На правах рукописи

Плетникова Наталья Ивановна

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ижевск — 2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа
ГОУ ВПО "Удмуртский государственный университет".

Научный руководитель	—	доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Ю.П. Чубурин
Официальные оппоненты	—	доктор физико-математических наук, профессор В.А. Юрко доктор физико-математических наук, профессор Г.Г. Исламов
Ведущая организация	—	Воронежский государственный университет

Защита состоится 2007 г. в ч. на заседании специализированного совета К 212.275.04 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в ГОУ ВПО "Удмуртский государственный университет" по адресу: 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д.1, корпус 4, ауд. 222. e-mail: imi@uni.udm.ru.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке ГОУ ВПО "Удмуртский государственный университет".

Автореферат разослан апреля 2007 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
кандидат физико-математических
наук, доцент Н.Н. Петров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Уравнение Шредингера – одно из основных уравнений квантовой физики. В первой половине прошлого века данное уравнение изучалось математиками, в основном, для достаточно быстро убывающих на бесконечности потенциалов, что соответствует уединенному атому. В последующие десятилетия изучение физиками электронов в кристаллах (металлах и полупроводниках) вызвали интерес математиков к уравнению Шредингера с периодическим потенциалом. Эти и другие исследования были подытожены в известной монографии М. Рида, Б. Саймона "Методы современной математической физики" [1]–[4], книге Ф. А. Березина, М. А. Шубина "Уравнение Шредингера" [5] и монографии В. Кирша, Х. Цикона и др. [6]. В последнее время, опять-таки, в значительной степени в связи с потребностями физики, а именно, бурно развивающейся физики поверхности, появились математические работы (Y. Herczynski [7], E. B. Davies, B. Simon [8], Ю.П. Чубурин [9]–[13] и др.) в которых рассматривается оператор Шредингера с потенциалами, отвечающими кристаллической пленке, полуограниченному кристаллу или слоистой структуре. Такого рода операторы занимают промежуточное положение между операторами Шредингера для уединенного атома и для бесконечного кристалла. Отметим, что в математических статьях и монографиях потенциал представляет собой, как правило, оператор умножения на функцию (локальный потенциал). Вместе с тем, операторы потенциальной энергии изначально не являются локальными, и в физике активно используются нелокальные потенциалы. Операторы Шредингера с нелокальным потенциалом изучались лишь относительно небольшом числе математических работ (см. например, [14]–[16]). Это говорит об актуальности математического исследования оператора Шредингера с нелокальным потенциалом.

Цель работы. Изучение спектральных свойств, в частности, собственных значений и резонансов, оператора Шредингера с нелокальным потенциалом типа возмущенной ступеньки. Нахождение асимптотики собственных функций данного оператора. Решение прямой и обратной задач рассеяния.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа и спектральной теории операторов, а также теории функций нескольких комплексных переменных.

Научная новизна. В работе рассматривается оператор с нелокальным потенциалом типа возмущенной ступеньки. Исследованы общие спектральные свойства этого оператора. Получены условия существования уровней (собственных значений и резонансов), найдены асимптотические формулы для уровней. Изучено поведение (обобщенных) собственных функций на бесконечности. Доказана теорема существования и единственности для уравнения Липпмана-Швингера, найдены формулы для коэффициентов отражения и прохождения. Обратная задача рассеяния сведена к решению сингулярного интегрального уравнения. Получена теорема единственности решения обратной задачи.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение к квантовой теории твердого тела.

Апробация диссертации. Материалы диссертации докладывались и обсуждались:

– на Ижевском городском математическом семинаре по дифференциальным уравнениям и теории оптимального управления под руководством профессора Е.Л. Тонкова (2004 г., 2005 г.);

– на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения - XV" (2004 г.), "Понтрягинские чтения - XVI" (2005 г.);

– на 13-ой Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" (2006 г.);

– на научной конференции-семинаре "Теория управления и математическое моделирование" (г. Ижевск, 2006 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в десяти публикациях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация объемом 100 страниц состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, и библиографического списка, состоящего из 51 наименования.

Основное содержание работы

Во введении приведен краткий обзор основных результатов в исследовании оператора Шредингера с потенциалами, отвечающими кристаллической поверхности. Отмечены работы, в которых исследуются операторы с нелокальными потенциалами. Обосновывается актуальность темы исследования, пояснена ее научная ценность. Дан краткий обзор содержания работы по главам.

