . Жуковский [8] отметил аналогию этой задачи с динамикой твердого тела, внутри которого имеются неодносвязные (типа тора) полости, заполненные идеальной жидкостью, совершающей потенциальные движения. Наша теорема устанавливает другую возможную аналогию с системой Жуковского–Вольтерра, также имеющую гидродинамический характер.

По-видимому, справедливо естественное обобщение этого результата.

Гипотеза. Уравнения, описывающие движение произвольного тела на сфере с ненулевой циркуляцией, эквивалентны системе Жуковского–Вольтерры с произвольным вектором гиристатического момента.

Первые интегралы. Система (27), как известно [4], допускает два первых интеграла — энергию и квадрат момента:

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}), \quad F = (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}, \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}).$$

Следовательно, эта система интегрируема, ее качественный анализ можно найти в книге [4], где также содержится подробная библиография по различным аспектам динамики системы Жуковского–Вольтерры. Рассмотрим более подробно один простейший случай.

Случай динамической симметрии. В этом случае $A = B$; в частности, если масса равномерно распределена по телу, то

$$\begin{aligned} \mu &= (C - A)(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_0)/R^2, \\ A &= m \frac{4R^3 - d(3R^2 + d^2)}{6(R - d)}, \quad C = m(d + 2R)(R - d). \end{aligned}$$

Уравнения движения (27) в этом случае допускают также линейный интеграл

$$\omega_3 = \text{const.} \tag{28}$$

Чтобы найти траекторию движения, воспользуемся тем, что вектор момента $\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}$ постоянен в неподвижных осях $Oxyz$; с помощью интеграла (28) представим его в следующем виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k} &= \lambda\boldsymbol{\omega} + \mu\mathbf{r}_0, \\ \lambda &= A + aR^2, \quad \mu = \bar{\Gamma}d + \frac{C - A - aR^2}{R}\omega_3. \end{aligned} \tag{29}$$

Поскольку λ, μ скалярные постоянные, его вид не меняется в неподвижных осях. Домножая векторно (29) на \mathbf{r}_0 и учитывая соотношение $\dot{\mathbf{r}}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$, находим

$$\lambda\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{K} \times \mathbf{r}_0,$$

где \mathbf{K} — постоянный вектор. Следовательно, тело движется с постоянной скоростью v_0 вокруг вектора \mathbf{K} по окружности радиуса

$$\frac{\lambda R v_0}{\sqrt{\mu^2 R^4 + \lambda^2 v_0^2}} \leq R.$$

Заметим, таким образом, что наличие циркуляции препятствует движению тела по геодезической: лишь в пределе $v_0 \rightarrow \infty$ тело движется вдоль большой окружности.



3. Движение твердого тела с циркуляцией на S^2 , взаимодействующего с точечными вихрями

Уравнения движения. Пусть в условиях предыдущей задачи по поверхности сферы помимо тела движется вихрь интенсивности Γ ; как и выше, контур тела предполагаем круговым, а распределение масс произвольным. Положение вихря определяется радиус-вектором \mathbf{r}_1 из центра сферы. В выражении (24) для момента сил давления жидкости появляется дополнительное слагаемое (вывод дан в приложении), пропорциональное абсолютной скорости \mathbf{v}_1 самого вихря, а также скорости $\tilde{\mathbf{v}}_1$ некоторой точки, так что

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^L &= -a\mathbf{r}_0 \times \mathbf{a}_0 - \Gamma^* \frac{R+d}{2} \mathbf{v}_0 + \Gamma R(\tilde{\mathbf{v}}_1 - \mathbf{v}_1), \\ \tilde{\mathbf{r}}_1 &= C_0 \mathbf{r}_0 + C_1 \mathbf{r}_1, \quad C_0 = \frac{Rd - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)}{R^2 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)}, \quad C_1 = \frac{R(R-d)}{R^2 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Геометрический смысл вектора пояснен на рис. 2, где \mathbf{r}_1^i — радиус-вектор инверсносимметричной вихрю \mathbf{r}_1 точки, то есть при стереографической проекции их образы инверсносимметричны относительно проекции границы тела.

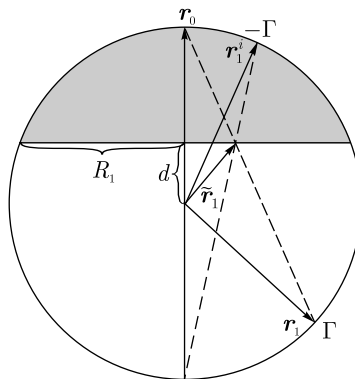


Рис. 2

В пределе $R \rightarrow \infty$ вектор $\tilde{\mathbf{r}}_1$ переходит в \mathbf{r}_1^i , выражение (30) становится полностью аналогичным выражению для силы, действующей на круговой цилиндр в плоском случае [38].

