

Шар Чаплыгина с гириостатом: особые решения

А. Ю. Москвин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
Россия 119991, г. Москва, Ленинские горы
moskvin-ay@mail.ru

Получено 18 июня 2009 г.

Рассматривается задача о качении уравновешенного динамически несимметричного шара с гириостатом по горизонтальной шероховатой плоскости. Для исследования динамики системы и нахождения особых решений построены бифуркационная диаграмма отображения момента и бифуркационный комплекс. Описаны особые решения и исследована их устойчивость. Показано, что добавление гириостата может стабилизировать неустойчивые и дестабилизировать устойчивые особые решения.

Ключевые слова: бифуркационный комплекс, шар Чаплыгина, неголономная система, устойчивость

A. Yu. Moskvin

Chaplygin's ball with a gyrostat: singular solutions

The paper deals with the rolling motion of a balanced, dynamically asymmetric ball with a gyrostat on a horizontal rough plane. To investigate the dynamical behavior of the system and find singular solutions, the bifurcation diagram of the momentum map and the bifurcation complex are constructed. The singular solutions are described and their stability is examined. It is shown that the addition of a gyrostat can turn stable singular solutions into unstable ones and vice versa.

Keywords: bifurcational complex, Chaplygin ball, stability, nonholonomic system
Mathematical Subject Classifications: 37N15

1. Введение

Хорошо известно, что задача о свободном движении несимметричного твердого тела (волчок Эйлера) допускает неустойчивое вращение вокруг средней оси инерции. Такие вращения можно стабилизировать, добавив постоянный гиростат, параллельный средней оси. В настоящей работе показано, что подобная стабилизация возникает и в более общей задаче — о качении динамически несимметричного шара по горизонтальной плоскости без проскальзывания.

Задача о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной абсолютно шероховатой поверхности была поставлена С. А. Чаплыгиным в работе [15] (далее задача о качении шара Чаплыгина). Чаплыгин выполнил качественный анализ некоторых частных случаев, привел интегралы движения, нашел инвариантную меру и получил решения в квадратурах. В дальнейшем данная система исследовалась многими авторами, достаточно полный список литературы имеется в работе А. А. Килина [2]. В [2] также приведен наиболее полный качественный анализ этой системы и кроме того при помощи компьютера детально исследована траектория точки контакта. Априори, рассматриваемая механическая система не является гамильтоновой, этому препятствует наличие неголономной связи — отсутствие проскальзывания при качении. Негамильтоновость данной системы доказана в работе [8]. В [6] А. В. Борисов и И. С. Мамаев показали, что данная система лишь после замены времени представима в гамильтоновом виде с нелинейной скобкой Пуассона.

Интересно обобщение задачи о шаре Чаплыгина, когда внутри него помещен гиростат. Некоторые частные случаи были рассмотрены Д. К. Бобылевым [3] (еще до работ С. А. Чаплыгина) и Н. Е. Жуковским [10]. В работе [12] А. П. Маркеев показал интегрируемость обобщенной задачи, когда шар динамически несимметричен, а момент гиростата направлен произвольно. Отметим также обобщение задачи о качении шара Чаплыгина, при котором смещается центр масс. В случае динамической симметрии система остается интегрируемой [14], в случае отсутствия динамической симметрии пропадает один дополнительный интеграл и инвариантная мера [1].

В данной статье анализируется движение шара Чаплыгина с гиростатом (несмотря на доказанную интегрируемость, проинтегрировать эту систему в квадратурах до сих пор не удалось). Проведен топологический анализ. В частности, для отображения момента построена бифуркационная диаграмма и бифуркационный комплекс. Описаны особые решения. Их устойчивость исследована аналитически. В последнем параграфе показано, как при помощи гиростата можно стабилизировать неустойчивые и дестабилизировать устойчивые критические траектории.

2. Уравнения движения

2.1. Конформно-гамильтоновы системы

Применяемые в работе методы анализа устойчивости существенным образом используют возможность представления рассматриваемой системы в конформно-гамильтоновой форме. В связи с этим напомним некоторые определения [9], которые будут использованы в дальнейшем. Для гамильтоновой системы пространство является пуассоновым многообразием \mathcal{P} с некоторой скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$, а сама система на \mathcal{P} представима в виде

$$\dot{x} = \{x, H\} \quad (1)$$



для некоторой функции Гамильтона $H(\mathbf{x})$. При этом функции Казимира скобки (вообще говоря локально) расслаивают пуассоново многообразие на симплектические листы. Последние являются симплектическими многообразиями.

Класс уравнений типа (1) допускает расширение.

Определение 1. Систему на пуассоновом многообразии \mathcal{P} вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu(\mathbf{x})\{\mathbf{x}, H\}, \quad (2)$$

где $\mu(\mathbf{x})$ — знакоопределенная на всем \mathcal{P} функция, называют конформно-гамильтоновой. Множитель $\mu(\mathbf{x})$ называют приводящим.

