МНОГОЦЕЛЕВОЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

Г.Г. Исламов, А.Г. Исламов
Удмуртский государственный университет, г. Ижевск
E-mail: gislamovg@uni.udm.ru

Высокопроизводительные вычисления, как правило, ассоциируются с применением высокопроизводительной вычислительной техники. Однако, это не единственно возможный путь ускорения расчётов. Мы считаем, что огромные резервы увеличения производительности вычислений можно обнаружить при правильном выборе алгоритма для конкретных типов задач, когда в процессе вычислений одновременно удаётся решить весь класс проблем, относящихся к данной задаче. Подтверждением этого служат опубликованные ранее работы [1-4], в которых используется универсальная операция над матричными структурами [2].

Метод балансов материальных и финансовых ресурсов [5] служит для учёта, контроля и планирования их воспроизводства и расходования в ходе любой экономический деятельности. Рассматриваемая нами математическая модель, лежащая в основе этого метода, состоит из двух балансовых уравнений

$$x - Ax = y, \quad p - pA = q .$$

Первое (основное) уравнение описывает баланс в натуральном выражении, а второе (двойственное) уравнение – баланс в стоимостном выражении.

Показателями модели служат $n \times n$ – матрица A неотрицательных коэффициентов норм затрат, где величиной n задаётся число видов продукции, учитываемой в модели. Компоненты вектора-столбца x длины n содержат объёмы рассматриваемой продукции и тем самым могут быть лишь неотрицательными. Вектор-столбец y называется вектором экспорта-импорта. Положительные компоненты этого вектора отвечают конечной продукции и соответствуют экспорту, тогда как отрицательные компоненты характеризуют объёмы импорта. Величина Ax описывает затраты в сфере производства. Компоненты вектора-строки p длины n содержат цены на производимую продукцию и могут быть лишь неотрицательными. Вектор-строка q называется стоимостным вектором единичной продукции. Положительные компоненты этого вектора отвечают прибыли и характеризуют доходную продукцию, тогда как отрицательные компоненты свидетельствуют об убыточности производства соответствующих видов продукции и определяют убытки от реализации единичной продукции. Величина pA описывает себестоимость производимой в экономике продукции.

Задача описания производства на основе метода балансов включает в себя ряд проблем. Первые две проблемы состоят в численном решении основного и двойственного балансового уравнения. Третья проблема, которую мы относим к категории наиболее важных, заключается в оценке относительной погрешности результата x, p при вариации исходных величин модели: матрицы A и векторов y и q. Как известно, в этой проблеме ведущая роль принадлежит числу обусловленности [6] $cond_\infty B = \|B\|_\infty \left\|B^{-1}\right\|_\infty$ матрицы $B = I - A$. Здесь I – единичная матрица порядка n, $\|B\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|\delta_{ij} - a_{ij}\right|$ – норма матрицы, согласованная с чебышевской нормой вектора $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \le j \le n} \left|x_j\right|$, δ_{ij} – символ Кронекера. Отметим ещё одну проблему, имеющую непосредственное отношение к нашей задаче. Это вычисление определителя $\det B$ и обратной матрицы B^{-1} полных затрат. Наконец, немаловажное значение имеет проблема проверки продуктивности балансовой модели [5].

Мы показываем, что *универсальная операция над матричными структурами* [2] позволяет одновременно решить все указанные выше проблемы нашей задачи в ходе излагаемого ниже алгоритма для гибридных вычислительных систем, которые состоят из многоядерного центрального процессора и многопроцессорных графических устройств компании NVIDIA, образующих параллельную вычислительную архитектуру CUDA [7]. Эта операция естественно реализуется на архитектуре CUDA [3], а сам алгоритм требует интенсивного взаимодействия с центральным процессором лишь на этапе передачи матрицы A, векторов y, q и выдачи конечного результата x, p.