В неподвижной системе координат скорость вихря определяется десингуляризованной функцией тока (функция Кирхгофа–Рауса) согласно соотношениям (15). Следовательно, в подвижной системе $Ox_1y_1z_1$, связанной с телом, эволюция положения вихря описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{R} \mathbf{r}_1 \times \frac{\partial \psi_R}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad (31)$$

где (см. приложение)

$$\begin{aligned} \psi_R &= \frac{d-R}{R^2 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0) + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln((\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) - Rd) - \\ &\quad - \frac{\bar{\Gamma}}{4\pi} \ln((\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) - R^2), \end{aligned} \quad (32)$$

а $\frac{\partial \psi_R}{\partial \mathbf{r}_1}$ — вектор, компоненты которого производные функции ψ_R по соответствующим координатам вектора \mathbf{r}_1 . Заметим также, что циркуляцию Γ^* вокруг тела мы получаем, поместив в его центр точечный вихрь, интенсивность которого $\bar{\Gamma}$ определяется по формуле

$$\bar{\Gamma} = \Gamma^* \frac{2R}{d + R}. \tag{33}$$

Уравнения (23) (в которых необходимо положить $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_i^L$, где \mathcal{M}_i^L определены согласно (29)) совместно с (30) определяют полную систему уравнений, описывающих движение системы «тело + вихрь» в подвижных осях $Ox_1y_1z_1$. Несложно показать, что эти уравнения можно представить в форме, близкой к лагранжевой (но не лагражевой! — это типично для задач вихревой динамики).

Предложение. *Уравнения движения твердого тела, ограниченного круговым контуром, и вихря на поверхности двумерной сферы имеют вид*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega}, & \Gamma \dot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{1}{R} \mathbf{r}_1 \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_1}, \\ L &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}) + \Gamma \tilde{\psi}_R, \end{aligned}$$

$$\tilde{\psi}_R = \psi_R - R(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_1) + d(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_0) = -R(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{r}_1) + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(Rd - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)) - \frac{\bar{\Gamma}}{4\pi} \ln(R^2 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)), \tag{34}$$

где, как и выше, $\tilde{\mathbf{I}} = \text{diag}(A + aR^2, B + aR^2, C)$, $\mathbf{k} = (0, 0, \Gamma^* \frac{R(R+d)}{2})$.

Доказательство. Согласно (27) и (30), уравнения движения твердого тела в подвижных осях имеют вид

$$\tilde{\mathbf{I}} \dot{\boldsymbol{\omega}} = (\tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) \times \boldsymbol{\omega} + \Gamma R(\tilde{\mathbf{v}}_1 - \mathbf{v}_1), \tag{35}$$

где $\tilde{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_1$ — абсолютные скорости вихря и точки $\tilde{\mathbf{r}}_1$. С другой стороны,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) \cdot = \tilde{\mathbf{I}} \dot{\boldsymbol{\omega}} - \Gamma R(\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_1), \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} = (\tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) \times \boldsymbol{\omega} - \Gamma R(\tilde{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{r}_1) \times \boldsymbol{\omega};$$

замечая, что скорости в подвижных осях связаны с абсолютными скоростями соотношениями $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$, $\tilde{\mathbf{v}}_1 = \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_1$, приходим к уравнениям (35). Аналогично получается уравнение (31) для вихря.

Кроме того, первое слагаемое в функции тока (31), описывающее движение жидкости, порожденное смещением лишь одного тела, представляется в форме

$$\psi_R^{(0)} = \frac{d - R}{R^2 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0) = R(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{r}}_1) - d(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_0)$$

и, как в плоском случае [22], оказывается замечательным образом связанным с образом вихря $\tilde{\mathbf{r}}_1$, через который выражается момент сил (30), действующих со стороны жидкости на тело. ■



Гамильтонова форма уравнений движения и первые интегралы. Выполним преобразование Лежандра системы (34) по угловым скоростям ω :

$$M = \frac{\partial L}{\partial \omega} = \tilde{\mathbf{I}}\omega + \tilde{\mathbf{k}}, \quad \tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - \Gamma R(\tilde{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{r}_1),$$

$$H = (M, \omega) - L = \frac{1}{2}(M - \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{I}}^{-1}(M - \tilde{\mathbf{k}})) - \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln(Rd - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)) + \frac{\Gamma \bar{\Gamma}}{4\pi} \ln(R^2 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)). \quad (36)$$

Прямой проверкой можно показать, что справедлива следующая

Теорема. Уравнения движения тела, ограниченного круговым контуром, и точечного вихря на сфере в подвижных осях $Ox_1y_1z_1$ можно представить в гамильтоновой форме

$$\dot{M}_i = \{M_i, H\}, \quad \dot{x}_1 = \{x_1, H\}, \quad \dot{y}_1 = \{y_1, H\}, \quad \dot{z}_1 = \{z_1, H\},$$

