

Нехаотическое взаимодействие резонансов в системе с двумя степенями свободы

А. И. Малышев

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603095, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
malyshev@phys.unn.ru

Получено 10 апреля 2009 г.

В работе рассмотрена динамика материальной точки, движущейся в однородном поле тяжести и соударяющейся с горизонтальной поверхностью, имеющей синусоидальный профиль. Проанализирована структура фазового пространства системы, рассмотрен процесс рождения и взаимодействия пары резонансов связи. Показано, что сценарий перекрытия рассмотренной пары резонансов связи принципиально не согласуется с критерием Чирикова.

Ключевые слова: фазовое пространство, нелинейный резонанс, перекрытие резонансов, стохастичность

A. I. Malyshev

Non-chaotic interaction of resonances in a system with two degrees of freedom

The dynamics of particles moving in a uniform gravitational field and colliding with the horizontal sinusoidal surface is studied. The structure of phase space of the system is analyzed. The process of birth and interaction of a pair of coupling resonance is studied. It is shown that the overlap scenario in a resonance pair under consideration does not agree in principle with the Chirikov criterion.

Keywords: phase space, nonlinear resonance, resonance overlap, stochasticity

Mathematical Subject Classifications: 70K05, 70K30, 70K55

1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению динамики материальной точки в однородном гравитационном поле при условии, что область ее движения ограничена снизу горизонтально расположенной поверхностью, имеющей синусоидальный профиль. Вообще, подобные динамические системы хорошо известны в нелинейной физике. В этой связи необходимо, пожалуй, упомянуть задачу о трехмерных колебаниях материальной точки между двумя плоскостями, одна из которых гофрирована в двух направлениях [1]; в этой модельной системе изучалась диффузия Арнольда [2]. Аналогичная двумерная система (канал, одна из границ которого гофрирована), будучи помещена в переменное электрическое поле, также послужила изучению диффузии Арнольда, причем не только в классической, но и в квантовомеханической постановке задачи [3].

Изучаемая динамическая система имеет также очевидное сходство с моделью Улама и гравитационной машиной Заславского (см., например, [4]), однако в последних случаях акцент делался на достижение режима стохастического ускорения, в связи с чем и исследования проводились в полностью хаотическом режиме. Целью же настоящей работы является изучение структуры фазового пространства в разных режимах, а также особенностей взаимодействия в нем различных резонансов.

2. Описание модели. Вывод отображений

Рассмотрим последовательные соударения материальной точки, движущейся в однородном поле тяжести, о нижнюю границу, имеющую синусоидальный профиль и определяемую уравнением $y(x) = -a \cos kx$ (см. рис. 1). Поскольку в промежутках между абсолютно упругими соударениями с гофрированной поверхностью материальная точка движется по параболическим траекториям, не представляет особого труда, зная координату точки одного (n -го) соударения и угол, под которым оно произошло, рассчитать соответствующие параметры следующего ($(n+1)$ -го). Так, например, из геометрических соображений нетрудно установить, что

$$\alpha_{n+1} = \beta_n - 2 \operatorname{arctg}(ka \sin kx_n). \quad (1)$$

Далее положим, что за мгновение до соударения материальная точка имела скорость v_n^* ; таким образом, $v_{n,x} = v_n^* \sin \beta_n$ и $v_{n,y} = -v_n^* \cos \beta_n$. После абсолютно упругого соударения модуль скорости останется тем же, поэтому ее проекции будут, соответственно,

$$\begin{cases} v_{n+1,x} = v_n^* \sin \alpha_{n+1}, \\ v_{n+1,y} = v_n^* \cos \alpha_{n+1}. \end{cases} \quad (2)$$

Траектория движения материальной точки между двумя соударениями является параболой вида

$$y_{tr}(x) = y(x_n) + \operatorname{ctg} \alpha_{n+1} \cdot (x - x_n) - \frac{g(x - x_n)^2}{2v_{n+1,x}^2}, \quad (3)$$

поэтому для нахождения координаты x_{n+1} следующего соударения необходимо решить уравнение

$$-a \cos kx_{n+1} = -a \cos kx_n + \operatorname{ctg} \alpha_{n+1} \cdot (x_{n+1} - x_n) - \frac{g(x_{n+1} - x_n)^2}{2v_{n+1,x}^2}. \quad (4)$$



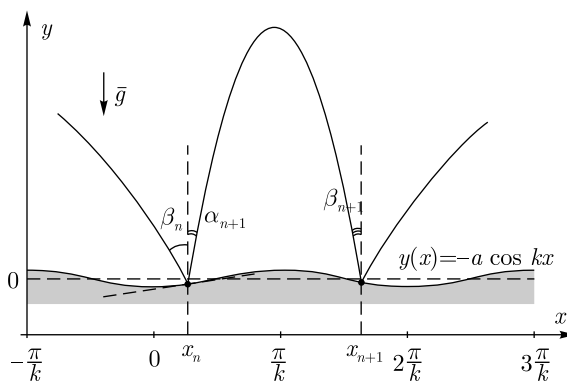


Рис. 1. Два последовательных соударения материальной точки о гофрированную границу

Решая его как квадратное, приведем это уравнение к виду, удобному для применения к его дальнейшему численному решению метода простых итераций:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{v_{n+1,x}}{g} \left(v_{n+1,y} + \sqrt{v_{n+1,y}^2 - 2ga(\cos kx_n - \cos kx_{n+1})} \right). \tag{5}$$

Заметим, что математически уравнение (4) может иметь и более одного решения, что связано с тем, что парабола (3) может пересекать синусоиду нижней границы в нескольких точках. При этом физическим смыслом обладает, конечно, лишь один из корней — либо наибольший, либо наименьший (в зависимости от направления движения вдоль оси x). Важно понимать, что такая ситуация встречается для пологих траекторий и относительно больших амплитуд гофрировки. При этом поведение системы является, как правило, сильно хаотическим, отчего в рамках данной работы эта область параметров не будет нами затронута.

