

Об устойчивости перманентных вращений Штауде в общем случае геометрии масс твердого тела

О. В. Холостова

Московский авиационный институт
(Государственный технический университет)
125871, Россия, Москва, Волоколамское ш., 4
kholostova_o@mail.ru

Получено 10 января 2009 г.

Исследуется устойчивость перманентных вращений вокруг вертикали тяжелого твердого тела с неподвижной точкой (вращений Штауде) в предположении самого общего распределения масс в теле и произвольного расположения точки закрепления. В допустимых областях пятимерного пространства параметров задачи проводится подробный линейный анализ устойчивости. Для каждого набора допустимых значений параметров выписаны необходимые условия устойчивости. В ряде случаев найдены достаточные условия.

Ключевые слова: уравнения Эйлера–Пуассона, перманентные вращения, конус Штауде, устойчивость

O. V. Kholostova

On stability of permanent Staude's rotations in a general case of a mass geometry of a rigid body

Stability of permanent rotations around the vertical of a heavy rigid body with the immovable point (Staude's rotations) is investigated in assumption of a general mass distribution in the body and an arbitrary position of the point of support. In admissible domains of the five-dimensional space of parameters of the problem the detailed linear analysis of stability is carried out. For each set of admissible values of parameters the necessary conditions of stability are received. In a number of cases the sufficient conditions of stability are found.

Keywords: Euler–Poisson's equations, permanent rotations, cone of Staude, stability
Mathematical Subject Classifications: 70E17, 70H05, 70H14

1. Введение

Задача исследования устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой является классической задачей динамики твердого тела, привлекающей пристальное внимание механиков на протяжении более ста лет. Еще в 1882 г. Н. Е. Жуковский [8] изучал необходимые условия устойчивости вращения тела вокруг вертикально расположенной главной оси инерции, содержащей центр масс, в случаях несимметричного тела и волчка Лагранжа. В случае произвольного распределения масс перманентные вращения могут происходить только вокруг вертикальных осей. Эти вращения были открыты в 1894 г. одновременно Б. К. Млодзеевским [20] и О. Штауде [45] и носят имя последнего. О. Штауде показал, что множество осей перманентных вращений в теле лежит на поверхности конуса с вершиной в неподвижной точке (конуса Штауде) и дал описание допустимых осей вращений как в общем, так и в частных случаях распределения масс.

Исследование устойчивости перманентных вращений тела с неподвижной точкой является сложной многопараметрической задачей. Р. Граммель [44, 7] выдвинул идею обратить постановку задачи и искать не направляющие косинусы осей устойчивых перманентных вращений при заданном распределении масс в теле, а наоборот, задавая ось вращения и моменты инерции тела, определить положения центра масс, соответствующие устойчивым вращениям. Этот же автор провел качественный анализ необходимых условий устойчивости и предложил их геометрическую интерпретацию в общем случае распределения масс в теле и в случае расположения центра масс в главной плоскости инерции, а также подробно исследовал случай, когда центр масс тела находится на главной оси инерции. Необходимые условия устойчивости вращений Штауде в этом последнем случае рассматривались также в работах [43, 18].

Следующий этап исследования рассматриваемой задачи связан с разработкой Н. Г. Четаевым метода получения достаточных условий устойчивости при помощи связки известных первых интегралов уравнений движения системы [40]. Этим методом найдены достаточные условия устойчивости «спящего» волчка Лагранжа [39], перманентных вращений волчка Ковалевской [26], а также тела, вращающегося вокруг оси, содержащей центр масс [33]. В работе В. В. Румянцева [27] при помощи метода Четаева получены достаточные условия устойчивости для части допустимых осей перманентных вращений при произвольном распределении масс, а также проанализированы наиболее важные частные случаи геометрии масс тела. В этой же работе изучены некоторые достаточные условия неустойчивости путем рассмотрения характеристического уравнения линеаризованных уравнений возмущенного движения. Полученные достаточные условия устойчивости и неустойчивости проиллюстрированы примерами, в которых распределение масс в теле с неподвижной точкой отвечает известным случаям интегрируемости. В статье [28] найдены необходимые, а в работе [30] — совпадающие с ними достаточные условия устойчивости вращений волчка Ковалевской вокруг осей, не совпадающих с главными. Необходимые и достаточные условия устойчивости перманентных вращений Штауде для случаев расположения центра масс тела на главной оси инерции, в главной плоскости инерции или вблизи главной плоскости инерции тела для неподвижной точки исследовались в работах [24, 25].

Развитие КАМ-теории [4, 21] и теории устойчивости гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при резонансах [19] позволило поставить вопрос о проведении нелинейного анализа устойчивости перманентных вращений Штауде. В нелинейной постановке исследуется устойчивость вращений тела для случая, когда центр масс тела находится на одной из главных осей инерции, а вращения происходят либо вокруг этой оси [13, 14, 32, 41], либо

вокруг осей, лежащих в главных плоскостях инерции, примыкающих к указанной оси [42]. Получен [13, 32, 42] гамильтониан возмущенного движения; в области выполнения необходимых условий устойчивости проведена, для нерезонансного случая, его нормализация в членах до четвертого порядка включительно. Подробно рассмотрен случай динамически симметричного тела, центр масс которого лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции [13, 14, 41, 42].

Исследование перманентных вращений твердого тела с неподвижной точкой проводилось также при помощи техники топологического описания совместных уровней интегралов энергии и момента, предложенной С. Смейлом [34]. Такой подход, позволяющий выявить число перманентных вращений, их бифуркации и в ряде случаев характер устойчивости, использован в работах [10, 35, 17, 6].

Исследование устойчивости вращений Штауде при некоторых постоянно действующих возмущениях проводится в монографии [31]. В работах [46, 29, 36, 2, 11, 12, 15] рассматривается устойчивость перманентных вращений гиростата. В статьях [5, 22, 16, 38, 23] проводится исследование перманентных вращений твердого тела с неподвижной точкой в центральном ньютоновском гравитационном поле, а в работах [1, 3] — в потенциальном поле сил с произвольной аналитической силовой функцией, зависящей от направляющих косинусов некоторого направления в пространстве.

Данная работа посвящена исследованию устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в предположении самого общего распределения масс в теле и произвольного положения точки закрепления. В допустимых областях пятимерного пространства параметров задачи проводится подробный линейный анализ устойчивости. Для каждого набора допустимых значений параметров выписаны необходимые условия устойчивости. В ряде случаев найдены достаточные условия.

До настоящего времени рассматриваемая задача была решена лишь частично (см. работы [27, 24, 25]), прежде всего из-за наличия в ней большого числа параметров. Предлагаемое полное решение потребовало проведения большого объема аналитических и численных расчетов, а также построения и анализа весьма большого числа графических изображений, что стало возможным благодаря появлению современных мощных компьютерных систем аналитических вычислений.

Результаты данной статьи составляют часть полного исследования устойчивости перманентных вращений Штауде, изложенного в монографии [37]; здесь, помимо подробного линейного анализа, в двух важных частных случаях, когда центр масс тела лежит на главной оси инерции или когда тело динамически симметрично, проводится исчерпывающий нелинейный анализ устойчивости.

2. Постановка задачи. Допустимые дуги

Рассмотрим движение твердого тела, закрепленного в точке O , в однородном поле тяжести. Введем неподвижную систему координат $OXYZ$, ось OZ которой направлена вертикально вверх, и связанную с телом систему координат $Oxyz$ с осями, направленными вдоль главных осей инерции тела для точки O . Ориентацию связанной системы координат относительно неподвижной системы зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ , вводимых обычным образом.

Движения тела описываются уравнениями Эйлера–Пуассона

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= mg(z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3), \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= mg(x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1), \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= mg(y_G \gamma_1 - x_G \gamma_2), \\ \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь m — масса тела, A, B, C — его главные моменты инерции для неподвижной точки. Величины $p, q, r; x_G, y_G, z_G$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ представляют собой проекции вектора абсолютной угловой скорости тела, радиус-вектора его центра масс G относительно точки O и единичного вектора оси OZ на оси Ox, Oy, Oz соответственно.