Легко видеть, что траектории решений (2) после замены времени

$$d\tau = \mu(\mathbf{x})dt \quad (3)$$

совпадают с траекториями (1).

2.2. Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим задачу о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. В таком случае скорость точки контакта равна нулю. Движение шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}, & \mathbf{M} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - D(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\gamma}, & \mathbf{J} = \mathbf{I} + D\mathbf{E}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, & D = ma^2 \geq 0, & \mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|, \end{cases} \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\gamma}$ — орт вертикали, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции шара относительно его центра, m — масса шара, a — его радиус. Вектор \mathbf{M} имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта. Как показано С. А. Чаплыгиным [15], данная система обладает четырьмя первыми интегралами

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), & N &= (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \\ C &= (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), & K_1 &= (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1 \end{aligned}$$

и инвариантной мерой с плотностью (интегрирующим множителем)

$$\mu(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 1/\sqrt{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, J^{-1}\boldsymbol{\gamma})} \quad (5)$$

Таким образом, задача о качении шара Чаплыгина интегрируема по Эйлеру–Якоби [11]. Теперь закрепим внутри шара гириостат. Тогда уравнения (4) можно обобщить:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (6)$$

где \mathbf{K} — постоянный вектор момента гириостата. А. П. Маркеев [12] показал, что система (6) также интегрируема по Эйлеру–Якоби с тем же интегрирующим множителем (5) и допускает интегралы

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), & N &= (\mathbf{M} + \mathbf{K}, \mathbf{M} + \mathbf{K}), \\ C &= (\mathbf{M} + \mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma}), & K_1 &= (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно [6], системы (4) и (6) являются конформно-гамильтоновыми с гамильтонианом H . Кроме того, оказывается, что приводящий множитель совпадает с интегрирующим. Скобку Пуассона легко выписать в координатах $\mathbf{L} = (\mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}(L_k - D \det \mathbf{J}((\mathbf{L}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\mu}^2 - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}))\boldsymbol{\gamma}_k), \quad \{L_i, \boldsymbol{\gamma}_j\} = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\gamma}_k, \quad \{\boldsymbol{\gamma}_i, \boldsymbol{\gamma}_j\} = 0. \quad (8)$$

При этом C и K_1 являются функциями Казимира. Они расслаивают фазовое пространство $\mathbb{R}^3(\mathbf{M}) \times \mathbb{S}^2(\boldsymbol{\gamma})$ на четырехмерные симплектические листы $\mathcal{M}_c^4 = \{C = c, K_1 = 1\}$.

Следует отметить, что скобка (8) при $D = 0$ совпадает со скобкой Пуассона в коалгебре $e(3)^*$. Приводящий множитель (5) обращается в константу. Таким образом, уравнения (4) и (6) становятся гамильтоновыми без замены времени. Более того, система (4) при $D = 0$ совпадает с уравнениями для волчка Эйлера, а система (6) при $D = 0$ — для случая Жуковского–Вольтерра [7].

Будем рассматривать лишь случай различных собственных значений тензора \mathbf{I} , при этом упорядочим главные моменты инерции $I_1 < I_2 < I_3$. Компоненты гиростата $\mathbf{K} = (k_1, k_2, k_3)$ и параметр D могут обращаться в нуль.

3. Особые решения

3.1. Критические периодические решения

Опишем критические периодические решения на каждом уровне интеграла площадей $C = c \in \mathbb{R}$. Для этого ограничим интегралы H и N на симплектическое многообразии \mathcal{M}_c^4

$$\tilde{H} := H|_{\mathcal{M}_c^4} \quad \tilde{N} := N|_{\mathcal{M}_c^4}$$

и определим отображение момента

$$\tilde{H} \times \tilde{N} : \mathcal{M}_c^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, n). \quad (9)$$

Согласно теореме Лиувилля–Арнольда, неособые поверхности уровня отображения (9) будут объединениями двумерных торов. На особых же слоях существуют точки, где ранг дифференциала отображения (9) меньше двух. Поскольку многообразии \mathcal{M}_c^4 симплектическое, неподвижные точки векторных полей (1) и (2) находятся из соотношения $d\tilde{H} = 0$. Таким образом, особые точки отображения (9) либо неподвижные, либо ранга один, где

$$d\tilde{N} = 2\lambda d\tilde{H} \quad (10)$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Известно, что во втором случае особые точки не изолированы [5]. Через каждую из них проходит целая траектория точек ранга один, причем коэффициент λ является интегралом этой траектории, а сама траектория замкнута. В дальнейшем такие критические периодические решения будем называть *критическими траекториями*.

Для случая шара Чаплыгина с гиростатом будем различать два типа критических периодических решений. Для решений *первого типа* $\lambda \neq 0$, для *второго типа* $\lambda = 0$.

Критические решения первого типа находим следующим образом. Фиксируем $\lambda \neq 0$ и решаем уравнение (10). Для этого находим точки, где зависимы $dN - 2\lambda dH$, dC , и dK_1 , и ограничиваем их на \mathcal{M}_c^4 . Градиенты проще выписывать в координатах $\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}$. Следует отметить, что вдоль критических решений первого типа вектора $\mathbf{M} + \mathbf{K}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ независимы.