где гамильтониан задается соотношением (36), а пуассонова структура имеет вид

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{x_1, y_1\} = \frac{1}{\Gamma R} z_1, \quad \{y_1, z_1\} = \frac{1}{\Gamma R} x_1, \quad \{z_1, x_1\} = \frac{1}{\Gamma R} y_1. \quad (37)$$

Скобка Ли–Пуассона (37) соответствует алгебре Ли $so(3) \oplus so(3)$, она вырождена и обладает двумя функциями Казимира (которые, очевидно, являются первыми интегралами уравнений движения)

$$\Phi_1 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2, \quad \Phi_2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R^2. \quad (38)$$

Ограничивая систему на симплектический лист, задаваемый соотношениями (38), получим гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Для ее интегрируемости по теореме Лиувилля необходим еще один (помимо гамильтониана) дополнительный первый интеграл.

Динамически симметричный случай. Пусть $A = B$, тогда система интегрируема благодаря наличию дополнительного интеграла типа Лагранжа [4]

$$\omega_3 = \frac{\partial H}{\partial M_3} = \frac{1}{C} \left(M_3 - \Gamma^* \frac{R(R+d)}{2} + \Gamma R(\tilde{z}_1 - z_1) \right) = \text{const.}$$

Следствие. Задача о движении кругового динамически симметричного тела и одного точечного вихря на поверхности сферы интегрируема по Лиувиллю.

Аналогичный результат для плоскости был получен в [5] и подробно изучен в [22, 23, 38, 39]. Отметим, что, как показывают численные эксперименты, при $A \neq B$ интегрируемость системы пропадает и возникают хаотические движения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение об интегрируемости можно получить и более простым способом. Переписав уравнение движения твердого тела (35) в неподвижной системе координат и проинтегрировав его, найдем

$$\lambda \omega = \Gamma R(\tilde{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{r}_1) - \mu \mathbf{r}_0 + \mathbf{K}, \quad (39)$$

где \mathbf{K} — фиксированный в абсолютном пространстве вектор, причем $\mathbf{K}^2 = \Phi_1$ (см. (38)), а коэффициенты λ и μ определены в (29). Домножая уравнение (39) векторно на \mathbf{r}_0 , получаем

$$\lambda \mathbf{r}_0 = \Gamma R \mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r}_1 - \tilde{\mathbf{r}}_1) - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{K}. \quad (40)$$

Уравнение движения вихря (31) в неподвижной системе координат имеет вид

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{1}{R}\mathbf{r}_1 \times \frac{\partial\psi_R}{\partial\mathbf{r}_1}. \tag{41}$$

Система шести уравнений (40) и (41) относительно $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$ имеет 4 первых интеграла

- а) функция Гамильтона (36), в которой ω следует выразить из (39);
- б) $r_0^2 = R^2$;
- в) $r_1^2 = R^2$;
- г) $(\Gamma R(\tilde{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{r}_1) - \mu\mathbf{r}_0 + \mathbf{K}, \mathbf{r}_0) = \text{const}$ (проекция угловой скорости на ось симметрии тела постоянна).

Также система сохраняет стандартную меру и, следовательно, является интегрируемой согласно теории последнего множителя Якоби.

4. Массовые вихри

Уравнения движения. Предположим, что тело динамически симметрично и устремим радиус тела к нулю, оставляя неизменной его массу получим объект, который, как и в плоском случае [22], будем называть *массовым вихрем*. Рассуждая как в [22], можно показать, что динамика двух массовых вихрей в неподвижных осях *Oxyz* описывается уравнениями

$$\begin{aligned} m_1 R^2 \mathbf{r}_1 \times \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\Gamma_1 R \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1}{R^2 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}, \\ m_2 R^2 \mathbf{r}_2 \times \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\Gamma_2 R \dot{\mathbf{r}}_2 + \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{R^2 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}. \end{aligned} \tag{42}$$

Задача о движении двух массовых вихрей в общем случае неинтегрируема даже на плоскости [9, 14]. Поэтому, по-видимому, не будет интегрируема и система (42). Тем не менее, было бы интересно провести качественное исследование уравнений (42).

Гамильтонова форма и первые интегралы. Определим новые переменные

$$\mathbf{M}_\alpha = m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \dot{\mathbf{r}}_\alpha + \frac{\Gamma_\alpha}{R} \mathbf{r}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{43}$$

и перепишем уравнение (42) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}_\alpha &= -\mathbf{r}_\alpha \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_\alpha}, \quad m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha = -\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{M}_\alpha, \\ U &= -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi R^2} \ln(R^2 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)). \end{aligned} \tag{44}$$

Несложно убедиться, что эти уравнения гамильтоновы со скобкой Пуассона (это скобка Ли–Пуассона, определяемая алгеброй $e(3) \oplus e(3)$)

$$\{M_{\alpha i}, M_{\alpha j}\} = -\varepsilon_{ijk} M_{\alpha k}, \quad \{M_{\alpha i}, x_{\alpha j}\} = -\varepsilon_{ijk} x_{\alpha k}, \quad \alpha = 1, 2, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{45}$$