Пусть центр масс занимает в теле произвольное положение (и не лежит на главной оси или в главной плоскости инерции для точки O). Направления осей Ox, Oy и Oz выбираем так, чтобы величины x_G, y_G и z_G были положительными. Считаем также, что все три момента инерции A, B, C различны; для определенности полагаем, что

$$A > B > C. \quad (2.2)$$

Существуют стационарные решения $p = \text{const}, q = \text{const}, r = \text{const}, \gamma_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$) уравнений (1.1), для которых

$$\frac{p}{\gamma_1} = \frac{q}{\gamma_2} = \frac{r}{\gamma_3} = \text{const}. \quad (2.3)$$

Этим решениям отвечают перманентные вращения тела вокруг вертикально расположенных осей, проходящих через его неподвижную точку.

Для последующего исследования удобнее перейти к безразмерным величинам. Геометрию масс тела определяют параметры

$$\alpha = \frac{A}{B}, \quad \beta = \frac{A}{C}, \quad \sigma_1 = \frac{y_G}{x_G}, \quad \sigma_2 = \frac{z_G}{x_G}. \quad (2.4)$$

При сделанных предположениях имеем $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$; параметры α и β должны удовлетворять неравенствам

$$1 < \alpha < \beta < \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad (2.5)$$

следующим из неравенств треугольника для моментов инерции и условия (2.2).

Из уравнений (2.1), учитывая постоянство величин p, q, r , и условия (2.3), получим соотношения

$$\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \gamma_2 \gamma_3 \omega^2 = \sigma_1 \gamma_3 - \sigma_2 \gamma_2, \quad \frac{1 - \beta}{\beta} \gamma_3 \gamma_1 \omega^2 = \sigma_2 \gamma_1 - \gamma_3, \quad \frac{\alpha - 1}{\alpha} \gamma_1 \gamma_2 \omega^2 = \gamma_2 - \sigma_1 \gamma_1. \quad (2.6)$$

Здесь ω — угловая скорость перманентного вращения, обезразмеренная при помощи множителя Ω , где $\Omega = \sqrt{mgx_G/A}$.



Если теперь умножить каждое из трех уравнений (2.6) соответственно на $1, \sigma_1, \sigma_2$ и сложить их почленно, то получим известное уравнение конуса Штауде

$$\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \gamma_2 \gamma_3 + \frac{\sigma_1(1 - \beta)}{\beta} \gamma_3 \gamma_1 - \frac{\sigma_2(1 - \alpha)}{\alpha} \gamma_1 \gamma_2 = 0, \quad (2.7)$$

которому должны удовлетворять направляющие косинусы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ осей перманентных вращений. К числу очевидных образующих конуса относятся три главные оси инерции тела, прямая OG , проходящая через центр масс, а также прямая, содержащая точку $S(x_G/A, y_G/B, z_G/C)$.

При заданном распределении масс в теле величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, задающие ось вращения, должны быть выбраны так, чтобы обеспечить неотрицательность величины ω^2 в уравнениях (2.6). Из двух полуобразующих, составляющих каждую образующую конуса Штауде, вертикально вверх может быть направлена только одна (кроме исключенного случая, когда ось вращения — главная ось инерции, содержащая центр масс). Соответствующие условию $\omega^2 > 0$ полуобразующие конуса Штауде будем называть допустимыми осями перманентных вращений.

Следуя [27], рассмотрим сферу единичного радиуса с началом в неподвижной точке O . Пересечение сферы с конусом Штауде составляют две замкнутые сферические кривые. Каждой допустимой оси перманентного вращения отвечает единственная точка на одной из сферических кривых, и наоборот. Множества точек пересечения допустимых осей перманентных вращений с этими кривыми образуют на последних дуги, которые также будем называть допустимыми. Соответственно, обозначим через x ($-x$), y ($-y$), z ($-z$), q ($-q$), s ($-s$) точки пересечения сферических кривых с полуобразующими Ox ($-Ox$), Oy ($-Oy$), Oz ($-Oz$), OG ($-OG$), OS ($-OS$) конуса Штауде.

При выполнении соотношений (2.5) одна из упомянутых сферических кривых проходит через точки $x, -y, z, s, q$, а вторая — через точки $y, -z, -s, -q, -x$. Условия неотрицательности величины ω^2 , получаемые из уравнений (2.6), задаются системой неравенств

$$\frac{1}{\gamma_1} > \frac{\sigma_1}{\gamma_2}, \quad \frac{\sigma_1}{\gamma_2} > \frac{\sigma_2}{\gamma_3}, \quad \frac{1}{\gamma_1} > \frac{\sigma_2}{\gamma_3}, \quad (2.8)$$

которые и определяют допустимые дуги в рассматриваемом случае.

Анализируя неравенства (2.8) совместно с уравнением (2.7), найдем четыре допустимые дуги $(x, -y)$, (z, q) , $(y, -z)$, $(-q, -x)$. Занумеруем их и укажем на каждой из них знаки величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, а также ограничения на параметры σ_1 и σ_2 :

дуга I $(x, -y)$

$$\gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 < 0, \quad \gamma_3 < 0; \quad 0 < \sigma_1 < \sigma_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3};$$

дуга II (z, q)

$$\gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0, \quad \gamma_3 > 0; \quad \sigma_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3} < \sigma_1 < \frac{\gamma_2}{\gamma_1}; \quad (2.9)$$

дуга III $(y, -z)$

$$\gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0, \quad \gamma_3 < 0; \quad 0 < \sigma_1 < \frac{\gamma_2}{\gamma_1};$$

дуга IV $(-q, -x)$

$$\gamma_1 < 0, \quad \gamma_2 < 0, \quad \gamma_3 < 0; \quad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} < \sigma_1 < \sigma_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}.$$

На рис. 1 изображены описанные сферические кривые; допустимые дуги I–IV на этих кривых выделены штриховкой.

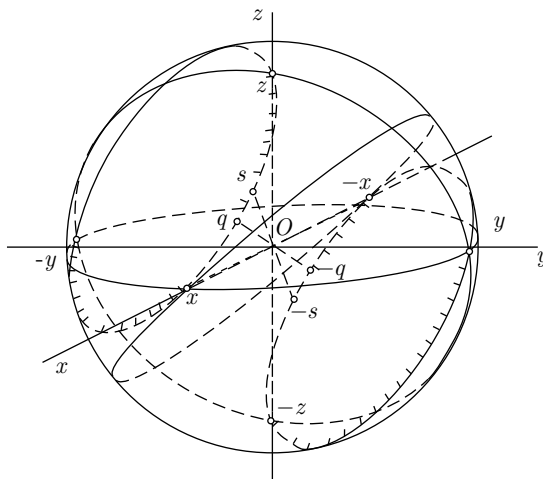


Рис. 1

3. Гамильтониан возмущенного движения

Наряду с уравнениями (2.1) будем рассматривать также канонические дифференциальные уравнения движения тела.

Кинетическая и потенциальная энергии тела вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \Pi = mg(x_G\gamma_1 + y_G\gamma_2 + z_G\gamma_3), \\ p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \\ \gamma_1 &= \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Введем канонически сопряженные с углами ψ, θ, φ импульсы $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$, обезразмеренные при помощи множителя $A\Omega$. За независимую переменную примем безразмерное «время» $\tau = \Omega t$.

Гамильтониан исследуемой системы, записанный в безразмерных параметрах (2.4), имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{\alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{2 \sin^2 \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2 + \frac{(1 - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \theta} \times \\ &\times p_\theta (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) + \frac{1}{2} (\alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) p_\theta^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \beta p_\varphi^2 + \sin \varphi \sin \theta + \sigma_1 \cos \varphi \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь координата ψ циклическая, поэтому $p_\psi = p_{\psi_0} = \text{const}$.