Для функций $\psi(x)$ таких, что

$$\psi \cdot \varphi_j \in L^1(\mathbf{R}) \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

введем обозначение

$$(\psi, \varphi_j) = \int\limits_{\mathbf{R}} \psi(x)\overline{\varphi_j(x)}\, dx \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Основной объект, который рассматривается в диссертации (для различных классов функций) – это уравнение Шредингера вида

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_0\theta(x)\psi(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\psi, \varphi_j)\varphi_j(x) = E\psi(x). \tag{2}$$

Здесь $V_0 = \mathrm{const} < 0$ (данное предположение не уменьшает общности), $\theta(x)$ - функция Хевисайда, $0 \neq \lambda_j \in \mathbf{R}$ для всех $j = 1, \ldots, n$, E – спектральный параметр. Относительно (комплекснозначных) функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ предполагаем, что они линейно независимы и удовлетворяют для любого $j = 1, \ldots, n$ неравенству вида

$$|\varphi_j(x)| \leqslant C_j e^{-a_j|x|}, \tag{3}$$

где $C_j,\ a_j = \mathrm{const} > 0$; далее функции, удовлетворяющие неравенствам вида (3), будем называть экспоненциально убывающими.

Уравнение (2) относится к интегро-дифференциальным уравнениям, "нелокальная" часть $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j(\cdot, \varphi_j)\varphi_j$ потенциала

$$V = V_0\theta(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\cdot, \varphi_j)\varphi_j$$

– это самосопряженный оператор конечного ранга. Потенциал V моделирует поверхность твердого тела.

Положим

$$H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0\theta(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\cdot, \varphi_j)\varphi_j$$

и

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0\theta(x).$$

Уравнение (2) можно записать в виде

$$H_n\psi = E\psi. \tag{4}$$

Ненулевые решения $\psi(x)$ уравнения Шредингера (4), удовлетворяющие условию (1), назовем (*обобщенными*, если $\psi(x) \notin L^2(\mathbf{R})$) *собственными функциями* оператора H_n.

Введем обозначение для резольвенты оператора H, полагая

$$R(E) = (H - EI)^{-1}.$$

В дальнейшем ядро резольвенты (являющейся интегральным оператором), вообще говоря, продолженное по параметру E на второй лист соответствующей римановой поверхности, будем для краткости называть функцией Грина оператора H и обозначать $G(x, y, E, V_0)$.

Функция Грина оператора H имеет ветвление вокруг двух точек $E = 0$, $E = V_0$. Соответственно, резонансы следует определять в двух вариантах.

При условии $E \notin [V_0, +\infty)$ приведем уравнение (2) к интегральному виду

$$\psi(x) = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\psi, \varphi_j) I_j(x, E, V_0), \tag{5}$$

где

$$I_j(x,E,V_0)=\int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,E,V_0)\varphi_j(y)\,dy. \tag{6}$$

О п р е д е л е н и е 1. Под *резонансом* оператора H_n будем понимать такое E на втором листе римановой поверхности функции $G(x,y,E,V_0)$ в окрестности нуля с $\mathrm{Im}\sqrt{E}<0$ (или в окрестности точки V_0 с $\mathrm{Im}\sqrt{E-V_0}<0$), для которого существует ненулевое решение уравнения (5), удовлетворяющее условию (1).

О п р е д е л е н и е 2. *Уровнем* E оператора H_n будем называть собственное значение или резонанс данного оператора, а также соответствующее E число $k=\sqrt{E}$ (или $\varkappa=\sqrt{E-V_0}$).

Положим

$$\mathcal{D}(E,V_0)=\begin{vmatrix} 1+\lambda_1(I_1,\varphi_1) & \lambda_2(I_2,\varphi_1) & \cdots & \lambda_n(I_n,\varphi_1) \\ \lambda_1(I_1,\varphi_2) & 1+\lambda_2(I_2,\varphi_2) & \cdots & \lambda_n(I_n,\varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1(I_1,\varphi_n) & \lambda_2(I_2,\varphi_n) & \cdots & 1+\lambda_n(I_n,\varphi_n) \end{vmatrix}, \tag{7}$$

где I_j задается формулой (6). Здесь, для краткости записи, опущены аргументы для функций $I_j(x,E,V_0)$. Уравнение $\mathcal{D}(E,V_0)=0$ определяет уровни оператора H_n.