Так уравнение (10) становится эквивалентно условию $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} = \lambda\boldsymbol{\omega}$. Вдоль критических решений второго типа $\mathbf{M} + \mathbf{K}$ параллелен $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда из (7) следует, что $\mathbf{M} + \mathbf{K} = c\boldsymbol{\gamma}$. Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ им не коллинеарен.

При отображении момента (9) каждое критическое решение переходит в точку. Это облегчает описание критических траекторий. Выпишем две системы

$$\begin{cases} \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} = \lambda\boldsymbol{\omega}, \\ c = (\lambda - D)(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}), \\ n = \lambda^2((\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})^2) + c^2, \\ 2h = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - D(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})^2, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M} = c\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{K}, \\ n = c^2, \\ 2h = (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + \frac{D(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})^2}{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь h, n, c — значения интегралов H, N, C соответственно. Из (7) получаем

Лемма 1. *Вдоль критической траектории первого типа для некоторого $\lambda \neq 0$ имеет место (11). Вдоль критических траекторий второго типа справедливо (12).*

Таким образом для описания критических траекторий первого типа необходимо найти h, n, c, λ , где система (11) совместна относительно $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$. Для описания траекторий второго типа, необходимо исследовать совместность системы (12) относительно $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$. Совместность обеих систем обсуждается в параграфе «бифуркационные кривые».

Критические решения первого типа представляют собой *перманентные вращения* вокруг неподвижного вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Движения вдоль них допускают наглядную интерпретацию. Они представляют собой такие движения, когда скорость точки контакта и вектор угловой скорости постоянны в неподвижной системе координат.

Динамически несимметричный шар Чаплыгина с гиростатом и без гиростата допускает вращение с неподвижной точкой контакта. Вдоль таких решений векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{M} + \mathbf{K}$ вертикальны.

Критические решения второго типа описаны в работе [2]. Там показана связь этих решений с движением свободного гиростата. Также выведены уравнения и проиллюстрированы движения точки контакта.

3.2. Неподвижные точки

Рассмотрим неподвижные точки векторного поля (6). Разобьем все такие точки на точки первого рода, в которых $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, и точки второго рода, где $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Лемма 2. *Точки первого рода изолированы. В каждой из них $n = c^2$ и ранг отображения момента (9) равен нулю. При $c^2 < (\mathbf{K}, \mathbf{K})$ объединение точек второго рода является окружностью, в каждой из них ранг отображения (9) равен единице.*

Заметим также, что точки второго рода лежат на одном совместном уровне интегралов H и N , а именно: $h = 0, n = (\mathbf{K}, \mathbf{K})$.

4. Бифуркационная диаграмма

4.1. Бифуркационные кривые

Для описания бифуркационной диаграммы отображения (9) найдем наборы h, n , когда совместна либо система (11), либо система (12). Отметим, что реальные движения возможны лишь в области $n \geq c^2$, поэтому на бифуркационной диаграмме будет присутствовать ограничительная прямая $n = c^2$.

Теорема 1. *Бифуркационная диаграмма отображения (9) состоит из объединения 1) набора кривых σ*

$$\begin{aligned} n(\lambda) &= \lambda^2 \left(\frac{k_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{k_2^2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{k_3^2}{(J_3 - \lambda)^2} - \frac{c^2}{(D - \lambda)^2} \right) + c^2, n > c^2, \\ 2h(\lambda) &= \frac{k_1^2 J_1}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{k_2^2 J_2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{k_3^2 J_3}{(J_3 - \lambda)^2} - \frac{Dc^2}{(D - \lambda)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

2) отрезка σ_0 при $c = 0$

$$n = 2Dh - D(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{K}, \mathbf{K}), \text{ где } n \in [0, D^2(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{K}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{K})],$$

3) луча σ_i , если $k_i = 0$,

$$n = 2J_i h - \frac{Dc^2}{I_i} - J_i \sum_{j \neq i} \frac{k_j^2}{I_j - I_i}, \text{ где } n \geq c^2 + J_i^2 \left(\sum_{j \neq i} \frac{k_j^2}{(I_j - I_i)^2} - \frac{c^2}{I_i^2} \right),$$

4) отрезка τ на прямой $n = c^2$,

5) точки T_0 $h = 0, n = (\mathbf{K}, \mathbf{K})$ при $c^2 \leq (\mathbf{K}, \mathbf{K})$.

Следует отметить, что количество кривых σ может быть от двух до шести. Будем различать их интервалами для λ . Набор кривых σ , отрезок σ_0 и лучи $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ отвечают критическим решениям первого типа. Образ критических решений второго типа лежит на отрезке τ . Прообраз точки T_0 состоит из неподвижных точек второго рода.