Рассматриваемые перманентные вращения тела соответствуют частным решениям

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 = \text{const}, & \varphi &= \varphi_0 = \text{const}, \\ p_\theta &= p_{\theta_0} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \omega, & p_\varphi &= p_{\varphi_0} = \frac{\omega}{\beta} \cos \theta_0\end{aligned}\quad (3.3)$$

системы с гамильтонианом (3.2), для которых величина p_{ψ_0} вычисляется по формуле

$$p_{\psi_0} = \left[\left(\sin^2 \varphi_0 + \frac{\cos^2 \varphi_0}{\alpha} \right) \sin^2 \theta_0 + \frac{\cos^2 \theta_0}{\beta} \right] \omega. \quad (3.4)$$

При этом для заданных значений параметров $\alpha, \beta, \sigma_1, \sigma_2$ величины $\theta_0, \varphi_0, \omega$, определяющие перманентное вращение, связаны двумя уравнениями

$$\begin{aligned}\left(\frac{\beta - 1}{\beta} \sin^2 \varphi_0 + \frac{\beta - \alpha}{\alpha \beta} \cos^2 \varphi_0 \right) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \omega^2 &= \\ &= (\sin \varphi_0 + \sigma_1 \cos \varphi_0) \cos \theta_0 - \sigma_2 \sin \theta_0, \\ \frac{\alpha - 1}{\alpha} \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \omega^2 &= \cos \varphi_0 - \sigma_1 \sin \varphi_0.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Таким образом, в рассматриваемом общем случае геометрии масс тела задача об устойчивости перманентных вращений Штауде является пятипараметрической. Исключим при помощи соотношений (3.5) угловую скорость ω и параметр σ_1 , а величины $\theta_0, \varphi_0, \alpha, \beta$ и σ_2 считаем независимыми.

Будем изучать устойчивость перманентных вращений по отношению к переменным $\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi$ при фиксированном значении величины p_ψ . Полагая в гамильтониане (3.2)

$$\theta = \theta_0 + x_1, \quad \varphi = \varphi_0 + x_2, \quad p_\theta = p_{\theta_0} + y_1, \quad p_\varphi = p_{\varphi_0} + y_2$$

и учитывая соотношения (3.3) и (3.4), получим гамильтониан возмущенного движения. Рассматриваемому перманентному вращению отвечает положение равновесия $x_j = y_j = 0$ ($j = 1, 2$) соответствующей ему системы.

Квадратичная относительно величин x_j, y_j часть H_2 гамильтониана имеет вид

$$\begin{aligned}H_2 &= \frac{1}{2} a_1 x_1^2 + \frac{1}{2} a_2 x_2^2 + \frac{1}{2} a_3 y_1^2 + \frac{1}{2} a_4 y_2^2 + a_5 x_1 y_2 + a_6 x_2 y_1 + \\ &+ a_7 x_1 x_2 + a_8 x_1 y_1 + a_9 x_2 y_2 + a_{10} y_1 y_2,\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \{ \omega^2 \cos^2 \theta_0 [\alpha - \beta(\alpha \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0)] [\beta(\alpha - 1)^2 \cos^4 \varphi_0 - \\ &- (\alpha - 1)(\alpha \beta - \alpha - \beta) \cos^2 \varphi_0 - (2\beta - 1)\alpha] + \omega^2 \alpha \beta^2 (\alpha \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0) - \\ &- \alpha^2 \beta^2 (\sigma_1 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \sigma_2 \cos \theta_0 + \sin \theta_0 \sin \varphi_0) \},\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$a_2 = \frac{\sin \theta_0}{\alpha^2} [\omega^2 (\alpha - 1) (\alpha^2 \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) \sin \theta_0 - \alpha^2 (\sin \varphi_0 + \sigma_1 \cos \varphi_0)],$$

$$a_3 = \alpha \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0, \quad a_4 = \frac{\beta \sin^2 \theta_0 + (\alpha \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) \cos^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0},$$

$$a_5 = \frac{\omega}{\alpha \beta \sin \theta_0} \{ \cos^2 \theta_0 (\alpha \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) [\beta(\alpha \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0) - \alpha] + \alpha \beta \},$$

$$a_6 = \frac{\omega(\alpha - 1)}{\alpha} (\alpha \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) \sin \theta_0,$$

$$\begin{aligned}
 a_7 &= \frac{\cos \theta_0}{\alpha^2 \beta} \{ \alpha^2 \beta (\cos \varphi_0 - \sigma_1 \sin \varphi_0) + \\
 &\quad + \omega^2 (\alpha^2 - 1) [\beta (\alpha \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0) - \alpha] \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \}, \\
 a_8 &= \frac{\omega (\alpha - 1)}{\alpha \beta} [\beta (\alpha \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0) - \alpha] \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0, \\
 a_9 &= \frac{\omega (\alpha^2 - 1)}{\alpha} \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0, \quad a_{10} = \frac{(\alpha - 1) \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{\sin \theta_0}.
 \end{aligned}$$

Входящие в выражения для коэффициентов a_1, \dots, a_{10} величины ω и σ_1 должны быть исключены при помощи соотношений (3.5).

Если квадратичная форма H_2 определенно-положительная, то, по теореме Ляпунова, исследуемое положение равновесия устойчиво. При этом, на основании дополнения Ляпунова к теореме Рауса [9], перманентное вращение Штауде устойчиво и по отношению к малому возмущению величины p_ψ .

Пусть форма H_2 не является знакоопределенной; тогда составляется характеристическое уравнение соответствующей ей линейной системы, имеющее вид

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0. \quad (3.8)$$

Если выполнены условия

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0, \quad (3.9)$$

то корни $\pm i\Omega_1, \pm i\Omega_2$ ($\Omega_1 > \Omega_2 > 0$) характеристического уравнения чисто мнимые и положение равновесия $x_j = y_j = 0$ ($j = 1, 2$) системы с гамильтонианом (3.6) устойчиво в линейном приближении. Неравенства (3.9) задают необходимые условия устойчивости вращений Штауде.

4. Допустимые области

Задачу об устойчивости вращений Штауде удобнее рассматривать в следующей (обратной) постановке. Будем считать, что параметры θ_0, φ_0 могут принимать произвольные значения из соответствующих четвертей своих координатных плоскостей, определяемых знаками величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в соотношениях (2.9). Это означает, что дугам I–IV соответствуют следующие диапазоны изменения параметров θ_0, φ_0 :

$$\begin{aligned}
 \theta_0 \in (\pi/2; \pi), \quad \varphi_0 \in (\pi/2; \pi) \quad (I); \quad \theta_0 \in (0; \pi/2), \quad \varphi_0 \in (0; \pi/2) \quad (II) \\
 \theta_0 \in (\pi/2; \pi), \quad \varphi_0 \in (0; \pi/2) \quad (III); \quad \theta_0 \in (\pi/2; \pi), \quad \varphi_0 \in (\pi; 3\pi/2) \quad (IV)
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подберем такие значения параметров α, β, σ_2 , характеризующих распределение масс в теле, которые обеспечили бы устойчивость (или неустойчивость) перманентного вращения для выбранных значений θ_0 и φ_0 .

Исследование будем проводить в области (2.5) допустимых значений параметров α и β . Допустимые значения параметра σ_2 определяются из условий (2.9), в которых при помощи уравнения (2.7) (с учетом соотношений (3.1)) исключена величина σ_1 . На дугах I–IV получим

$$\sigma_2 > \sigma_2' \quad (I), \quad 0 < \sigma_2 < \sigma_2'' \quad (II), \quad 0 < \sigma_2 < \sigma_2' \quad (III), \quad \sigma_2 > \sigma_2'' \quad (IV), \quad (4.2)$$

$$\sigma_2' = -\frac{(\beta - \alpha) \cos \theta_0}{\beta(\alpha - 1) \sin \theta_0 \sin \varphi_0}, \quad \sigma_2'' = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0 \sin \varphi_0}. \quad (4.3)$$



Таким образом, исследуемая часть пространства параметров $\theta_0, \varphi_0, \alpha, \beta, \sigma_2$ задается соотношениями (4.1)–(4.3), (2.5). Областям этой части пространства параметров, соответствующим дугам I – IV , также присвоим номера I – IV .

