

О ПОСТРОЕНИИ СПЛАЙНА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Родионов, Н.В. Родионова

Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

Тел.: (3412) 91-61-31, e-mail: rodionov@uni.udm.ru

Для численного решения задач математической физики мы применяем специальные многомерные сплайны произвольной степени [1], а в настоящей работе мы переносим процедуру построения разностных схем с уравнения теплопроводности [2] на волновое уравнение. Приводится итоговая система линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет построить сплайн наилучшего приближения для начально-граничной задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0, x) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, 1]; \quad u(t, 0) = \alpha(t), \quad u(t, 1) = \beta(t), \quad t \geq 0.$$

Пусть $\tau > 0$, и через Ω обозначим прямоугольник $[0, 2\tau] \times [0, 1]$. Пусть, далее, $h = \frac{1}{2N}$, где $N \in \mathbb{N}$, а точки $(\tau_i, h_j) \in \Omega$ таковы, что $\tau_i = i\tau$, $i = 0, 1, 2$, $h_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, 2N$. Каждому узлу сетки $\{(\tau_i, h_j)\}$ сопоставим значение $u_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, \dots, 2N$, причем $u_{0j} = \phi(h_j)$ для всех $j = 0, 1, \dots, 2N$, $u_{10} = \alpha(\tau_1)$, $u_{20} = \alpha(\tau_2)$, $u_{1,2N} = \beta(\tau_1)$, $u_{2,2N} = \beta(\tau_2)$.

В качестве приближенного решения исходной задачи принимаем сплайн наилучшего приближения задачи $J = J(u) \doteq \|u_{tt} - c^2 u_{xx}\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow \min$, $u \in \sigma_\lambda(\Omega)$, где через $\sigma_\lambda(\Omega)$ (при фиксированном $\lambda \in [0, 1]$) обозначено конечномерное линейное пространство размерности $4N - 2$, состоящее из сплайнов, зависящих от коэффициентов u_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, 2N - 1$.

Далее используем обозначения: $\mu \doteq 1 - \lambda$, $\theta \doteq c^2 \tau^2 / h^2$, $\psi_j \doteq \psi(h_j)$, $j = 1, \dots, 2N - 1$,

$$x_j \doteq u_{2j} - u_{0j}, \quad y_j \doteq u_{2j} - 2u_{1j} + u_{0j}, \quad j = 0, 1, \dots, 2N,$$

$$Z_k \doteq u_{0,2k-2} - 2u_{0,2k-1} + u_{0,2k}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Коэффициенты оптимального аппроксимирующего сплайна удовлетворяют системе:

$$x_{2k-1} - \lambda y_{2k-2} - y_{2k-1} - \mu y_{2k} = 2\tau \psi_{2k-1}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1)$$

$$\mu y_{2k-2} + \lambda y_{2k} - (1 - \lambda\mu)\theta(x_{2k-2} - 2x_{2k-1} + x_{2k}) - \theta Z_k = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$x_{2k} - 2y_{2k} = 2\tau \psi_{2k}, \quad k = 1, \dots, N - 1, \quad (3)$$

$$\lambda^2 \mu^2 y_{2k-2} - (\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda^2 \mu^2) y_{2k} + \lambda^2 \mu^2 y_{2k+2} + \mu^2 \theta Z_k + \lambda^2 \theta Z_{k+1} = 0, \quad k = 1, \dots, N - 1. \quad (4)$$

Совокупность уравнений (4) имеет самостоятельный характер: ее уравнения связывают между собой лишь переменные вида y_{2m} . Матрица системы (4) при $\lambda\mu = 0$ имеет диагональный, а при $\lambda\mu \neq 0$ – трехдиагональный вид. Доказана однозначная разрешимость системы. В частности, найдены явные формулы для решений. Из уравнений (3), (2), (1) последовательно находим значения x_{2k} , x_{2k-1} , y_{2k-1} соответственно. В конечном счете, находим все коэффициенты оптимального аппроксимирующего сплайна u_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, 2N - 1$.

Литература

1. Родионов В.И. О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в численном анализе // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2010. – № 4. – С. 146–153.
2. Родионов В.И., Родионова Н.В. О построении сплайна наилучшего приближения для простейшего уравнения теплопроводности // Труды XVII Всероссийской научно-методич. конф. «Телематика'2010». – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – С. 373–374.