Неподвижные точки первого рода отображаются в точки пересечения кривых σ либо отрезка σ_0 и прямой $n = c^2$. Это легко понять следующим образом. В каждой неподвижной точке первого рода имеет место $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} = \lambda\boldsymbol{\omega}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, поэтому в них справедливы система (11) и формулы (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим критические решения первого типа. Из системы (11) при $\lambda \neq D$ получаем набор кривых σ . Вдоль критических решений первого типа $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ независимы. Поэтому условие совместности системы (11) $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})^2 < (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$ эквивалентно $n > c^2$.

Из (11) при $c = 0$ для $\lambda = D$ на бифуркационной диаграмме получаем дополнительный отрезок σ_0 . Луч σ_i соответствует $\lambda = J_i$. Образ критических решений второго рода лежит на прямой $n = c^2$ и образует отрезок. Теорема доказана.

Область возможных движений изображена темным цветом (см. рис. 1, 2). Уходящие на бесконечность два клюва получаются по формулам (13) при $\lambda \in (J_1, J_2)$ и $\lambda \in (J_2, J_3)$. Обrazy неподвижных точек показаны крупными точками. В случае Жуковского–Вольтерра $D = 0$, поэтому отрезок σ_0 совпадает с точкой.

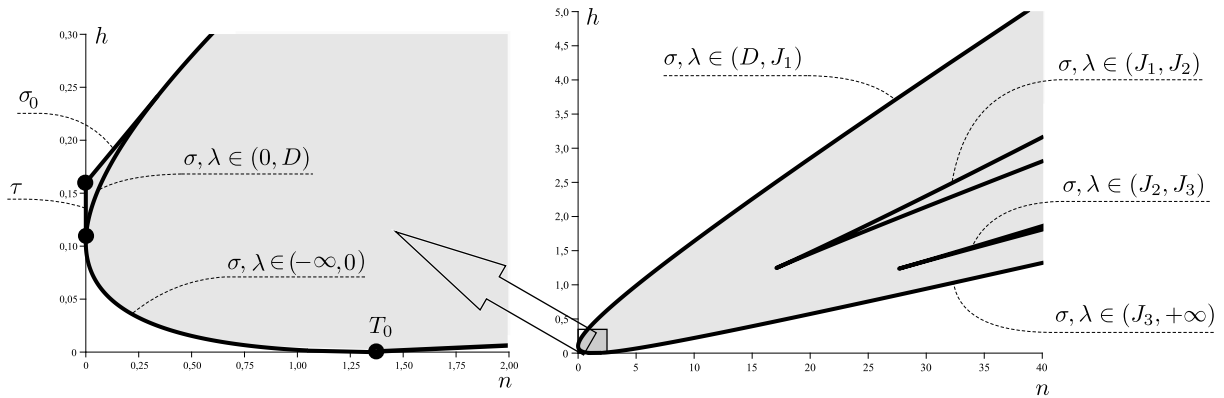


Рис. 1. $\mathbf{I} = \text{diag}(3, 6.5, 10)$, $\mathbf{K} = (0.8, 0.7, 0.5)$, $D = 2$, $c = 0$

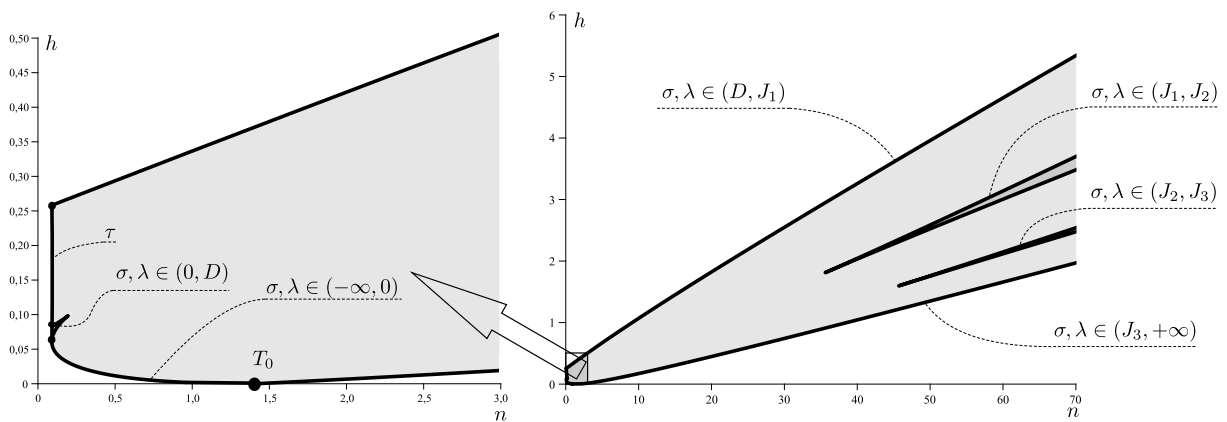


Рис. 2. $\mathbf{I} = \text{diag}(3, 6.5, 10)$, $\mathbf{K} = (0.8, 0.7, 0.5)$, $D = 5$, $c = 0.3$

Несложно видеть из (11), что каждой точке кривых σ отвечает одна критическая траектория. Это перманентное вращение вокруг постоянного вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = -(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E})^{-1} \mathbf{K}$. В таком случае решение выписывается явно:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})}{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})} \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\xi}_1 \cos(|\boldsymbol{\omega}|t) - \boldsymbol{\xi}_2 \sin(|\boldsymbol{\omega}|t)) \sqrt{1 - \frac{(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})^2}{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})}}, \quad (14)$$

где $\boldsymbol{\xi}_1$ и $\boldsymbol{\xi}_2$ — два ортогональных орта, что $[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2] = \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$. Выражения для $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$ и $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$ можно получить из системы (11).