(здесь опущены нулевые скобки) и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_1) + \frac{1}{m_2} (\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_2) \right) + U. \tag{46}$$

Причем для скобки Пуассона (45) постоянные функций Казимира следует зафиксировать следующим образом:

$$K_{\alpha}^{(1)} = (\mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha}) = R^2, \quad K_{\alpha}^{(2)} = (\mathbf{M}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha}) = R^{-1}\Gamma_{\alpha}.$$

Любопытно, что уравнения движения (44), пуассонова структура (45) и гамильтониан (46) совпадают со случаем обычной задачи двух тел на сфере [17]. Отличие заключается в том, что для взаимодействующих тел все постоянные $K_{\alpha}^{(2)} = 0$, а в случае массовых вихрей пропорциональны циркуляциям.

Система (44) обладает векторным интегралом суммарного момента

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \text{const.}$$

Отметим также, что в работе [17] приведены результаты численных экспериментов, свидетельствующие о неинтегрируемости задачи двух тел на сфере с ньютоновским и гуксовским потенциалами.

Задача n -массовых вихрей. Несложно обобщить эти уравнения на случай произвольного количества массовых вихрей, при этом гамильтониан представляется в форме

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{m_{\alpha}} (\mathbf{M}_{\alpha}, \mathbf{M}_{\alpha}) - \sum_{\alpha < \beta}^n \frac{\Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta}}{4\pi R^2} \ln(R^2 - (\mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\beta})),$$

где \mathbf{r}_{α} — радиус-вектор соответствующего вихря, а \mathbf{M}_{α} — определенный по формуле (43) момент.

Пуассонова структура определяется алгеброй $\bigoplus_{\alpha=1}^n e(3)$ и имеет вид

$$\{M_{\alpha i}, M_{\alpha j}\} = -\varepsilon_{ijk} M_{\alpha k}, \quad \{M_{\alpha i}, x_{\alpha j}\} = -\varepsilon_{ijk} x_{\alpha k}, \quad ijk = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1 \dots n,$$

соответствующие функции Кирхгофа фиксированы следующим образом

$$(\mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha}) = R^2, \quad (\mathbf{M}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha}) = R^{-1}\Gamma_{\alpha}, \quad \alpha = 1 \dots n.$$

Интеграл полного момента

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{M}_{\alpha}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения массовых вихрей на плоскости были получены независимо в работах [9, 22, 37], где также указаны физические и гидродинамические задачи, в которых может быть использована данная модель. Массовые вихри на сфере могут рассматриваться как реальная альтернатива различным существующим моделям вихревых движений в земной атмосфере и океане (циклонов, смерчей, океанических вихревых течений и т.д.). Более физической данную модель делает учет массы вихревого столба, наличие которого является естественным, так как мощные вихревые образования, такие как торнадо, при движении втягивают в себя крупные инородные объекты. В любом случае, в вопросе применимости той или иной модели решающее значение имеют разработка предложенной теоретической модели и ее экспериментальная верификация. В качестве других вихревых моделей отметим также движение вихресточников и вихревых пятен [18, 19].

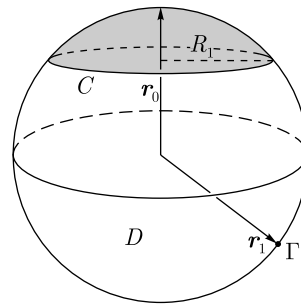


Рис. 3

5. Приложение

Функция тока. Течение жидкости на сфере в области D снаружи от тела, ограниченного контуром C (рис. 3), полностью определяется функцией тока $\psi(\xi, \eta, t)$, которая, как было показано выше, должно удовлетворять

- системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right), \quad \Delta \psi = -\Omega; \quad (\text{П1})$$

- условию непротекания на границе тела C :

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_C = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\tau}}|_C, \quad (\text{П2})$$

где $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ — нормальный и касательный векторы к границе C , \mathbf{v} — вектор скорости соответствующей точки границы тела;

- при отсутствии вихря ($\Gamma = 0$) циркуляция по контуру, охватывающему тело, равна

$$\int_C (\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) dl = \Gamma^*. \quad (\text{П3})$$

Согласно принципу суперпозиции, искомую функцию тока можно представить в форме

$$\psi = v_{ox}\psi_x^{(0)} + v_{oy}\psi_y^{(0)} + v_{oz}\psi_z^{(0)} + \psi_c + \psi_v,$$

где $\mathbf{v}_0 = (v_{ox}, v_{oy}, v_{oz})$ — скорость центра тела, слагаемые ψ_c, ψ_v пропорциональны Γ^* и Γ соответственно.