Рассмотрим оператор Шредингера в $L^2(\mathbf{R}^3)$ вида

$$H=-\Delta+V_0\theta(x_3),$$

где Δ – оператор Лапласа. Положим $\Omega=[0,1]^2\times\mathbf{R}$ (множество Ω называется *ячейкой*), $\Omega^*=[-\pi,\pi)^2$ (*ячейка в обратной решетке*). Будем пользоваться обозначениями $n_{||}=(n_1,n_2)\in\mathbf{Z}^2$ и $n=(n_1,n_2,0)$, а также $k_{||}=(k_1,k_2)\in\Omega^*$, $k_{||}$ – это *квазиимпульс* и $k=(k_1,k_2,0)$.

О п р е д е л е н и е 3. *Блоховские* по переменным x_1 и x_2 функции – это сужения на Ω функций $f(x)$, определенных на $\mathbf{R}^3$ и удовлетворяющих равенству

$$f(x+n)=e^{i(k_{||},n_{||})}f(x).$$

Самосопряженный оператор H, действующий в $L^2(\mathbf{R}^3)$, допускает разложение в прямом интеграле пространств

$$\int_{\Omega^*}^{\oplus} L^2(\Omega)dk_{||} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega \times \Omega^*) \cong L^2(\Omega^*, L^2(\Omega)).$$

Таким образом, исследование H сводится к изучению семейства операторов $H(k_{||}) = -\Delta + V_0\theta(x_3)$, которые действуют $L^2(\Omega)$ и определены на (достаточно гладких) блоховских по переменным x_1 и x_2 функциях.

Результаты, полученные для многомерного случая, относятся к оператору

$$H_1(k_{||}) = H(k_{||}) + \lambda_1(\cdot, \varphi_1)\varphi_1,$$

действующему в ячейке Ω, и они аналогичны результатам одномерного случая (см. ниже).

В первой главе диссертации изучаются общие спектральные свойства оператора H_n, а также вопрос о существовании и поведении уровней этого оператора при различных предположениях.

Перечислим основные результаты первой главы.

Показано, что спектр $\sigma(H)$ (оператора H) совпадает с $[V_0, +\infty)$. Из теоремы о компактных возмущениях следует, что $\sigma_{\text{ess}}(H_n) = \sigma(H) = [V_0, +\infty)$ ($\sigma_{\text{ess}}(H_n)$ – существенный спектр оператора H_n). Обозначим через $\mathcal{P}$ совокупность уровней $E > V_0$ оператора H_n. Доказано, что множество $(V_0, +\infty)\backslash\mathcal{P}$ состоит из точек абсолютно непрерывного спектра.

Описана асимптотика обобщенных собственных функций оператора H_n при $x \to \pm\infty$.

Т е о р е м а 3.5. *Пусть E – уровень, тогда соответствующее решение уравнения* (5) *имеет вид*

$$\psi(x) = \theta(x)P_1(k, \varkappa)e^{i\varkappa x} + \theta(-x)P_2(k, \varkappa)e^{-ikx} + \eta(x).$$

(Коэффициенты $P_1(k, \varkappa)$ и $P_2(k, \varkappa)$ выписываются явно, функция $\eta(x)$ экспоненциально убывает.)

Сначала исследуются уровни оператора H_n вблизи нуля.

Т е о р е м а 4.6. Пусть $V_0 = \mathrm{const} \neq 0$. *Тогда для всех достаточно малых* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *уровни* k *оператора* H_n *в окрестности нуля отсутствуют.*

В следующей теореме предполагаем, что между переменными k и $\varkappa$ существует зависимость вида $\varkappa = Ak$, где $A = \mathrm{const}$, $A \neq 0$, $A \neq \pm 1$.

Т е о р е м а 4.7. Пусть $\lambda_j = B_j \varepsilon^{\gamma_j} + o(\varepsilon^{\gamma_j})$, *где* $B_j = \mathrm{const} \in \mathbf{R}$, $\gamma_j = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, n$. *Тогда для достаточного малого* ε *оператор* H_n *имеет* n *уровней* k *в окрестности нуля, возможно, сливающихся при не более, чем конечном числе значений* ε.

При $n = 1, 2$ найдены асимптотические формулы для уровней k оператора H_n.

В следующей теореме предполагаем, что $V_0(\lambda_1) = -B\lambda_1^\gamma + o(\lambda_1^\gamma)$.