Каждой точке отрезка σ_0 и лучей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответствует по две критические траектории, это также перманентные вращения вокруг постоянного $\boldsymbol{\omega}$.

4.2. Устойчивость периодических решений и бифуркационный комплекс

Исследуем устойчивость критических решений аналитически. Для этого воспользуемся подходом, опирающимся на топологические и дифференциально-геометрические соображения. Общие основы подхода изложены в книге [5]. Устойчивость критических окружностей в прообразе кривых σ зависит от знака выражения

$$(\lambda - D) \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E}) n'_\lambda. \quad (15)$$

Теорема 2. В прообразе каждой внутренней точки

- 1) кривых из набора σ лежит одно устойчивое критическое решение, если выражение (15) положительно, и одно неустойчивое в противном случае;
- 2) отрезка σ_0 лежат два устойчивых критических решения;
- 3) луча σ_i лежат два устойчивых критических решения, если $i = 1, 3$, и два неустойчивых, если $i = 2$;
- 4) отрезка τ лежат либо неподвижные точки, либо устойчивые критические решения.

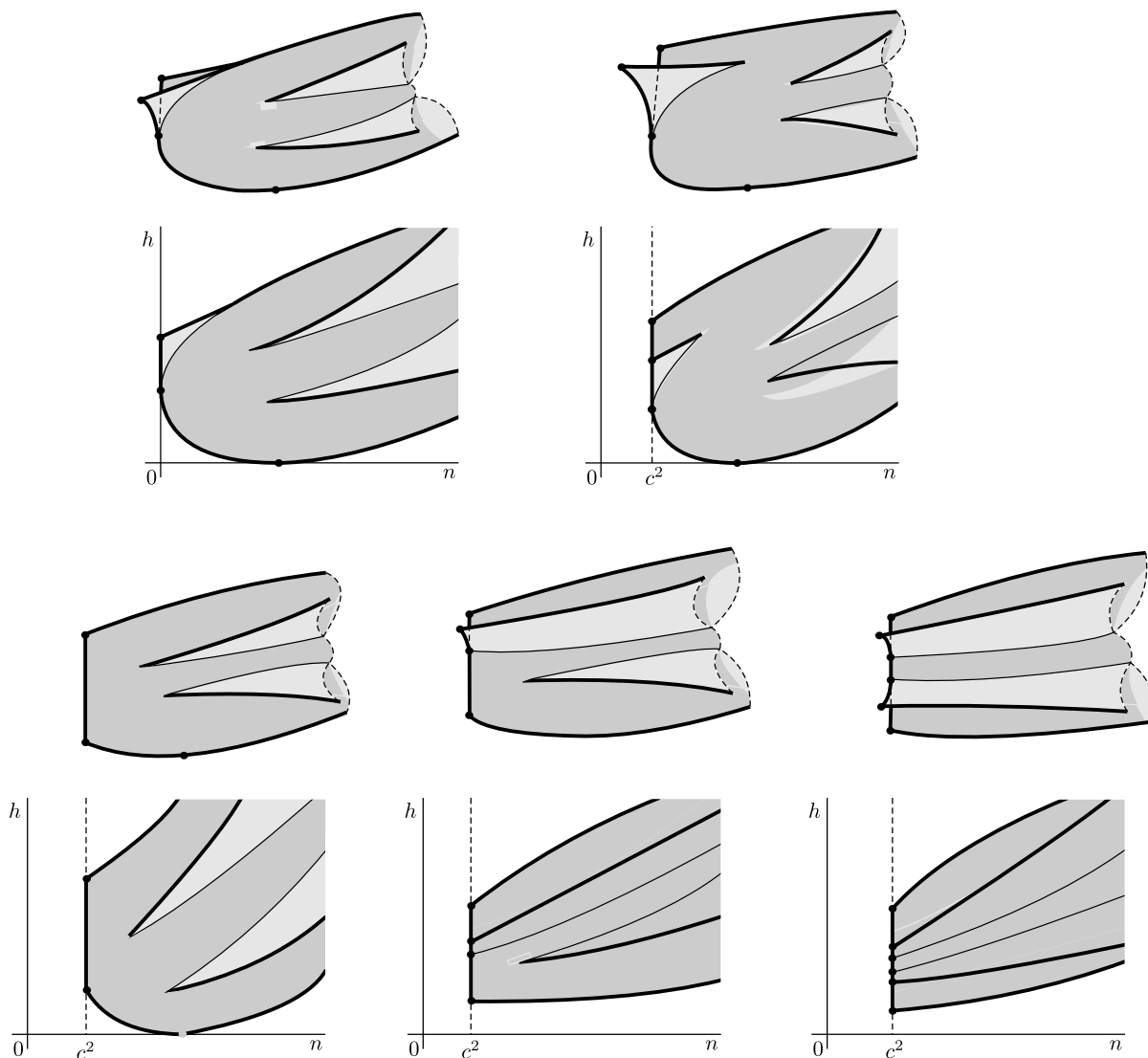


Рис. 3. Бифуркационные комплексы, $\mathbf{K} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{I} = (1, 2, 3)$, $D = 1$

Доказательство этой теоремы техническое, и оно вынесено в дополнение.

Проиллюстрируем результат с помощью *бифуркационного комплекса* [4]. Для каждого $c \in \mathbb{R}$ многообразие \mathcal{M}_c^4 можно профакторизовать по связным компонентам совместных поверхностей уровня интегралов \tilde{H} и \tilde{N} . Получится двумерный клеточный комплекс. Каждой точке его двумерных клеток отвечает один тор Лиувилля. Клеткам размерности 0 и 1