Опишем способ представления результатов, который будет использован ниже. Для каждой из четырех областей I – IV допустимая часть плоскости параметров θ_0, φ_0 разбивается, путем проведения аналитических и численных расчетов, на ряд областей. Для точек (θ_0, φ_0) каждой области, в свою очередь, в допустимой части плоскости параметров α, β выделяются области с различными условиями устойчивости и неустойчивости перманентных вращений. Эти условия записываются в виде неравенств, определяющих диапазон изменения параметра σ_2 (в пределах интервалов из (4.2)) с границами — функциями четырех параметров $\theta_0, \varphi_0, \alpha, \beta$. Для точек (θ_0, φ_0) в пределах одной и той же области плоскости параметров θ_0, φ_0 указанное разбиение плоскости параметров α, β качественно одинаково, при переходе к другим областям — меняется.

5. Достаточные условия устойчивости

Рассмотрим матрицу коэффициентов квадратичной формы H_2 , описанной в соотношениях (3.6), (3.7). Ее главные диагональные миноры определяются выражениями

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{(\alpha \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) \cos^2 \theta_0 + \beta \sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} > 0, \\ \Delta_2 &= \frac{\alpha \cos^2 \theta_0 + \beta \sin^2 \theta_0 (\alpha \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0)}{\sin^2 \theta_0} > 0,\end{aligned}\quad (5.1)$$

$$\Delta_3 = \frac{m_1 \sigma_2 + m_0}{\alpha(\beta - 1) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \varphi_0}, \quad \Delta_4 = \frac{n_2 \sigma_2^2 + n_1 \sigma_2 + n_0}{\alpha(\beta - 1) \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0},$$

$$m_1 = -(\alpha - 1)\beta \sin \theta_0 \sin^3 \varphi_0 [\alpha(\beta \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0) + 3(\alpha - 1)\beta \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0], \quad (5.2)$$

$$m_0 = \cos \theta_0 [-\alpha(\beta - \alpha)(\beta \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0) - \alpha\beta(\alpha - 1) \cos^2 \varphi_0 + 3(\alpha - 1)^2 \beta^2 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0],$$

$$n_2 = (\alpha - 1)\beta \sin^4 \theta_0 \sin^4 \varphi_0 n_{21}, \quad n_1 = \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \varphi_0 n_{11},$$

$$n_0 = (\beta - \alpha) \cos^4 \theta_0 n_{01}, \quad (5.3)$$

$$n_{21} = \alpha(4\beta - 3) - 3(\alpha - 1)\beta \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 - 3(\beta - \alpha) \sin^2 \theta_0,$$

$$\begin{aligned}n_{11} &= \alpha\beta(\alpha - 1) - (\alpha - 1)\beta[\alpha + 3(\alpha - 1)\beta] \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + \\ &+ (\beta - \alpha)[\alpha\beta + 3(\beta - \alpha)] \sin^2 \theta_0 + \\ &+ 3 \sin^4 \theta_0 [\beta^2(\alpha - 1)^2 \sin^4 \varphi_0 - (\beta - \alpha)^2],\end{aligned}$$

$$n_{01} = \alpha - 3(\alpha - 1)\beta \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 - 3(\beta - \alpha) \sin^2 \theta_0.$$

При вычислении величин Δ_i учтены соотношения (3.5).

Из формул (5.1) и критерия Сильвестра следует, что достаточные условия устойчивости перманентных вращений задаются системой двух неравенств

$$\cos \theta_0 \sin \varphi_0 (m_1 \sigma_2 + m_0) > 0, \quad f_1(\sigma_2) = n_2 \sigma_2^2 + n_1 \sigma_2 + n_0 > 0. \quad (5.4)$$

Из выражения для m_1 в (5.2) и условий (4.1) получим, что в областях I, III, IV первое неравенство (5.4) сводится к соотношению

$$\sigma_2 > \hat{\sigma}_2, \quad \hat{\sigma}_2 = -\frac{m_0}{m_1}, \quad (5.5)$$

а в области II — к соотношению

$$\sigma_2 < \hat{\sigma}_2. \quad (5.6)$$

Рассмотрим решение второго неравенства (5.4). Заметим, что старший коэффициент n_2 квадратного трехчлена $f_1(\sigma_2)$ сохраняет постоянный знак. Действительно, равенство $n_{21} = 0$ равносильно соотношению

$$\alpha = \frac{3\beta \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0}{3\beta \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 + 3(\beta - 1) \cos^2 \theta_0 + \beta} < 1,$$

противоречащему условию $\alpha > 1$. А так как при малых значениях $\sin^2 \theta_0$ и $\sin^2 \varphi_0$ и при $\beta > 1$ имеем $n_{21} > 0$, то и для всех допустимых $\theta_0, \varphi_0, \alpha, \beta$ в областях $I-IV$ получим $n_2 > 0$.

Исследуем свободный член n_0 . В области допустимых значений параметров α, β при любых θ_0, φ_0 имеется кривая $n_{01} = 0$. Она пересекает границу $\alpha = 1$ в точке

$$\beta = \frac{3 \sin^2 \theta_0 + 1}{3 \sin^2 \theta_0} > 1$$

и одну из граничных кривых $\beta = \alpha$ или $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$, соответственно, в точках с абсциссами $\alpha = \alpha_1$ или $\alpha = \alpha_2$, где

$$\alpha_1 = \frac{3 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + 1}{3 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0} > 1, \quad \alpha_2 = \frac{3 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 + 3 \sin^2 \theta_0 + 1}{3 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 + 1} > 1. \quad (5.7)$$

Так как в рассматриваемой области $\alpha < 2$, то первую из указанных границ кривая $n_{01} = 0$ может пересечь при выполнении условия $\alpha_1 < 2$, сводящегося к неравенству

$$\sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 > \frac{1}{3}, \quad (5.8)$$

а вторую — при выполнении условия $\alpha_2 < 2$, равносильного тому же неравенству, в котором знак изменен на противоположный.

Вид кривой $n_{01} = 0$ внутри рассматриваемой области параметров α, β (при фиксированных значениях величин θ_0, φ_0) получен при помощи расчета на компьютере. Результат проиллюстрирован ниже рисунком 3, относящимся к области II . Кривая η_1 (рис. 3а), задаваемая уравнением

$$\sin \theta_0 \sin \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (5.9)$$

разделяет плоскость параметров θ_0, φ_0 на области 1 и 2. Для точек (θ_0, φ_0) из областей 1 и 2 кривая $n_{01} = 0$ (обозначенная через ζ_2) показана, соответственно, на рис. 3б и рис. 3в в допустимой части плоскости параметров α, β . В областях κ_1 и κ_2 на этих рисунках имеем, соответственно, $n_{01} > 0$ и $n_{01} < 0$.

Рассмотрим дискриминант $d_1 = n_1^2 - 4n_2n_0$ квадратного трехчлена в (5.4). Расчеты показывают, что в допустимой части плоскости параметров α, β , включая все границы,

дискриминант d_1 строго положителен при всех θ_0, φ_0 . Исключение составляет единственная точка $\alpha = \alpha_1$ (величина α_1 определена в (5.7)) на граничной кривой $\beta = \alpha$, где d_1 обращается в нуль, имея в этой точке двойной корень. Таким образом, квадратный трехчлен $f_1(\sigma_2)$ в (5.4) всегда имеет два вещественных корня. Обозначим их через σ_2^* и σ_2^{**} ($\sigma_2^* < \sigma_2^{**}$).