Течение жидкости, вызванное движением одного только тела со скоростью \mathbf{v}_0 , описывается функцией тока

$$\psi^{(0)}(\mathbf{r}) = v_{ox}\psi_x^{(0)} + v_{oy}\psi_y^{(0)} + v_{oz}\psi_z^{(0)} = \frac{d - R}{R^2 - (\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0). \quad (\text{П4})$$

Выполнение условия непротекания (П2) проверяется непосредственно. Функция $\psi^{(0)}$ гармонична (вне тела $\Delta \psi^{(0)} = 0$) и, следовательно, удовлетворяет (9). Соответствующее течение обладает нулевой циркуляцией вдоль границы тела C .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формулу (П4) можно получить эмпирически следующим образом. Известно, что поле скоростей, порожденное движущимся на плоскости круговым цилиндром, представляет собой течение, индуцированное диполем. Предположим, что этот же результат имеет место и на сфере. Рассмотрим вначале на плоскости такое течение, при котором скорости всех частиц одинаковы. Известно, что такое течение порождено диполем в бесконечности. Отобразив с помощью стереографической проекции это течение на сферу, после несложных преобразований придем к формуле (П4).

Как и в плоском случае, течение, вызванное точечным вихрем ψ_v , получается добавлением инверсносимметричного (при стереографической проекции) вихря противоположной завихренности, так что

$$\psi_v(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln(R^2 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{r})) + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(R^2 - (\mathbf{r}_1^i, \mathbf{r})),$$

$$\mathbf{r}_1^i = \left(R^2 + d^2 - \frac{2d}{R}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)\right)^{-1} \left((R^2 - d^2)\mathbf{r}_1 + 2(Rd - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1))\mathbf{r}_0\right),$$

где \mathbf{r}_1^i — радиус-вектор инверсносимметричной вихрю точки. Функция ψ_v гармонична вне тела всюду (за исключением точки \mathbf{r}_1) и, следовательно, удовлетворяет (П1).

Обсудим функцию ψ_c , определяющую чисто циркуляционное обтекание твердого тела. На сфере, в отличие от случая плоскости, циркуляции по гомотопным контурам, охватывающим вихрь, вообще говоря различны. Как было показано в разделе 1.2, если на сфере в точку $\theta = 0$ поместить вихрь интенсивности Γ , то циркуляция вдоль параллели $\theta = \theta_0$ будет равна $\Gamma(1 + \cos \theta_0)/2$. Поэтому для выполнения условия (П3) в центр тела следует поместить точечный вихрь, интенсивность которого $\bar{\Gamma}$ и циркуляция Γ^* связаны соотношением (33), так что

$$\psi_c = -\frac{\Gamma^*}{4\pi} \frac{2R}{R+d} \ln(R^2 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r})).$$

В области D так определенная ψ_c удовлетворяет уравнению $\Delta\psi = \frac{\bar{\Gamma}}{4\pi R^2}$, а значит, и уравнению (П1).

Таким образом, функция тока полностью определена. Для дальнейшего отметим, что в области D она удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi = \frac{\bar{\Gamma}}{4\pi R^2} - \Gamma\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad (\text{П5})$$

где Δ — оператор Лапласа–Бельтрами (8), \mathbf{r}_1 — радиус-вектор вихря, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ — дельта-функция Дирака.

Функция Кирхгофа–Рауса. Абсолютная скорость вихря \mathbf{v}_1 определяется соотношением (15), которое в декартовых координатах может быть записано в форме

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{R}\mathbf{r}_1 \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\psi(\mathbf{r}) + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(R^2 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{r})) \right] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}.$$

После несложных преобразований находим, что

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{R}\mathbf{r}_1 \times \frac{\partial \psi_R(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{r}_1},$$

$$\psi_R(\mathbf{r}_1) = \frac{d-R}{R^2 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0) + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(Rd - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)) -$$

$$-\frac{\Gamma^*}{4\pi} \frac{2R}{R+d} \ln(R^2 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)).$$

Плоский аналог функции $\psi_R(\mathbf{r}_1)$ традиционно называется в вихревой динамике функцией Кирхгофа–Рауса (см., например, [10]).

Момент сил давления жидкости. Для вычисления момента сил давления жидкости \mathcal{M}^L на границу тела C воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента. Изменение кинетического момента жидкости \mathbf{K}^L , заполняющей область D (внешность контура C), равно

$$\dot{\mathbf{K}}^L = -\mathcal{M}^L, \tag{П6}$$

где \mathcal{M}^L — искомый момент сил давления жидкости на контур C . Полагая плотность жидкости равной единице, представим кинетический момент жидкости \mathbf{K}^L в области D в виде

$$\mathbf{K}^L = \iint_D \mathbf{r} \times \mathbf{v} ds = R \iint_D \nabla \psi ds,$$

где все векторы предполагаются выраженными в локальных ортогональных координатах ξ, η на сфере по формулам

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \mathbf{e}_\xi - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \mathbf{e}_\eta, \quad \nabla \psi = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \mathbf{e}_\xi + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \mathbf{e}_\eta, \quad \mathbf{r} = R \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta.$$

