

Г. Г. Исламов, А. Г. Исламов

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Общие утверждения относительно линейной краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений систематизированы в монографии [1]. Однако вопросы численного решения конкретных классов краевых задач рассмотрены в ней лишь фрагментарно. Мы показываем, что в случае гильбертова пространства восходящий к Э. Шмидту метод минимальной конечномерной аппроксимации компактной инъекции, порождающей функциональное пространство гладких функций, позволяет строить ненасыщаемые алгоритмы решения линейных краевых задач.

Пусть $[a, b]$ - отрезок числовой прямой, C - поле комплексных чисел с обычной нормой $|\cdot|$, L_2 - пространство комплекснозначных функций $y(t)$, у которых скалярные функции вещественной и мнимой части $\operatorname{Re} y(t)$ и $\operatorname{Im} y(t)$ измеримы по Лебегу, а функция $|y(t)|$ квадратично суммируема на отрезке $[a, b]$. Наделим L_2 структурой сепарабельного гильбертова пространства, задав в нем скалярное произведение элементов $u(t)$ и $v(t)$ по правилу $\langle u, v \rangle = (b - a)^{-1} \int_a^b u(t) \overline{v(t)} dt$, где черта сверху обозначает комплексное сопряжение. На классе комплекснозначных функций $y(t)$, у которых $\operatorname{Re} y(t)$ и $\operatorname{Im} y(t)$ абсолютно непрерывны, задан оператор дифференцирования $D = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} (i = \sqrt{-1})$. Пусть W_2^m - пространство функций $x : [a, b] \rightarrow C$, на которых определен оператор m -го дифференцирования D^m со значениями в пространстве L_2 . Из результатов работы [2] для скалярного случая вытекает следующая факторизация тождественного оператора в пространстве W_2^m :

$$x = \Lambda \delta x + \sum_{j=1}^m u_j r_j(x). \quad (1)$$

Здесь компактный оператор $\Lambda : L_2 \rightarrow W_2^m$ задается при $m \geq 2$

равномерно сходящимся на отрезке $[a, b]$ разложением

$$\Lambda f(t) = \frac{\{i(t-a)\}^{m-1}}{(m-1)!} \int_a^b f(s) ds + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left(\frac{b-a}{2\pi k} \right)^m \varphi_k(t) \langle f, \varphi_k \rangle,$$

где $\varphi_k(t) = \exp\{2\pi k i(t-a)/(b-a)\}$. Линейный оператор $\delta : W_2^m \rightarrow L_2$ определяется равенством

$$\delta x(t) = D^m x(t) + (D^{m-1}x(a) - \int_a^b \psi_1(s) D^m x(s) ds)/(b-a).$$

Функционалы $r_j, j = 1, \dots, m$ имеют специальный вид

$$r_j(x) = D^{j-1}x(a) - \int_a^b \psi_{m-j+1}(s) D^m x(s) ds, j = 1, \dots, m-1,$$

$$r_m(x) = \frac{1}{i}(D^{m-1}x(b) - D^{m-1}x(a)),$$

где многочлены $\psi_j(t)$ могут быть вычислены рекурсивно:

$$\psi_1(t) = i\{(t-a)/(b-a) - 1/2\},$$

$$\psi_j(t) = (b-a)^{j-1} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} (2\pi k)^{-j} - i \int_a^t \psi_{j-1}(s) ds, j \geq 2.$$

Система элементов $u_1, \dots, u_m$ биортогональна системе функционалов $r_1, \dots, r_m$ и образует базис конечномерного подпространства E_m , натянутого на многочлены $(t-a)^j, j = 0, \dots, m-2, (t-a)^m + mi(t-a)^{m-1}$. Хотя имеет место теоретико-множественное включение $W_2^m \subset L_2$, будем рассматривать W_2^m как самостоятельное комплексное банахово пространство с нормой $\|x\|_{W_2^m} =$

$= \|\delta x\|_{L_2} + \sum_{j=1}^m |r_j(x)|$. Линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}$, отображающий банахово пространство W_2^m в банахово пространство L_2 , и система m линейно независимых функционалов $l_1, \dots, l_m$ из сопряженного пространства $(W_2^m)^*$ определяют краевую задачу $\mathcal{L}x = f, l_1(x) = \beta_1, \dots, l_m(x) = \beta_m$, которую будем предполагать однозначно разрешимой. Запишем эту задачу в виде операторного уравнения $Ax = g$, где оператор A взаимно однозначно