Т е о р е м а 4.8. Пусть $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_1(x)\, dx \neq 0$, $\gamma > 2$, $K > 0$, $\nu = \min(\gamma - 1, 2)$, $\delta \in (1, \nu)$. *Тогда при всех достаточно малых* λ_1 *существует единственный уровень* k *оператора* H_1, *для которого выполнено неравенство*

$$\left| k - \frac{1}{2i}\lambda_1 \left| \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_1(x)\, dx \right|^2 \right| \leqslant K\lambda_1^\delta.$$

При этом для k *справедливо соотношение*

$$k = \frac{1}{2i} \left| \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_1(x)\, dx \right|^2 \cdot \lambda_1 + O\left(\lambda_1^{2+\beta}\right),$$

где $\beta > 0$.

Предположим теперь, что $\lambda_j = A_j \varepsilon^\gamma + o(\varepsilon^{\gamma_j})$ $(j = 1, 2)$ и $V_0(\varepsilon) = -B\varepsilon^\gamma + o(\varepsilon^\gamma)$. Положим

$$\mathcal{M}_{jl} = iA_j \varepsilon^{\gamma_j} \iint\limits_{\mathbf{R}^2} \varphi_j(y) \overline{\varphi_l(x)}\, dy dx.$$

Т е о р е м а 4.10. Предположим, что $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma^* > 1$, $K > 0$, $\delta \in (\gamma^*, \nu)$, *где* $\nu = \min(\gamma - \gamma^*, 2\gamma^*)$ *и*

$$(\mathcal{M}_{11} - \mathcal{M}_{22})^2 + 4\mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{21} \neq 0. \tag{8}$$

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор H_2 имеет внутри кругов

$$S^{\pm} = \left\{k : |k - M^{\pm}\varepsilon^{\gamma^*}| \leqslant K\varepsilon^{\delta}\right\}$$

ровно по одному уровню кратности единица, причем для $k^{\pm}$ справедлива формула

$$k^{\pm} = M^{\pm}\varepsilon^{\gamma^*} + o(\varepsilon^{\gamma^*}),$$

где

$$M^{\pm} = -\frac{1}{4}\left(\mathcal{M}_{11} + \mathcal{M}_{22} \pm \sqrt{(\mathcal{M}_{11} - \mathcal{M}_{22})^2 + 4\mathcal{M}_{21}\mathcal{M}_{12}}\right).$$

Т е о р е м а 4.11. *Предположим, что $\gamma_2 > \gamma_1 > 1$, $K > 0$, $\delta \in (\gamma_1, \gamma_2)$* и $\mathcal{M}_{11} \neq 0$. *Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор H_2 имеет внутри кругов*

$$S^{\pm} = \left\{k : |k - M^{\pm}\varepsilon^{\gamma_1}| \leqslant K\varepsilon^{\delta}\right\}$$

ровно по одному уровню кратности единица, причем для $k^{\pm}$ справедлива формула

$$k^{\pm} = M^{\pm}\varepsilon^{\gamma_1} + o(\varepsilon^{\gamma_1}),$$

где

$$M^{\pm} = -\frac{\mathcal{M}_{11} \pm |\mathcal{M}_{11}|}{4}.$$

Далее исследуются уровни в комплексной окрестности точки V_0. Предполагается, что для показателей степени в оценке (3) функций $\varphi_j(x)\,(j = 1, \dots, n)$ $a_j > 2\sqrt{|V_0|}$.

Введем обозначения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\widetilde{\lambda} = \left(\widetilde{\lambda}_1, \dots, \widetilde{\lambda}_n\right)$ и

$$\mathcal{D}_1(\varkappa, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{\varkappa}\lambda_1 F_{11}(\varkappa, V_0) & \frac{1}{\varkappa}\lambda_2 F_{21}(\varkappa, V_0) & \cdots & \frac{1}{\varkappa}\lambda_n F_{n1}(\varkappa, V_0) \\ \frac{1}{\varkappa}\lambda_1 F_{12}(\varkappa, V_0) & 1 + \frac{1}{\varkappa}\lambda_2 F_{22}(\varkappa, V_0) & \cdots & \frac{1}{\varkappa}\lambda_n F_{n2}(\varkappa, V_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\varkappa}\lambda_1 F_{1n}(\varkappa, V_0) & \frac{1}{\varkappa}\lambda_2 F_{2n}(\varkappa, V_0) & \cdots & 1 + \frac{1}{\varkappa}\lambda_n F_{nn}(\varkappa, V_0) \end{vmatrix},$$