В декартовых координатах $Oxyz$ компоненты момента \mathbf{K}^L можно представить в виде

$$K_x^L = R \iint_D (\nabla x, \nabla \psi) ds, \quad K_y^L = R \iint_D (\nabla y, \nabla \psi) ds, \quad K_z^L = R \iint_D (\nabla z, \nabla \psi) ds.$$

Заметим, что данные интегралы расходятся в точке \mathbf{r}_1 , а потому их следует понимать в смысле теории обобщенных функций (т.е. главных значений). Используя теорему Стокса и применяя векторные обозначения, получим

$$\mathbf{K}_C = R \int_C \mathbf{r} \sqrt{\frac{E}{G}} \psi'_\eta d\xi - \mathbf{r} \sqrt{\frac{G}{E}} \psi'_\xi d\eta. \tag{П7}$$

Таким образом, в силу (П6), момент сил давления жидкости на границу тела определяется соотношением

$$\mathcal{M}^L = -\dot{\mathbf{K}}_C + \left(R \iint_D \mathbf{r} \Delta \psi ds \right)'. \tag{П8}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Момент \mathcal{M}^L можно было бы найти, непосредственно интегрируя момент сил давления вдоль границы тела

$$\mathcal{M}^L = \int_C \mathbf{r} \times p \mathbf{n} dl = R \int_C p \boldsymbol{\tau} dl = R \int_C p d\mathbf{r},$$

где p — давление жидкости, выраженное из обобщенного интеграла Коши–Лагранжа (13) (здесь мы воспользовались соотношением $\mathbf{r} \times \mathbf{n} = R \boldsymbol{\tau}$, справедливым для нормального \mathbf{n} и касательного $\boldsymbol{\tau}$ векторов к контуру на сфере). Однако таким образом полученное выражение для \mathcal{M}^L оказывается очень громоздким и не имеет ясного физического смысла.

Вычислим двойной интеграл в правой части (П8), пользуясь уравнением (П5) и соотношением $\iint_D \mathbf{r} ds = -\pi(R^2 - d^2)\mathbf{r}_0$; окончательно находим

$$R \iint_D \mathbf{r} \Delta \psi ds = -\Gamma R \mathbf{r}_1 + \frac{d^2 - R^2}{4R} \bar{\Gamma} \mathbf{r}_0. \quad (\text{П9})$$

Перейдем теперь к вычислению криволинейного интеграла \mathbf{K}_C , заданного формулой (П7). Заменяя в ней последовательно функцию ψ на $\psi^{(0)}$, ψ_v и ψ_c , непосредственно получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_C|_{\psi=\psi^{(0)}} &= a \mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0, \quad \text{где } a = \pi R_1^2, \\ \mathbf{K}_C|_{\psi=\psi_v} &= -R \Gamma \tilde{\mathbf{r}}_1, \\ \mathbf{K}_C|_{\psi=\psi_c} &= \frac{\bar{\Gamma} d (R + d)}{2R} \mathbf{r}_0. \end{aligned}$$

Коэффициент a представляет собой присоединенную массу кругового тела радиуса R_1 . Вектор $\tilde{\mathbf{r}}_1$ (см. рис. 2) определен в (30) (концы векторов $\tilde{\mathbf{r}}_1$, \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_0 лежат на одной прямой).

Подставляя эти выражения совместно с (П9) в (П8), получаем формулу для момента

$$\mathbf{M}^L = -a \mathbf{r}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0 + \Gamma R (\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_1) - \Gamma^* \frac{R + d}{2} \mathbf{v}_0.$$

6. Нерешенные задачи

В заключение сформулируем несколько вопросов, исследование которых было бы целесообразно продолжить, опираясь на результаты этой работы.

- Изучение различных случаев движения твердого тела и точечных вихрей на сфере. В частности, исследование задачи о движении произвольного двумерного тела и нескольких вихрей. В общем случае уравнения движения такой системы, видимо, будут неинтегрируемыми. Тем не менее, было бы интересно получить общее уравнение в гамильтоновой форме и исследовать различные частные решения, например, стационарные конфигурации [21, 41]. Наиболее интересной проблемой является описание движения N твердых тел на сфере с учетом циркуляции вокруг каждого тела. Частным случаем этой задачи является взаимодействие нескольких твердых тел и точечных вихрей. К сожалению, общий формализм такой задачи еще не разработан даже для плоскости. Таким образом, гидродинамика нескольких твердых тел и точечных вихрей пока остается сложной нерешенной задачей.
- Более систематическое исследование и изучение различных частных случаев динамики массовых вихрей. Уравнения движения массовых вихрей на сфере указаны в данной статье; частично они уже исследованы для случаев плоскости [9, 22, 41]. Эта форма уравнений позволяет рассмотреть ряд интересных задач. Например, в статье [6] рассматривается простейшее приложение этих уравнений к описанию динамической адвекции, когда в потоке жидкости происходит движение нерастворимой мелкозернистой примеси. Полученные в [6] уравнения имеют, как нам кажется, более прикладной характер по сравнению с классической моделью хаотической адвекции.