Начнём с описания информационной структуры нашего алгоритма. Начальная таблица имеет вид

		p_{n+1}	p_{n+2}	$\cdots$	p_{2n}	
	1	$-q_1$	$-q_2$	$\cdots$	$-q_n$	
x_{n+1}	y_1	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1m}	p_1

x_{n+2}	y_2	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2n}	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{2n}	y_n	b_{n1}	b_{n2}	$\cdots$	b_{nn}	p_n
		x_1	x_2	$\cdots$	x_n	

Выделенная цветом часть информационной таблицы является числовой и, в дальнейшем, будет изменяться при выполнении универсальной операции над матричной структурой. Текущее её значение будет обозначаться буквой D. Матрица D окружена одномерными столбцовыми и строчными массивами x-переменных и p-переменных, положения которых будут меняться при пересчёте этой матрицы согласно правилу, учитывающему положение *разрешающего элемента* числовой таблицы. Разрешающие элементы не равны нулю и выбираются последовательно на основной диагонали позиции матрицы B, которая учитывается в начальной информационной таблице.

Опишем теперь правило пересчёта текущей информационной таблицы по выбранному разрешающему элементу $\gamma_k = d_{kk}, k = 1,...,n$. Переменные x_k и x_{n+k}, соответственно p_k и p_{n+k}, меняются местами, а остальные переменные остаются на своих местах. Элементы числовой матрицы D пересчитываются по правилу (универсальной матричной операции): $d_{00} := d_{00} * \gamma_k$,

$$d_{ij} := \frac{1}{\gamma_k}\begin{cases} 1, если\ \ i = k, j = k; \\ d_{ij}, если\ i = k; \\ -d_{ij}, если\ j = k; \\ d_{ij} * \gamma_k - d_{ik} * d_{kj}, если\ \ i \neq k, j \neq k. \end{cases}$$

Согласно критерию Хокинса-Саймона [8] матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда главные последовательные миноры $b_1, ..., b_n$ матрицы B больше нуля. Нетрудно заметить, что дополненная единицей с начала последовательность $1, b_1, ..., b_n$ при делении текущего элемента на предыдущий элемент даёт последовательность $\gamma_1, ..., \gamma_n$ разрешающих элементов нашего алгоритма. Это значит, что положительность всех разрешающих элементов алгоритма есть необходимое и достаточное условие продуктивности матрицы норм затрат.

Далее, очевидно, что произведение всех разрешающих элементов равно определителю матрицы B, который будет расположен в нулевой строке и нулевом столбце заключительной таблицы D.

Заметим также, что в последней таблице на месте матрицы B мы будем иметь матрицу полных затрат B^{-1}, которая позволит нам вычислить число обусловленности матрицы B. Наконец, на позиции компонент векторов экспорта-импорта y и стоимостного вектора единичной продукции q мы найдем соответственно объёмы x и цены p производимой продукции.

Если в процессе алгоритма текущий диагональный элемент матрицы D равен нулю, то следует придерживаться стратегии выбора разрешающего элементы, следуя работе [9].

Литература

1. Исламов Г.Г., Исламов А.Г. Гибридные вычисления при расчёте балансовой модели экономики // Новые образовательные технологии в вузе (НОТВ – 2010): седьмая междунар. науч.-метод. конф., 8-10 февр. 2010 г.: сб. материалов / отв. ред. А.В. Цветков. – Екатеринбург, 2010. – Ч. 2. – С. 254-258.
2. Исламов Г.Г. Универсальная операция над матричными структурами // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Международная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 16-18 июня 2009 г. Тезисы докладов. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова; Макс Пресс, 2009.– 386 с.
3. Исламов Г.Г. Реализация на процессорах с технологией CUDA универсальной операции над матричными структурами // Труды Второй международная конференция «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Технологии высокополигонального моделирования», Т. 1, Ижевск – УдГУ, 2010. – С. 97-100.
4. Исламов Г.Г. Факторы процесса внедрения технологий высокопроизводительных вычислений в учебно-научный и производственный потенциал Удмуртской Республики // Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования: труды Первой междунар. конф., Ижевск, 4-6 февр. 2009 г. / МГУ, Ин-т

управления РАН, ГОУВПО «Удмурт. гос. ун-т»; редкол.: С.Н. Васильев, Е.И. Моисеев, Е.И. Артамонов [и др.]. – Ижевск, 2009. – Т. 1. Пленарные доклады. Секции 1, 2. – С. 139-143.

5. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
6. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – Москва-Ижевск: РХД, 2002. – 848 с.
7. NVIDIA CUDA Programming Guide Version 3.2 // www.nvidia.com.
8. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. – 520 с.
9. Исламов Г.Г., Коган Ю.В. Об одном алгоритме поиска базисного минора матрицы // Вестник Удмуртского госуниверситета. Математика.2006, № 1. – С. 63-70.