отвечают связные особые слои. Легко понять, что этот комплекс является накрытием над образом отображения момента (9). При этом 0 и 1-мерные клетки проектируются на бифуркационную диаграмму. Теорема 2 позволяет описать топологию этого комплекса (см. рис. 3).

Границы комплексов изображены жирными линиями. В их прообразе лежат устойчивые периодические решения. В прообразе тонких сплошных линий лежат связные особые слои, содержащие неустойчивые критические траектории. Соответствующие линии на бифуркационных диаграммах тоже либо жирные, либо тонкие. Образы неподвижных точек отмечены жирными точками. Верхний левый комплекс соответствует $c = 0$. Далее c увеличивается.

4.3. Стабилизация и дестабилизация критических траекторий

В работе [15] исследована устойчивость периодических траекторий для задачи (4). Там показано, что в случае нулевой константы площадей особые периодические решения представляют собой вращения вокруг главных осей, причем вращение вокруг средней оси неустойчиво, а вокруг наибольшей и наименьшей — устойчиво. Возникают естественные вопросы, возможно ли стабилизировать вращения вокруг средней оси, добавив в шар гироскоп, параллельный этой оси? А дестабилизируются ли устойчивые вращения, если гироскоп направить вдоль наибольшей или наименьшей осей?

Подробно разберем случай $c = 0$. Бифуркационная диаграмма отображения (9) при $\mathbf{K} = 0$ на \mathcal{M}_0^4 состоит из трех лучей

$$\sigma_i : h = \frac{n}{2J_i}, i = 1, 2, 3.$$

В прообразе точек лучей σ_1 и σ_3 лежит по две устойчивые критические траектории, в прообразе σ_2 — по две неустойчивые (см. рис. 4).

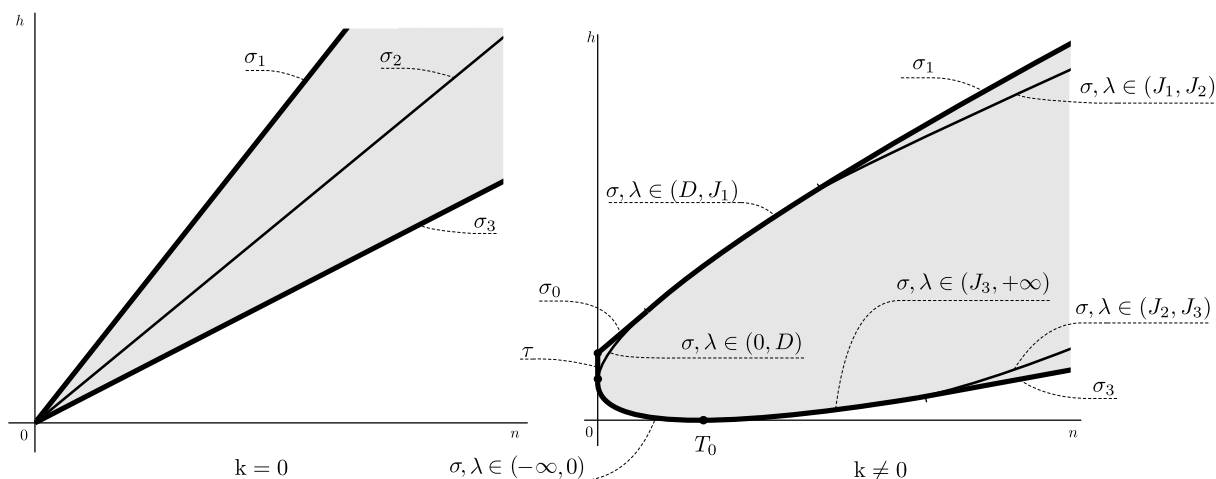


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма при $\mathbf{K} = (0, k, 0)$, $c = 0$