Найдем положение этих корней относительно граничных значений σ_2' и σ_2'' параметра σ_2 , определенных соотношениями (4.3). В областях I и III вычислим

$$\begin{aligned} f_1(\sigma_2') &= \alpha(\beta - 1)(\beta - \alpha) \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 f_{11}, \\ f_{11} &= 3\beta(\alpha \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0) \sin^2 \theta_0 + 3\alpha \cos^2 \theta_0 - 4\beta. \end{aligned}$$

Расчеты показывают, что в допустимой части плоскости параметров α, β может существовать кривая $f_{11} = 0$. Если эта кривая существует, она пересекает границы $\beta = \alpha$ и $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$ в точках с абсциссами $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_3$ соответственно, где величина α_1 определена в (5.7), а

$$\alpha_3 = \frac{3 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + 4 \cos^2 \theta_0 + 1}{3(\sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \theta_0)} > 1.$$

Условиями существования в рассматриваемой области кривой $f_{11} = 0$ являются неравенства $\alpha_1 < 2$ и $\alpha_3 < 2$. Как первое (что уже было показано выше), так и второе из них эквивалентно соотношению (5.8).

На рис. 2а, относящемся к области I, условию (5.8) удовлетворяют точки (θ_0, φ_0) из области 1 с границей η_1 , определенной в (5.9). Отвечающая точкам этой области кривая $f_{11} = 0$ (рис. 2б), обозначенная через ζ_1 , разбивает плоскость параметров α, β на области κ_1 и κ_2 . В области κ_2 , где $f_{11} < 0$, имеем $\sigma_2^* < \sigma_2' < \sigma_2^{**}$, и решением квадратного неравенства в (5.4), с учетом первого условия (4.2), является интервал

$$\sigma_2 > \sigma_2^{**}. \tag{5.10}$$

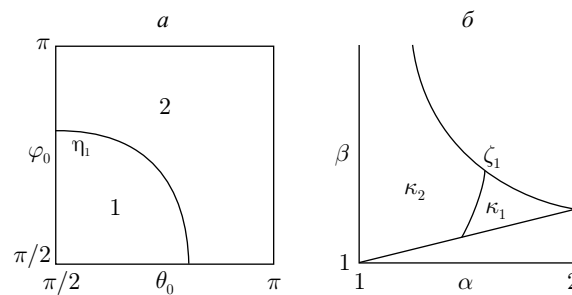


Рис. 2

В области же κ_1 , где $f_{11} > 0$, величина σ_2' лежит вне отрезка $[\sigma_2^*; \sigma_2^{**}]$. При этом, как показывают расчеты, в этой области всегда справедливо соотношение $\sigma_2' > \sigma_2^{**}$. Поэтому рассматриваемое неравенство выполняется при всех допустимых σ_2 , определяемых первым неравенством (4.2).

Для точек (θ_0, φ_0) из области 2 на рис. 2а величина f_{11} сохраняет постоянный знак (отрицательный) при всех допустимых α и β , поэтому выполняется соотношение $\sigma_2^* < \sigma_2' < \sigma_2^{**}$, и второе неравенство (5.4) удовлетворяется при условии (5.10).



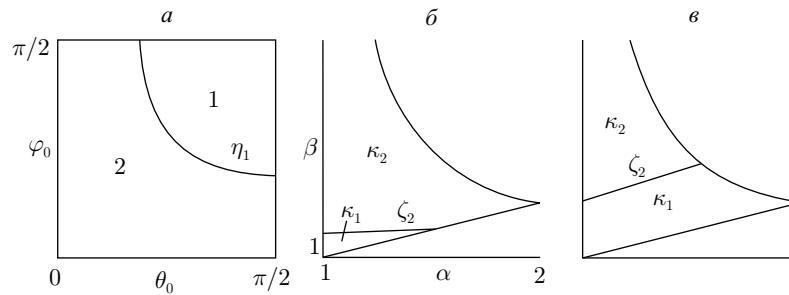


Рис. 3

Рис. 4 соответствует *области III*. Точкам (θ_0, φ_0) из областей 1 и 2 на рис. 4а отвечают рис. 4б и рис. 4в, на которых представлены различные разбиения допустимой части плоскости параметров α и β . Границами областей служат кривые ζ_2 ($n_{01} = 0$), ζ_1 ($f_{11} = 0$) на рис. 4б и кривая ζ_2 на рис. 4в. В областях κ_2 на рис. 4б и рис. 4в имеем $n_0 < 0$, $f_{11} < 0$, поэтому выполняется соотношение $\sigma_2^* < 0 < \sigma_2' < \sigma_2^{**}$, и второе неравенство (5.4) на интервале, определяемом третьим условием (4.2), не удовлетворяется. В областях κ_1 $n_0 > 0$, $n_1 < 0$ и $f_{11} < 0$, поэтому справедлива оценка $0 < \sigma_2^* < \sigma_2' < \sigma_2^{**}$, и решением второго неравенства (5.4) на указанном интервале служит промежуток

$$0 < \sigma_2 < \sigma_2^*. \quad (5.11)$$

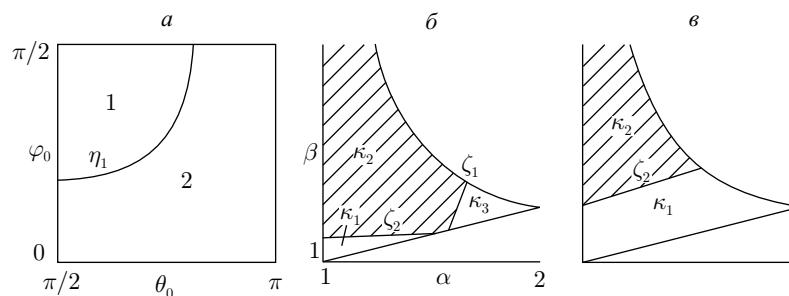


Рис. 4

Наконец, в области κ_3 на рис. 4б имеем $n_0 < 0$, $f_{11} > 0$ и, значит, $\sigma_2^* < 0 < \sigma_2^{**} < \sigma_2'$, поэтому решение рассматриваемого неравенства записывается в виде

$$\sigma_2^{**} < \sigma_2 < \sigma_2'. \quad (5.12)$$

Рассмотрим теперь области *II* и *IV*. Нетрудно проверить, что

$$f_1(\sigma_2'') = \alpha\beta(\alpha - 1)(\beta - 1) \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 \Delta_2 > 0,$$

где величина Δ_2 определена в соотношениях (5.1).

В описанных выше областях κ_1 на рис. 3б и рис. 3в (относящихся к *области II*) имеем $n_0 > 0$ и $n_1 > 0$, поэтому справедлива оценка $\sigma_2^* < \sigma_2^{**} < 0 < \sigma_2''$ и, таким образом, решением второго неравенства (5.4) является весь интервал допустимых значений σ_2 , определяемый вторым условием (4.2). В областях κ_2 на рис. 3б и рис. 3в $n_0 < 0$, следовательно, $\sigma_2^* < 0 < \sigma_2^{**} < \sigma_2''$, и решение второго неравенства (5.4) имеет вид

$$\sigma_2^{**} < \sigma_2 < \sigma_2''. \quad (5.13)$$

Для всех допустимых значений $\theta_0, \varphi_0, \alpha, \beta$ из области IV выполняется условие $\sigma_2'' > \sigma_2^{**}$, поэтому рассматриваемое неравенство удовлетворяется при всех допустимых значениях σ_2 , определяемых четвертым условием (4.2).

Сопоставляя теперь условия (4.2), решение (5.5) или (5.6) первого неравенства (5.4) и найденные решения второго неравенства, получим следующие выводы о рассматриваемых достаточных условиях устойчивости перманентных вращений.

Область I. Расчеты показывают, что для точек областей 1 и κ_1 на рис. 2а и рис. 2б всегда $\hat{\sigma}_2 < \sigma_2'$, поэтому достаточные условия выполняются при всех допустимых значениях σ_2 ($\sigma_2 > \sigma_2'$). Для точек областей 1 и κ_2 , а также для точек области 2 и всех допустимых α и β выполнено соотношение $\hat{\sigma}_2 < \sigma_2^{**}$, поэтому достаточные условия (5.5) и (5.10) эквивалентны одному условию (5.10).