Кроме того, в динамике точечных массовых вихрей остаются неисследованные вопросы, аналоги которых постоянно рассматриваются в небесной механике — существование стационарных и статических конфигураций, их классификация и устойчивость. Отметим, что на сфере возможны и статические конфигурации массовых вихрей даже с одинаковой интенсивностью. В этой связи возникает целый ряд задач, связанный с классификацией симметричных статических и поиском несимметричных конфигураций. Эти вопросы еще не полностью разработаны и для динамики обычных вихрей. Результаты по статическим и стационарным конфигурациям классических вихрей систематически обсуждаются в обзоре [13].

- Исследование вихревых движений на других типах поверхностей. Большой интерес, ввиду возможных приложений, представляет изучение динамики вихрей не только на сферической, но и на других компактных поверхностях, моделирующих в разных приближениях земную поверхность. С общетеоретической точки зрения было бы интересно рассмотреть динамику твердых тел и вихрей на плоскости Лобачевского; эта задача менее сложна по сравнению с движением на компактных поверхностях, так как здесь не возникает трудностей, связанных с неоднозначностью определения точечного вихря.

Список литературы

- [1] Богомолов В. А. Динамика завихренности на сфере // Изв. АН СССР. Механ. жидк. и газа, 1977, № 6, с. 57–65.
- [2] Богомолов В. А. О двумерной гидродинамике на сфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1979, т. 15, № 6, с. 29–35.
- [3] Борисов А. В., Газизуллина Л. А., Рамоданов С. М. Диссертация Э. Цермело о вихревой гидродинамике на сфере // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 4, с. 497–513.
- [4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», ИКИ, 2005. 576 с.
- [5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Интегрируемость задачи о движении цилиндра и вихря в идеальной жидкости // Матем. заметки, 2004, т. 75, вып. 1, с. 20–23.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С., Рамоданов С. М. Динамическая адвекция // Докл. РАН (в печати).
- [7] Громека И. С. О вихревых движениях жидкости на сфере // Учен. зап. Казанск. ун-та, 1885; см. также: Громека И. С. Собрание трудов. М.: АН СССР, 1952. С. 184–205.
- [8] Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Журн. русск. физ.-хим. общ-ва, 1885, т. 8, отд. 1, вып. 6, с. 81–113; там же, вып. 7, с. 145–199; там же, вып. 8, с. 231–280. См. также: Жуковский Н. Е. Собр. соч. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. Т. 2, с. 152–309.
- [9] Рамоданов С. М. К задаче о движении двух массовых вихрей в идеальной жидкости // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 4, с. 435–443.
- [10] Сэффмэн Ф. Дж. Динамика вихрей. М.: Научный мир, 2000; см. также Saffman P. G. Vortex Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
- [11] Фридман А. А., Полубаринова П. Я. О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости // Геофизический сборник, 1928, с. 9–23.