где

$$F_{jl}(\varkappa, V_0) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2} \left(-\theta(x)\theta(y)\left(\frac{1}{2i}e^{i\varkappa|x+y|} + \frac{-\sqrt{\varkappa^2 + V_0} + \varkappa}{2i\left(\sqrt{\varkappa^2 + V_0} + \varkappa\right)}e^{i\varkappa(x+y)}\right) + \right.$$
$$\left. + \varkappa\mathcal{G}_2(x, y, \sqrt{\varkappa^2 + V_0}, \varkappa)\right)\varphi_j(y)\overline{\varphi_l(x)}\,dydx.$$

(Функция $\mathcal{G}_2(x, y, \sqrt{\varkappa^2 + V_0}, \varkappa)$ является аналитической в окрестности точки $\varkappa = 0$.)

Т е о р е м а 5.12. *Пусть вектор $\widetilde{\lambda} \in \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условиям*

$$\mathcal{D}_1(0, \widetilde{\lambda}) = 0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial \mathcal{D}_1(\varkappa, \lambda)}{\partial \varkappa}\right|_{(0,\widetilde{\lambda})} \neq 0.$$

Тогда для всех λ из малой окрестности точки $\widetilde{\lambda}$ существует единственный уровень $\varkappa = \varkappa(\lambda)$ оператора H_n, аналитически зависящий от λ и такой, что $\lim\limits_{\lambda \to \widetilde{\lambda}} \varkappa(\lambda) = \varkappa(\widetilde{\lambda}) = 0$.

Формулы для функций $F'_{11}(\varkappa, V_0)$ и $F''_{11}(\varkappa, V_0)$ выписываются явно.

Т е о р е м а 5.13. *Пусть $F'_{11}(0, V_0) \neq 0$, $F''_{11}(0, V_0) \neq 0$. Существует такая окрестность точки $\widetilde{\lambda}_1 = -\dfrac{1}{F'_{11}(0, V_0)}$, что для любого λ_1 из этой окрестности оператор H_1 имеет единственный уровень $\varkappa$ в достаточно малой окрестности нуля. При этом имеет место формула*

$$\varkappa = \frac{2(F'_{11}(0, V_0))^2}{F''_{11}(0, V_0)}(\lambda_1 - \widetilde{\lambda}_1) + o(\lambda_1 - \widetilde{\lambda}_1).$$

З а м е ч а н и е. Из формул для $F'_{11}(0, V_0)$ и $F''_{11}(0, V_0)$ следует, что $F'_{11}(0, V_0)$ – число вещественное, а $F''_{11}(0, V_0)$ – чисто мнимое. Откуда вытекает, что

1) если $\dfrac{i(F'_{11}(0, V_0))^2}{F''_{11}(0, V_0)}\left(\lambda_1 - \widetilde{\lambda}_1\right) > 0$, то $\varkappa$ – резонанс;

2) если $\dfrac{i(F'_{11}(0, V_0))^2}{F''_{11}(0, V_0)}\left(\lambda_1 - \widetilde{\lambda}_1\right) < 0$ то $\varkappa$ – собственное значение.

Таким образом, если λ_1 переходит через $\widetilde{\lambda}_1$, то собственное значение превращается в резонанс (или наоборот).

Вторая глава содержит исследование прямой (для произвольного n) задачи и обратной (для $n = 1$) задачи рассеяния для оператора H_n.

Обоснован переход от "классического" уравнения Липпмана-Швингера к уравнению Липпмана-Швингера с функцией Грина оператора H_n. Показано, что решение $\psi(x)$ уравнения Липпмана-Швингера имеет вид

$$\psi(x) = A(k, \varkappa)e^{i\varkappa x} + \eta^+(x) \quad \text{при} \quad x > 0,$$

$$\psi(x) = e^{ikx} + B(k, \varkappa)e^{-ikx} + \eta^-(x) \quad \text{при} \quad x < 0.$$