Область II. Для точек (α, β) из областей κ_1 на рис. 3б и рис. 3в и всех соответствующих им значений θ_0, φ_0 имеем $\hat{\sigma}_2 < 0$; для точек же из областей κ_2 и всех θ_0, φ_0 либо $\hat{\sigma}_2 < 0$, либо $\hat{\sigma}_2 > 0$, но при этом $\hat{\sigma}_2 < \sigma_2^{**}$, а значит, условие (5.6) и неравенство (5.13) несовместны. Достаточные условия (5.4) не выполнены.

Область III. В областях κ_2 на рис. 4 достаточные условия не выполняются, так как второе неравенство (5.4) не имеет решений ни при каких θ_0, φ_0 . В области κ_3 имеем $\hat{\sigma}_2 < \sigma_2^{**}$, и условия (5.5) и (5.12) эквивалентны одному неравенству (5.12). В областях κ_1 всегда $\hat{\sigma}_2 > \sigma_2'$, поэтому условия (5.5), (5.11) и третье неравенство (4.2) несовместны.

Область IV. Неравенство (5.5) и четвертое условие (4.2), задающие достаточные условия устойчивости, выполняются при всех допустимых значениях параметров $\theta_0, \varphi_0, \alpha, \beta$ и всех σ_2 ($\sigma_2 > \sigma_2''$), так как в рассматриваемой области всегда $\hat{\sigma}_2 < \sigma_2''$. Таким образом, перманентные вращения Штауде вокруг допустимых осей, проходящих через точки дуги IV , устойчивы. Этот результат получен ранее в статье [27] другим способом, путем построения связки интегралов.

6. Необходимые условия устойчивости

Исследуем теперь необходимые условия устойчивости перманентных вращений для значений параметров, принадлежащих областям $I-III$.

Коэффициенты характеристического уравнения (3.8) линеаризованной системы с гамильтонианом (3.6), (3.7) и его дискриминант, с учетом соотношений (3.5), можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{\ell_1 \sigma_2 + \ell_0}{\alpha^2 \beta (\beta - 1) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \varphi_0}, \quad b = \frac{n_2 \sigma_2^2 + n_1 \sigma_2 + n_0}{\alpha (\beta - 1) \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0}, \\
 d &= \frac{p_2 \sigma_2^2 + p_1 \sigma_2 + p_0}{\alpha^4 \beta^2 (\beta - 1)^2 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0}, \\
 \ell_1 &= \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \ell_{11}, \quad \ell_0 = -\cos \theta_0 \ell_{01}, \\
 \ell_{11} &= \alpha^2 [\alpha (\beta - 1)^2 + \beta (3\beta - 2)] + \\
 &\quad + (\beta - \alpha) [\alpha^2 (\beta - 1)^2 + \beta (\beta - \alpha) - 2\alpha \beta^2] \sin^2 \theta_0 + \\
 &\quad + \beta^2 (\alpha - 1) [\alpha^2 (\beta - 1) - \beta (\alpha - 1) - 2\alpha] \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0, \\
 \ell_{01} &= \alpha^2 [\beta (2\beta - \alpha) - (\beta - \alpha)] - \\
 &\quad - (\beta - \alpha) [\alpha^2 (\beta - 1) - \beta (\beta - \alpha) + 2\alpha \beta^2] \sin^2 \theta_0 + \\
 &\quad + \beta (\alpha - 1) [\alpha^2 (\beta - 1)^2 - (\alpha - 1) \beta^2 - 2\alpha \beta] \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0,
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

величины n_2, n_1 и n_0 определены формулами (5.3), а

$$\begin{aligned} p_2 &= \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 p_{21}, \quad p_1 = -2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \varphi_0 p_{11}, \quad p_0 = \cos^2 \theta_0 p_{01}, \\ p_{21} &= \ell_{11}^2 - 4\alpha^3 \beta^3 (\alpha - 1)(\beta - 1) \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 n_{21}, \\ p_{11} &= \ell_{11} \ell_{01} + 2\alpha^3 \beta^2 (\beta - 1) n_{11}, \\ p_{01} &= \ell_{01}^2 - 4\alpha^3 \beta^2 (\beta - 1)(\beta - \alpha) \cos^2 \theta_0 n_{01}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для рассматриваемого случая необходимые условия устойчивости (3.9) сводятся к системе

$$f_0(\sigma_2) = \ell_1 \sigma_2 + \ell_0 > 0 \quad (< 0), \quad (6.3)$$

$$f_1(\sigma_2) = n_2 \sigma_2^2 + n_1 \sigma_2 + n_0 > 0, \quad (6.4)$$

$$f_2(\sigma_2) = p_2 \sigma_2^2 + p_1 \sigma_2 + p_0 > 0, \quad (6.5)$$

причем знак «>» в неравенстве (6.3) относится к областям *I* и *III*, а знак «<» — к области *II*.

Заметим, что неравенство (6.4) совпадает со вторым неравенством из достаточных условий (5.4), его решение подробно описано в разделе 4.

Из результатов этого раздела следует, что для значений параметров из области *I* достаточные условия (5.4) либо всегда выполняются (для точек (θ_0, φ_0) из области 1 на рис. 2а и точек (α, β) из области κ_1 на рис. 2б), либо эти условия сводятся к решению второго неравенства (5.4) и задаются соотношением (5.10) (для точек (θ_0, φ_0) из области 1 на рис. 2а и точек (α, β) из области κ_2 на рис. 2б, а также для точек (θ_0, φ_0) из области 2 на рис. 2а и всех допустимых (α, β)). При нарушении условия (5.10) в перечисленных областях нарушается второе неравенство (5.4), а значит, и необходимое условие (6.4), и имеем неустойчивость.

Неустойчивыми будут также перманентные вращения для значений параметров α, β из областей κ_2 на рис. 4б,в и соответствующих им значений θ_0, φ_0 (относящихся к области *III*), так как в этих областях второе неравенство (5.4) не выполняется. Для значений же параметров θ_0, φ_0 и α, β из областей 1 и κ_3 на рис. 4а,б достаточные условия устойчивости сводятся к решению второго неравенства (5.4) и определяются соотношением (5.12); при нарушении последнего имеем неустойчивость.

Таким образом, исследование необходимых условий устойчивости следует провести в области *II* и в той части области *III*, в которой параметры α, β принадлежат областям κ_1 на рис. 4б,в, а параметры θ_0, φ_0 и σ_2 принимают любые допустимые в этой области значения. В этих областях достаточные условия (5.4) не выполняются.

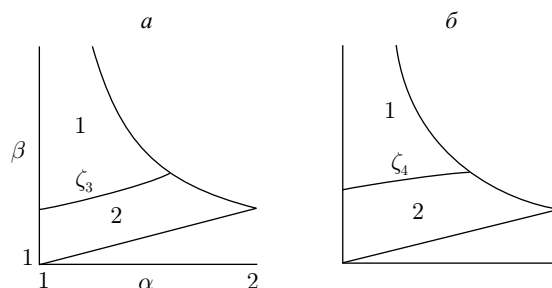


Рис. 5

Решение неравенства (6.3). Расчеты показывают, что для всех допустимых значений $\theta_0, \varphi_0, \alpha, \beta$ величина ℓ_{11} , определенная в (6.1), положительна, а величина ℓ_{01} может принимать значения разных знаков. При всех θ_0, φ_0 в рассматриваемой части плоскости параметров α, β существует кривая $\ell_{01} = 0$, качественный вид которой показан на рис. 5а (кривая ζ_3). В областях 1 и 2 на этом рисунке выполнены соотношения $\ell_{01} < 0$ и $\ell_{01} > 0$ соответственно.

Учитывая соотношения (4.1), найдем, что в области III неравенство (6.3) сводится к условию

$$\sigma_2 > \tilde{\sigma}_2, \quad \tilde{\sigma}_2 = -\frac{\ell_0}{\ell_1},$$

а в области II — к условию $\sigma_2 < \tilde{\sigma}_2$.