Теперь к шару добавим гироскоп, параллельный средней оси $\mathbf{K} = (0, k, 0)$. На бифуркационной диаграмме отображения (9) (см. рис. 4) в прообразе более жирных кривых лежат устойчивые критические решения. Имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\mathbf{K} = (0, k, 0)$. Тогда в прообразе каждой точки дуг $\sigma, \lambda \in (-\infty, 0) \cup (D, J_1) \cup (J_3, +\infty)$ (см. рис. 4) лежит по одной, а в прообразе отрезка σ_0 — по две устойчивые критические траектории. Они являются равномерными вращениями вокруг средней оси инерции.

При $\mathbf{K} = 0$ перманентные вращения вокруг средней оси инерции были неустойчивы. Добавив же гиростат вида $\mathbf{K} = (0, k, 0)$ некоторые из таких вращений стабилизировались. Без ограничения общности положим $k > 0$. Тогда в прообразе дуг $\sigma, \lambda \in (J_1, J_2) \cup (J_2, J_3)$ лежат неустойчивые вращения вокруг средней оси, причем $\omega_2 \in \left(-\infty, -\frac{k}{I_2 - I_1}\right) \cup \left(\frac{k}{I_3 - I_2}, +\infty\right)$. В прообразе же дуг $\sigma, \lambda \in (-\infty, 0) \cup (D, J_1) \cup (J_3, +\infty)$ и отрезка σ_0 лежат устойчивые вращения. Они соответствуют $\omega_2 \in \left(-\frac{k}{I_2 - I_1}, \frac{k}{I_3 - I_2}\right)$. Таким образом, перманентные вращения вокруг средней оси при небольшой угловой скорости $\omega_2 \in \left(-\frac{k}{I_2 - I_1}, \frac{k}{I_3 - I_2}\right)$ стали устойчивы.

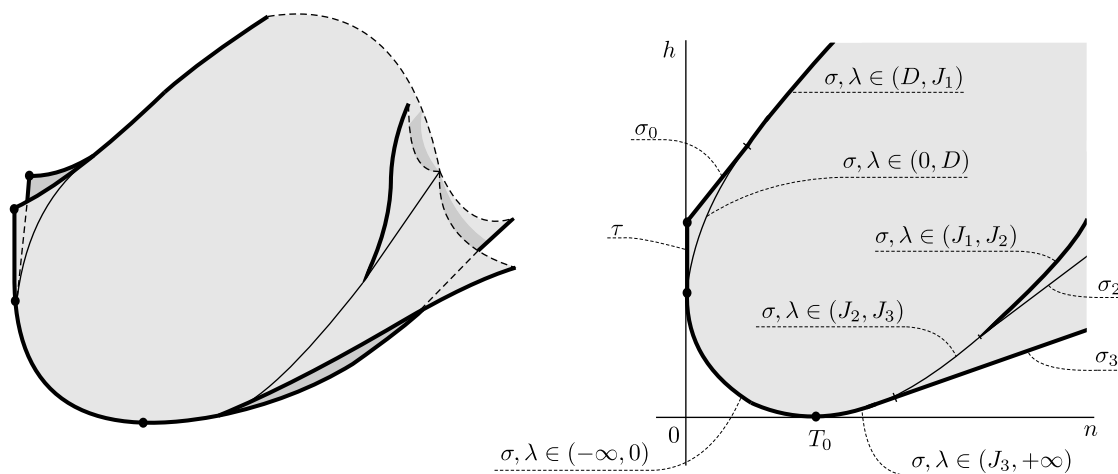


Рис. 5. Бифуркационный комплекс и диаграмма при $\mathbf{K} = (k, 0, 0)$, $c = 0$

Теперь к шару добавим гиростат и направим его вдоль устойчивой наименьшей оси $\mathbf{K} = (k, 0, 0)$. Бифуркационная диаграмма отображения момента и бифуркационный комплекс представлены на рис. 5. Получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\mathbf{K} = (k, 0, 0)$. Тогда в прообразе каждой точки дуг $\sigma, \lambda \in (0, D) \cup (J_2, J_3)$ (см. рис. 5) лежит по одной неустойчивой критической траектории. Они являются равномерными вращениями вокруг наименьшей оси инерции.

Так часть перманентных вращений вокруг средней оси стали неустойчивыми, а именно: при $k > 0$ это вращения, где $\omega_1 \in \left(-\frac{k}{I_1}, -\frac{k}{J_1}\right) \cup \left(-\frac{k}{I_3 - I_1}, -\frac{k}{I_2 - I_1}\right)$.

ДОПОЛНЕНИЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Вдоль критических решений первого типа верно

$$dN = \beta_1 dK_1 + \beta_2 dC + \beta_3 dH,$$



где $\beta_1 = -D^2(\gamma, \omega)^2$, $\beta_2 = -2D(\gamma, \omega)$, $\beta_3 = 2\lambda$. Определим матрицу $G = d^2N - \beta_1 d^2K_1 - \beta_2 d^2C - \beta_3 d^2H$. Двумерное пространство, ортогональное градиентам (7) и трансверсальное векторному полю (6), натянуто на векторы

$$r_1 = \begin{pmatrix} (\lambda - D)(\gamma, \omega)\omega + b\gamma \\ \omega - (\gamma, \omega)\gamma \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} \gamma \times \omega \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } b = D(\gamma, \omega)^2 - \lambda(\omega, \omega).$$

Обозначим через \hat{G} ограничение G на $\langle r_1, r_2 \rangle$. Согласно [5, том 2, глава 5], критическая окружность устойчивая, если $\det \hat{G} > 0$, и неустойчивая, если $\det \hat{G} < 0$. Вдоль критических периодических решений первого типа получаем

$$\det \hat{G} = \frac{2((\omega, \omega) - (\gamma, \omega)^2)^2}{(1 - D(\gamma, J^{-1}\gamma)) \det \mathbf{J}} m(\lambda, \gamma, \omega),$$

где функция $m(\lambda, \gamma, \omega)$ при $\lambda \neq D, J_1, J_2, J_3$ зависит только от первого аргумента и совпадает с выражением (15). Это доказывает первый пункт теоремы. При $\lambda = D, c = 0$ функция $m(\lambda, \gamma, \omega) = 2D(\gamma, \omega)^2 \det \mathbf{I} > 0$. Следовательно, в прообразе отрезка σ_0 лежат устойчивые критические окружности. В критических точках, отвечающих лучу σ_i , имеем

$$m(\lambda, \gamma, \omega) = 2J_i^2 I_i \omega_i^2 \prod_{j \neq i} (I_j - I_i).$$

Отсюда $\det \hat{G} > 0$ для $i = 1, 3$ и $\det \hat{G} < 0$ для $i = 2$.

Исследуем критические решения второго типа. В них справедливо

$$dN = 2c dC - c^2 dK_1.$$

Определим $G = d^2N - 2c d^2C + c^2 d^2K_1$. Двумерное пространство порождено векторами

$$r_1 = \begin{pmatrix} \omega - (\gamma, \omega)\gamma \\ D(\gamma, \omega)(\omega - (\gamma, \omega)\gamma) \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} \gamma \times \omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Опять пусть \hat{G} будет ограничением G на $\langle r_1, r_2 \rangle$. Тогда

$$\det \hat{G} = 4((\omega, \omega) - (\gamma, \omega)^2)^2 (c + D(\gamma, \omega))^2 > 0.$$

Легко понять, что во внутренних точках отрезка τ выражение $c + D(\gamma, \omega)$ не равно нулю. Значит, периодические решения второго типа устойчивые. Теорема доказана.

Автор благодарит А. В. Борисова и И. С. Мамаева за постановку задачи и полезные обсуждения в ходе работы над статьей.

Список литературы

- [1] Borisov A. V. and Mamaev I. S. Rolling of a Rigid Body on Plane and Sphere: Hierarchy of Dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200; см. также: Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение твердого тела по плоскости и сфере. Иерархия динамики // Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. статей. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 328 с.

- [2] Kilin A. A. The Dynamics of Chaplign Ball: The Qualitative and Computeral Analysis // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [3] Бобылев Д. К. О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения // Матем. сб., 1892, т. 16, № 3, с. 544–581.
- [4] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем. В печати, Нелинейная динамика, 2009.
- [5] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация: В 2х тт. Ижевск: РХД, 1999. 892 с.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, вып. 5, с. 793–795.
- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: ИКИ, 2005. 576 с.
- [8] Борисов А. В., Мамаев И. С. Препятствие к гамильтоновости интегрируемых систем // Докл. РАН, 2002, т. 387, № 6, с. 764–766.
- [9] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280.
- [10] Жуковский Н. Е. О гироскопическом шаре Д. Н. Бобылева // Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, 1893, т. 6, вып. 1, с. 11–17; см. также: Жуковский Н. Е. Полное собр. соч. М.–Л.: ОНТИ, 1937. Т. 1, с. 352–369.
- [11] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Усп. механ., 1985, т. 8, № 3, с. 85–107.
- [12] Маркеев А. П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // Изв. АН СССР. Механ. тв. тела, 1985, № 1, с. 64–65.
- [13] Ошемков А. А. Топологическая классификация гамильтонианов в некоторых классических случаях интегрируемости гамильтоновых систем: Дисс. на соиск. канд. физ.-матем. наук. М., 1992.
- [14] Чаплыгин С. А. О движении тяжелого твердого тела вращения на плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, 1897, т. 9; см. также: Собр. соч.: В 4-х тт. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. Т. 1, с. 57–75.
- [15] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139–168; см. также: Собр. соч.: В 4-х тт. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. Т. 1, с. 76–101.