Здесь функции $\eta^{\pm}(x)$ экспоненциально убывают,

$$A(k,\varkappa)=\frac{2k}{k+\varkappa}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathcal{D}_{Vj}(k,\varkappa)}{\mathcal{D}(k,\varkappa)}\left(\frac{1}{2i\varkappa}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-i\varkappa y}\varphi_j(y)\,dy+\right.$$

$$\left.+\frac{-k+\varkappa}{2i\varkappa(k+\varkappa)}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{i\varkappa y}\varphi_j(y)\,dy+\frac{1}{i(k+\varkappa)}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-iky}\varphi_j(y)\,dy\right)$$

и

$$B(k,\varkappa)=\frac{k-\varkappa}{k+\varkappa}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathcal{D}_{Vj}(k,\varkappa)}{\mathcal{D}(k,\varkappa)}\left(\frac{1}{i(k+\varkappa)}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{i\varkappa y}\varphi_j(y)\,dy+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{iky}\varphi_j(y)\,dy-\frac{-k+\varkappa}{2ik(k+\varkappa)}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-iky}\varphi_j(y)\ dy\right)$$

– коэффициенты прохождения и отражения соответственно. Функция $\mathcal{D}(k,\varkappa)$ определяется равенством (7) (с замена $k=\sqrt{E}$, $\varkappa=\sqrt{E-V_0}$), а $\mathcal{D}_{Vj}(k,\varkappa)$ получаем заменой, кроме того, j-го столбца на столбец $(\lambda_1(\psi_V,\varphi_1),\ldots,\lambda_j(\psi_V,\varphi_j),\ldots,\lambda_n(\psi_V,\varphi_n))^T$, где функция $\psi_V(x)$ определяется следующим образом:

$$\psi_V(x)=\left\{\begin{array}{c}\frac{2k}{k+\varkappa}e^{i\varkappa x},\ \ x\geqslant 0,\\ e^{ikx}+\frac{k-\varkappa}{k+\varkappa}e^{-ikx},\ \ x<0.\end{array}\right.$$

Т е о р е м а 7.20. *Предположим, что $\psi(x)$ является решением уравнения Шредингера* (2), *причем*

$$\psi(x)=\left\{\begin{array}{c}Ae^{i\varkappa x}+\eta^{+}(x),\ \ x\geqslant 0,\\ Ce^{ikx}+Be^{-ikx}+\eta^{-}(x),\ \ x<0\end{array}\right.$$

и выполнены оценки

$$|\eta^{\pm}(x)|\leqslant Ce^{-a|x|},\ \ |(\eta^{\pm})'(x)|\leqslant C_1e^{-a|x|},\ a>0,\ C=C_1=\mathrm{const}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{\varkappa}{k}|A|^2+|B|^2=|C|^2.$$

Из этой теоремы, в частности, можно получить следующее соотношение для коэффициентов прохождения $A(k,\varkappa)$ и отражения $B(k,\varkappa)$:

$$\frac{\varkappa}{k}|A(k,\varkappa)|^2+|B(k,\varkappa)|^2=1.$$

Т е о р е м а 7.21. *Всякий уровень $E>0$ является собственным значением.*

Приведем один из основных результатов диссертации. Предположим, что φ_1 принадлежит множеству S_0 экспоненциально убывающих функций $\varphi_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, таких, что $\operatorname{supp}\varphi_1 \in (0,+\infty)$. Обратная задача рассеяния рассматривается следующей формулировке: по заданным функциям $A(\varkappa)=A(k,\varkappa)$ и $B(\varkappa)=B(k,\varkappa)$ (k здесь выражено через $\varkappa$) найти информацию о функции $|\widehat{\varphi_1}(\varkappa)|^2$. Показано, что данная функция удовлетворяет некоторому сингулярному интегральному уравнению . Кроме того, получена следующая теорема.

Т е о р е м а 8.22. *Пусть $\varphi_1\in S_0$ и выполнены условия*

$$A(\varkappa)(k+\varkappa)-2k\neq 0,\quad B(\varkappa)(\varkappa-k)+\varkappa+k\neq 0,$$
$$-8\pi\varkappa A(\varkappa)+(4\pi-1)(B(\varkappa)(\varkappa-k)+\varkappa+k)\neq 0,$$
$$\operatorname{ind}_{\mathbf{R}} a(\varkappa)\geq 0,$$

где

$$a(\varkappa)=\frac{k\left(-8\pi\varkappa A(\varkappa)+(4\pi-1)(B(\varkappa)(\varkappa-k)+\varkappa+k)\right)}{\pi(A(\varkappa)(k+\varkappa)-2k)(B(\varkappa)(\varkappa-k)+\varkappa+k)}.$$

Тогда решение обратной задачи рассеяния для уравнения Шредингера (4) *в классе $L^2(\mathbf{R})$ единственно.*

Здесь под $\operatorname{ind}_{\mathbf{R}} a(\varkappa)$ понимается приращение аргумента функции $a(\varkappa)$ деленное на 2π, когда $\varkappa$ пробегает $\mathbf{R}$.