Определим положение величины $\tilde{\sigma}_2$ относительно граничных допустимых значений σ_2' и σ_2'' параметра σ_2 . Имеем

$$\begin{aligned} f_0(\sigma_2') &= -\frac{\alpha(\beta-1)\cos\theta_0}{\beta(\alpha-1)}f_{01}, \\ f_0(\sigma_2'') &= \alpha^2\beta(\beta-1)\cos\theta_0[(\alpha+1)+(\beta-\alpha)\sin^2\theta_0+(\alpha-1)\sin^2\theta_0\sin^2\varphi_0], \\ f_{01} &= \alpha[(\beta-\alpha)^2+\alpha\beta(3\beta-2\alpha)] - \\ &\quad -(\beta-\alpha)[\beta^2(\alpha-1)+\alpha(\beta-\alpha)+2\alpha^2\beta]\sin^2\theta_0 + \\ &\quad +\beta^2(\alpha-1)[\alpha\beta(\alpha-1)+(\beta-\alpha)-2\alpha^2]\sin^2\theta_0\sin^2\varphi_0. \end{aligned}$$

Расчеты показывают, что для всех допустимых значений $\theta_0, \varphi_0, \alpha, \beta$ величина f_{01} принимает только положительные значения.

В области II старший коэффициент ℓ_1 функции $f_0(\sigma_2)$ положителен. При этом в области 1 на рис. 5а $\ell_0 > 0$, и неравенство (6.3) при положительных значениях σ_2 не выполняется. В области 2 $\ell_0 < 0$, а $f_0(\sigma_2'') > 0$ и, следовательно, $\sigma_2'' > \tilde{\sigma}_2$. Учитывая второе неравенство (4.2), получаем решение

$$0 < \sigma_2 < \tilde{\sigma}_2. \quad (6.6)$$

В области III имеем $\ell_1 > 0$ и $f_0(\sigma_2') > 0$ и, таким образом, $\sigma_2' > \tilde{\sigma}_2$. В области 1 на рис. 5а $\ell_0 < 0$ (т. е. $\tilde{\sigma}_2 > 0$), поэтому решением неравенства (6.3) с учетом третьего условия (4.2) служит интервал

$$\tilde{\sigma}_2 < \sigma_2 < \sigma_2'.$$

В области 2 на рис. 5а, где $\ell_0 > 0$, $\tilde{\sigma}_2 < 0$, условие (6.3) выполняется для всех допустимых значений σ_2 .

Решение неравенства (6.5). Аналитический и численный расчет показал, что для всех допустимых значений параметров $\theta_0, \varphi_0, \alpha, \beta$ величины p_{21} и p_{01} , определенные в (6.2), а значит, и коэффициенты p_2 и p_0 квадратного трехчлена $f_2(\sigma_2)$ в (6.5), положительны. Дискриминант d_2 этого квадратного трехчлена представляется в виде

$$\begin{aligned} d_2 &= 4\sin^2\theta_0\cos^2\theta_0\sin^2\varphi_0d_{21}, \\ d_{21} &= p_{11}^2 - 4p_{21}p_{01}. \end{aligned}$$

При всех θ_0, φ_0 в допустимой части плоскости параметров α, β имеется кривая $d_{21} = 0$, показанная на рис. 5б (кривая ζ_4). В области 1 на рис. 5б $d_{21} < 0$ (т. е. $d_2 < 0$), и неравенство (6.5) удовлетворяется. В области 2 $d_{21} > 0$ ($d_2 > 0$), и квадратный трехчлен $f_2(\sigma_2)$

имеет два вещественных корня, которые обозначим через $\bar{\sigma}_2$ и $\bar{\bar{\sigma}}_2$ ($\bar{\sigma}_2 < \bar{\bar{\sigma}}_2$). Кроме того, как показывают расчеты, во всей области 2 выполнено соотношение $p_{11} > 0$.

В области II $p_1 < 0$, и корни $\bar{\sigma}_2$ и $\bar{\bar{\sigma}}_2$ положительны. Расчеты показывают, что при этом справедлива оценка $\sigma_2'' > \bar{\sigma}_2$. Поэтому решением неравенства (6.5) для значений α и β из области 2 на рис. 5б является, с учетом второго условия (4.2), объединение двух интервалов

$$0 < \sigma_2 < \bar{\sigma}_2, \quad \bar{\bar{\sigma}}_2 < \sigma_2 < \sigma_2''. \quad (6.7)$$

В области III имеем $p_1 > 0$, поэтому оба корня $\bar{\sigma}_2$ и $\bar{\bar{\sigma}}_2$ отрицательны. Значит, для значений α и β из области 2 на рис. 5б неравенство (6.5) удовлетворяется при всех $\sigma_2 > 0$.

Таким образом, в области III условие (6.5) выполняется для всех допустимых значений параметров $\theta_0, \varphi_0, \alpha, \beta, \sigma_2$; в области II — для всех допустимых $\theta_0, \varphi_0, \sigma_2$ и точек (α, β) из области 1 на рис. 5б, а также для всех θ_0, φ_0 , точек (α, β) из области 2 (рис. 5б) и значений σ_2 из интервалов (6.7).

Решение системы неравенств (6.3)–(6.5). Для определения необходимых условий устойчивости в области II следует рассмотреть совместно решения всех трех неравенств (6.3)–(6.5). Расчеты показывают, что в рассматриваемой части плоскости параметров α, β кривая $\ell_{01} = 0$ (ζ_3 на рис. 5а) при всех θ_0, φ_0 находится выше кривой $n_{01} = 0$ (ζ_2 на рис. 3б, в). В области между кривыми ζ_3 и ζ_2 имеется кривая ζ_5 , на которой выполняется соотношение $\bar{\sigma}_2 = \bar{\bar{\sigma}}_2 = \sigma_2^{**}$. Она задается уравнением $r = 0$, где

$$r = \ell_1^2 n_0 - \ell_1 \ell_0 n_1 + \ell_0^2 n_2,$$

а величины n_i и ℓ_j определены в соотношениях (5.3) и (6.1).

Возможные случаи расположения кривых ζ_2 , ζ_3 и ζ_5 в допустимой части плоскости параметров α, β представлены на рис. 6б, в, г. Указанным рисункам отвечают точки (θ_0, φ_0) , принадлежащие областям 1а, 1б, 2 плоскости параметров θ_0, φ_0 на рис. 6а. Кривая, разделяющая области 1а и 1б на рис. 6а, задается уравнением

$$\sin \theta_0 \sin \varphi_0 = \left(\frac{2\sqrt{6} - 3}{3} \right)^{1/2} = 0.7956 \dots$$

В областях κ_2''' на рис. 6б, в, г имеем неустойчивость, так как нарушается неравенство (6.3). В областях κ_2'' решения (6.6) и (5.13) неравенств (6.3) и (6.4) не пересекаются, так как в этих областях $\bar{\sigma}_2 < \sigma_2^{**}$, и вновь имеем неустойчивость.

В областях κ_2' и κ_1 на рис. 6б, в, г есть интервалы устойчивости. Расчеты показывают, что кривая $d_{21} = 0$ (ζ_4 на рис. 5б) всегда располагается выше кривой $r = 0$ (ζ_5), т. е. находится в области неустойчивости; кривая ζ_4 на рис. 6б, в, г не изображена.

В областях κ_2' должны одновременно выполняться условия (6.6), (5.13) и (6.7). Учитывая, что в этих областях справедлива оценка

$$\sigma_2^* < 0 < \sigma_2^{**} < \bar{\sigma}_2 < \bar{\bar{\sigma}}_2 < \sigma_2'',$$

получим, что всем трем условиям удовлетворяют значения σ_2 из интервала

$$\sigma_2^{**} < \sigma_2 < \bar{\sigma}_2, \quad (6.8)$$

который и определяет необходимые условия устойчивости в данных областях.