- [12] Чаплыгин С. А. О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло // Труды Центрального аэрогидродинамического института, 1926, вып. 19, с. 300–382.
- [13] Aref H., Newton P. K., Stremmer M. A., Tokieda T., and Vainchtein D. L. Vortex Crystals // Adv. Appl. Mech., 2003, vol. 39, pp. 1–79.
- [14] Boatto S. and Koiller J. Vortices on Closed Surfaces. arXiv:0802.4313.
- [15] Borisov A. V., Kilin A. A., and Mamaev I. S. A New Integrable Problem of Motion of Point Vortices on the Sphere // IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence (Moscow, 25-30 August, 2006) / A. V. Borisov et al. (Eds.). Dordrecht: Springer, 2008. pp. 39–53.
- [16] Borisov A. V. and Lebedev V. G. Dynamics of Three Vortices on a Plane and a Sphere: II. General Compact Case // Regul. Chaotic Dyn., 1998, vol. 3, no. 2, pp. 99–114.
- [17] Borisov A. V., Mamaev I. S., and Kilin A. A. Two-Body Problem on a Sphere: Reduction, Stochasticity, Periodic Orbits // Regul. Chaotic Dyn., 2004, vol. 9, no. 3, pp. 265–280.
- [18] Borisov A. V. and Mamaev I. S. On the Problem of Motion of Vortex Sources on a Plane // Regul. Chaotic Dyn., 2006, vol. 11, no. 4, pp. 455–466.
- [19] Borisov A. V. and Mamaev I. S. Interaction between Kirchhoff Vortices and Point Vortices in an Ideal Fluid // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 1, pp. 68–80.
- [20] Borisov A. V. and Mamaev I. S. On the Motion of a Heavy Rigid Body in an Ideal Fluid with Circulation // Chaos, 2006, vol. 16, №1, 013118, 7 pp.
- [21] Borisov A. V. and Mamaev I. S. An Integrability of the Problem on Motion of Cylinder and Vortex in the Ideal Fluid // Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, pp. 163–166.
- [22] Borisov A. V., Mamaev I. S., and Ramodanov S. M. Dynamics of Two Interacting Cylinders in Perfect Fluid // Discrete Contin. Dyn. Syst., 2007, vol. 19, no. 2, pp. 235–253.
- [23] Borisov A. V., Mamaev I. S., and Ramodanov S. M. Motion of a Circular Cylinder and N Point Vortices in a Perfect Fluid // Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, no. 4, pp. 449–462.
- [24] Borisov A. V. and Pavlov A. E. Dynamics and Statics of Vortices on a Plane and a Sphere: I // Regul. Chaotic Dyn., 1998, vol. 3, no. 1, pp. 28–39.
- [25] Borisov A. V., Lebedev V. G. Dynamics of Three Vortices on a Plane and a Sphere: III. General Compact Case // Regul. Chaotic Dyn., 1998, vol. 3, no. 4, pp. 76–90.
- [26] Castilho C. and Machado H. The N -Vortex Problem on a Symmetric Ellipsoid: A Perturbation Approach // J. Math. Phys., 2008, vol. 49, no. 2, 022703, 12 p.
- [27] Crowdy D. Point Vortex Motion on the Surface of a Sphere with Impenetrable Boundaries // Phys. Fluids, 2006, vol. 18, no. 3, 036602, 7 pp.
- [28] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Sceaux: Ed. Jacques Gabay, 1993.
- [29] Hally D. Stability of Streets of Vortices on Surfaces of Revolution with a Reflection Symmetry // J. Math. Phys., 1980, vol. 21, no. 1, pp. 211–217.
- [30] Kidambi R. and Newton P. K. Point Vortex Motion on a Sphere with Solid Boundaries // Phys. Fluids, 2000, vol. 12, no. 3, pp. 581–588.
- [31] Kidambi R. and Newton P. K. Motion of Three Point Vortices on a Sphere // Phys. D, 1998, vol. 116, nos. 1–2, pp. 143–175.
- [32] Kimura Y. Vortex Motion on Surfaces with Constant Curvature // Proc. R. Soc. Lond. A, 1999, vol. 455, pp. 245–259.

- [33] Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik: Vol. 1: Mechanik. Leipzig: Teubner, 1897. [Кирхгоф Г. Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.]
- [34] Lamb H. Hydrodynamics. New York: Dover, 1932. [Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947; а также: Ламб Г. Гидродинамика. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2003.]
- [35] Newton P. K. The N -Vortex Problem: Analytical Techniques. (Appl. Math. Sci., vol. 145.) New York: Springer, 2001.
- [36] Poincaré H. Théorie des Tourbillons / ed. G. Carré, Paris: Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 1893. [Пуанкаре А. Теория вихрей. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2000.]
- [37] Ragazzo C. G., Koiller J., and Oliva W. M. On the Motion of Two-Dimensional Vortices with Mass // *J. Nonlinear Sci.*, 1994, vol. 4, pp. 375–418.
- [38] Ramodanov S. M. Motion of a Circular Cylinder and a Vortex in an Ideal Fluid // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2001, vol. 6, no. 1, pp. 33–38.
- [39] Ramodanov S. M. Motion of a Circular Cylinder and N Point Vortices in a Perfect Fluid // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 3, pp. 291–298.
- [40] Shashikanth B. N., Marsden J. E., Burdick J. W., and Kelly S. D. The Hamiltonian Structure of a 2D Rigid Circular Cylinder Interacting Dynamically with N Point Vortices // *Phys. Fluids*, 2002, vol. 14, pp. 1214–1227.
- [41] Shashikanth B. N., Sheshmani A., Kelly S. D., and Marsden J. E. Hamiltonian Structure for a Neutrally Buoyant Rigid Body Interacting with N Vortex Rings of Arbitrary Shape: The Case of Arbitrary Smooth Body Shape // *Theoret. Comput. Fluid Dyn.*, 2008, vol. 22, no. 1, pp. 37–64.
- [42] Vankerschaver J., Kanso E., and Marsden J. E. The Geometry and Dynamics of Interacting Rigid Bodies and Point Vortices. arXiv:0810.1490.
- [43] Zermelo E. Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche [§§ 1, 2] // *Z. Angew. Math. Phys.*, 1902, vol. 47, pp. 201–237. [Цермело Э. Гидродинамические исследования вихревых движений на поверхности сферы // *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, № 1, С. 81–110.]
- [44] Zermelo E. Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche [Zweite Mitteilung, §§ 3, 4]: Manuscript with pages 61–117 // *Universitätsarchiv Freiburg. Nachlass / E. Zermelo. C 129/225.*
Die absolute Bewegung [§ 5], Manuscript with pages 119–131, *Universitätsarchiv Freiburg. Nachlass / E. Zermelo. C 129/253.*