Список цитируемой литературы

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.

2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 396 с.

3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 446 с.

4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.

5. Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шредингера. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 392 с.

6. Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990. 408 с.

7. Herczynski Y. On the spectrum of the Schrodinger operator. – Bull. Acad. Pol. sci: Ser. sci. math, 1981, Т. 29 № 1–2, с. 73–77.

8. Davies E. B., Simon B. Scattering theory for systems with different spatial asymptotics on the left and right. – Commun. Math. Phys. 63 (1978), 277–301.

9. Чубурин Ю. П. О рассеянии для оператора Шредингера в случае кристаллической пленки // Теор. и матем. физика. 1987. Т. 72. № 1. С. 120–131.

10. Чубурин Ю. П. О решениях уравнения Шредингера в случае полуограниченного кристалла // Теор. и матем. физика. 1994. Т. 98. № 1. С. 38–47.

11. Чубурин Ю. П. Об аппроксимации "пленочного" оператора Шредингера "кристаллическим" // Матем. заметки. 1997. Т. 62. Вып. 5. С. 773–781.

12. Чубурин Ю. П. Об операторе Шредингера с малым потенциалом типа возмущенной ступеньки // Теор. и матем. физика. 1999. Т. 120. № 2. С. 277–290.

13. Chuburin Yu. P. On levels of a weakly perturbed periodic Schrödinger operator. – Commun. Math. Phys. V. 249, 497–510 (2004).

14. Chadan K., Kobayashi R. The Absence of Positive Energy Bound States for a Class of Nonlocal Potentials // LANL e-print arXiv: math-ph/0409018.

15. Гадыльшин Р. Р. О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси // Теор. и матем. физика. 2002. Т. 132. С. 97–104.

16. Сметанина М. С., Чубурин Ю. П. Об уравнях оператора Шредингера для кристаллической пленки с нелокальным потенциалом // Теор. и матем. физика. 2004. Т. 140. № 2. С. 297–302.

Список публикаций

1. Плетникова Н. И. Об одномерном уравнении Шредингера с нелокальным потенциалом типа возмущенной ступеньки // Известия ИМИ. № 1(29). 2004. Ижевск: Изд-во УдГУ. С. 95–108.

2. Плетникова Н. И. Об уровнях оператора Шредингера на границе непрерывного спектра // Известия ИМИ. № 1(31). 2005. Ижевск: Изд-во УдГУ. С. 107–112.

3. Плетникова Н. И. Задача рассеяния для уравнения Шредингера с потенциалом типа возмущенной ступеньки // Известия ИМИ. № 1(35). 2006. Ижевск: Изд-во УдГУ. С. 89–97.

4. Плетникова Н. И. Об уровнях оператора Шредингера с возмущенным ступенчатым потенциалом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск. 2005. № 1. С. 155–166.

5. Плетникова Н. И. Об операторе Шредингера с нелокальным поверхностным потенциалом // Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения — XV». Воронеж. 2004. С. 168.

6. Плетникова Н. И. О поведении собственного значения (резонанса) оператора Шредингера вблизи границы непрерывного спектра // Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения — XVI». Воронеж. 2005. С. 124–125.

7. Плетникова Н. И. Обратная задача рассеяния для возмущенной ступеньки // Материалы 13-ой зимней Саратовской школы. Саратов. 2006. С. 139.

8. Плетникова Н. И. Исследование уровней оператора Шредингера на границе непрерывного спектра // Известия ИМИ. № 2(36). 2006. Ижевск: Изд-во УдГУ. С. 91–94.

9. Коробейников А. А., Плетникова Н. И. О вычислении уровней энергии и резонансов электронных состояний в случае кристаллической поверхности // Вестник Ижевского государственного технического университета. Ижевск. № 4. 2006. С. 63–68.

10. Плетникова Н. И. Асимптотика собственных функций оператора Шредингера с нелокальным потенциалом// Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск. № 1. 2007. С.109–120.