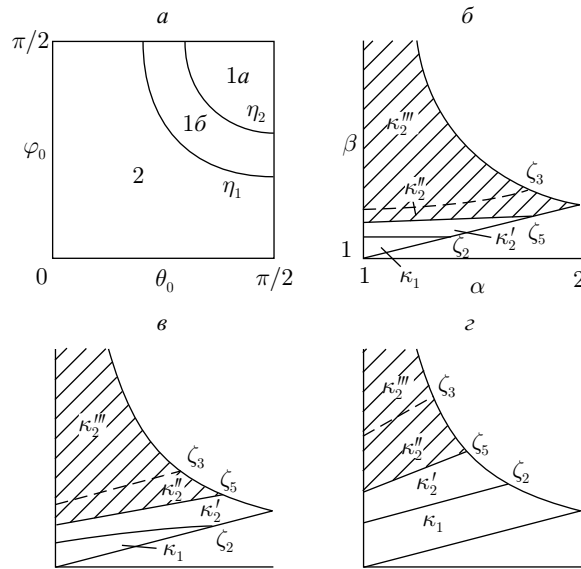


Рис. 6

В областях κ_1 должны удовлетворяться соотношения (6.6), (6.7) и второе условие (4.2). Так как в этих областях

$$\sigma_2^* < \sigma_2^{**} < 0 < \bar{\sigma}_2 < \tilde{\sigma}_2 < \bar{\bar{\sigma}}_2 < \sigma_2'',$$

то необходимые условия устойчивости можно записать в виде неравенства

$$0 < \sigma_2 < \bar{\sigma}_2. \tag{6.9}$$

Для значений σ_2 вне интервалов (6.8) и (6.9) в соответствующих областях имеем неустойчивость.

Ранее в работе [27] получена неустойчивость перманентных вращений Штауде на дуге II в окрестности ее граничной точки q , что соответствует значениям параметра σ_2 вблизи правой границы σ_2'' его допустимых значений. Оказывается, в большей части области допустимых значений параметров, отвечающих дуге II , имеет место неустойчивость. Исключения составляют достаточно небольшие интервалы изменения параметра σ_2 , отвечающие областям κ_1 и κ_2' , для которых перманентные вращения устойчивы в линейном приближении.

В области III условие (6.5) всегда выполняется. При рассмотрении неравенства (6.3) заметим, что в исследуемой части плоскости параметров α, β кривая ζ_3 ($\ell_{01} = 0$) так же, как и для области II , располагается выше кривой ζ_2 ($n_{01} = 0$). Поэтому в областях κ_1 (рис. 4б,в) и соответствующих областях плоскости θ_0, φ_0 на рис. 4а неравенство (6.3) выполнено при всех допустимых значениях σ_2 . Решение оставшегося неравенства (6.4) в этих областях задается соотношением (5.11), которое и определяет необходимые условия устойчивости; при его нарушении имеем неустойчивость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00363) и гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-2975.2008.1).



Список литературы

- [1] Анчев А. О перманентных вращениях твердого тела с одной неподвижной точкой и их устойчивости // Прикл. матем. и механ., 1965, т. 29, вып. 2, с. 380–386.
- [2] Анчев А. О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку // Прикл. матем. и механ., 1967, т. 31, вып. 1, с. 49–58.
- [3] Апыхтин Н. Г. Перманентные вращения и возмущенные движения твердого тела. М: РУДН, 2004. 174 с.
- [4] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.
- [5] Белецкий В. В. Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновском поле сил // Прикл. матем. и механ., 1957, т. 21, вып. 6, с. 749–758.
- [6] Гашененко И. Н. Интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // НАН Украины, Механ. твердого тела, 2003, вып. 33, с. 20–32.
- [7] Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения: В 2х тт. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.
- [8] Жуковский Н. Е. О прочности движения // Собр. соч. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. Т. 1, с. 67–160.
- [9] Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1983. 132 с.
- [10] Каток С. Б. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // Усп. матем. наук, 1972, т. 27, № 2, с. 126–132.
- [11] Ковалев А. М., Киселев А. М. О конусе осей равномерного вращения гиростата // НАН Украины, Механ. твердого тела, 1972, вып. 4, с. 36–45.
- [12] Ковалев А. М., Киселев А. М. Выделение областей устойчивости на конусе осей равномерного вращения гиростата // НАН Украины, Механ. твердого тела, 1972, вып. 4, с. 46–48.
- [13] Ковалев А. М., Савченко А. Я. Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // Прикл. матем. и механ., 1975, т. 39, вып. 4, с. 650–660.
- [14] Ковалев А. М., Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений гамильтоновых систем при наличии резонанса четвертого порядка // НАН Украины, Механ. твердого тела, 1977, вып. 9, с. 40–44.
- [15] Ковалев А. М., Чудненко А. Н. Исследование достаточных и необходимых условий устойчивости равномерных вращений гиростата вокруг главной оси // НАН Украины, Механ. твердого тела, 1982, вып. 14, с. 93–99.
- [16] Кузьмин П. А. Стационарные движения и их устойчивость в центральном поле тяготения // Тр. межвузов. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналит. механ. Казань, 1964, с. 93–98.
- [17] Кузьмина Р. П. О бифуркационном множестве в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела, 1982, № 1, с. 3–10.
- [18] Магнус К. Гироскоп: Теория и применения. М.: Мир, 1974. 526 с.
- [19] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [20] Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Труды отделения физич. наук Общества любителей естествознания, 1894, т. 7, вып. 1, с. 46–48.
- [21] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 168 с.
- [22] Пожарицкий Г. К. Об устойчивости перманентных вращений твердого тела с закрепленной точкой, находящегося в центральном поле сил // Прикл. матем. и механ., 1959, т. 23, вып. 4, с. 792–793.
- [23] Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Прикл. матем. и механ., 1974, т. 38, вып. 4, с. 616–627.

- [24] Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1975. С. 121–200.
- [25] Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела в случае, когда его центр масс вблизи главной плоскости инерции // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1982. С. 3–55.
- [26] Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской // Прикл. матем. и механ., 1954, т. 18, вып. 4, с. 457–458.
- [27] Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // Прикл. матем. и механ., 1956, т. 20, вып. 1, с. 51–66.
- [28] Румянцев В. В. К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки // Прикл. матем. и механ., 1957, т. 21, вып. 3, с. 339–352.
- [29] Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопов // Прикл. матем. и механ., 1961, т. 25, вып. 1, с. 9–16.
- [30] Савченко А. Я. Устойчивость равномерных вращений гироскопа С. В. Ковалевской // НАН Украины, Механ. твердого тела, 1972, вып. 4, с. 48–51.
- [31] Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев: Наукова думка, 1977. 160 с.
- [32] Сергеев В. С. Об устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Прикл. матем. и механ., 1976, т. 40, вып. 3, с. 408–416.
- [33] Скимель В. Н. К задачам устойчивости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Прикл. матем. и механ., 1956, т. 20, вып. 1, с. 130–132.
- [34] Смейл С. Топология и механика // Усп. матем. наук, 1972, т. 27, № 2, с. 77–133.
- [35] Татаринев Я. В. Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ., 1974, № 6, с. 99–105.
- [36] Харламов П. В. О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. матем. и механ., 1965, т. 29, вып. 2, с. 373–375.
- [37] Холостова О. В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерных исследований, 2008. 128 с.
- [38] Цодокова Н. С. О перманентных осях вращения гироскопа с закрепленной точкой // Прикл. матем. и механ., 1965, т. 29, вып. 6, с. 1104–1107.
- [39] Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа // Прикл. матем. и механ., 1954, т. 18, вып. 1, с. 123–124.
- [40] Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 176 с.
- [41] Чудненко А. Н. К устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при наличии двойного нулевого корня // НАН Украины, Механ. твердого тела, 1978, вып. 10, с. 54–60.
- [42] Чудненко А. Н. Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг осей, не совпадающих с главными // НАН Украины, Механ. твердого тела, 1979, вып. 11, с. 78–87.
- [43] Bottema O. De stabiliteit van de tolbewegingen van Staude // Proc. Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, ser. A, vol. 48, pp. 316–325.
- [44] Grammel R. Die Stabilität der Staudeschen Kreiselbewegungen // Math. Z., 1920, vol. 6, pp. 124–142.
- [45] Staude O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. Reine Angew. Math., 1894, vol. 113, no. 4, pp. 318–334.
- [46] Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta Math., 1899, vol. 22, pp. 201–358.