Для завершения построения отображений, связывающих состояния системы в моменты последовательных соударений, необходимо рассчитать угол β_{n+1} и модуль скорости материальной точки v_{n+1}^* в момент $(n + 1)$ -го соударения. Приравнявая полную механическую энергию через мгновение после n -го и за мгновение до $(n + 1)$ -го соударения

$$\frac{v_{n+1}^2}{2} - ga \cos kx_n = \frac{v_{n+1}^{*2}}{2} - ga \cos kx_{n+1}, \tag{6}$$

для модуля скорости получаем

$$v_{n+1}^* = \sqrt{v_{n+1}^2 + 2ga(\cos kx_{n+1} - \cos kx_n)}. \tag{7}$$

С учетом неизменности горизонтальной составляющей скорости ($v_{n+1,x} = v_{n+1,x}^*$) последнее соотношение позволяет рассчитать и искомый угол падения на гофрированную границу:

$$\beta_{n+1} = \arctg \frac{v_{n+1,x}}{\sqrt{v_{n+1,y}^2 + 2ga(\cos kx_{n+1} - \cos kx_n)}}. \tag{8}$$

Таким образом, если для начального соударения заданы значения x_0 и β_0 , последовательное применение формул (1), (2), (5), (7) и (8) позволяет рассчитать соответствующие параметры для всех дальнейших соударений.

Полная энергия E материальной точки, как уже указывалось, является интегралом движения, причем в соответствие ее значению удобно поставить параметр длины — эквивалентную высоту h , отсчитываемую от нулевого уровня, с которой материальная точка



должна быть сброшена без начальной скорости, чтобы при соударении с гофрированной границей иметь ту же энергию, т. е. $E = mgh$. Причем, если начальное значение угла падения β_0 равно нулю, то h — это и есть та самая высота, с которой материальная точка была сброшена. Заметим, что в последней формуле m — масса материальной точки, от величины которой, как и в любой другой кинематической задаче, параметры траектории не зависят (см. формулы отображения).

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования динамики системы, проведенные на основе представленных выше соотношений. Каждому из нескольких десятков начальных условий соответствуют от трех до пяти тысяч шагов отображения, величина ускорения свободного падения g взята равной 9.8. Важно то, что на рис. 2 представлены лишь половины фазовых портретов — верхние полуплоскости с $\beta > 0$, что отвечает движению материальной точки в положительном направлении оси x . Структура нижней полуплоскости аналогична и отличается лишь инверсией относительно начала координат.

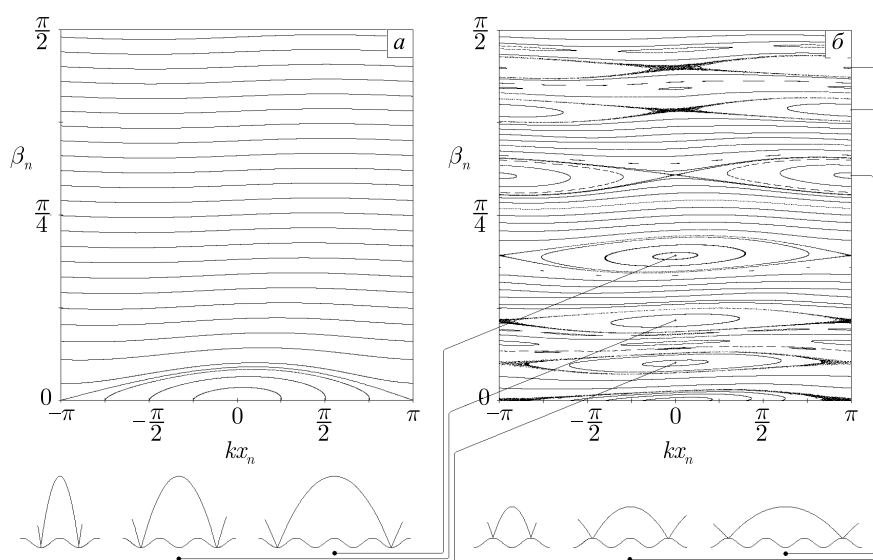


Рис. 2. Фрагменты фазового портрета системы (верхние полуплоскости) при $k = 1$, $a = 0.01$, а также $h = 1$ (а) и $h = 10$ (б). Каждому начальному условию отвечают от 3 до 5 тысяч шагов отображения. Схематично показаны также примеры траекторий, отвечающих центрам резонансов на рисунке (б)

В фазовой плоскости, представленной на рис. 2а, можно выделить резонанс, центр которого располагается в начале координат. Траектории, отвечающие начальным условиям вблизи этого центра, отвечают отскокам материальной точки, происходящим в рамках одного периода гофрировки вблизи одного из минимумов. При увеличении энергии (в данном случае параметра h) структура фазовой плоскости становится заметно сложнее (см. рис. 2б): ясно видны шесть появившихся здесь резонансов первого порядка, а также несколько резонансов более высоких порядков. На выносках здесь также схематично показаны и примеры траекторий, отвечающих центрам этих шести новых резонансов.

3. Резонансы связи: рождение и взаимодействие

Итак, визуальный анализ структуры фазовой плоскости на рис. 2б указывает на наличие в системе ряда резонансов, связанных с кратностью числа отскоков от нижней грани-

цы числу пройденных при этом периодов гофрировки, т. е. фактически со взаимодействием двух степеней свободы. В силу такой природы этих резонансов далее будем называть их также *резонансами связи*.

Сам факт проявления в подобной механической системе резонансов связи вполне очевиден: такие же резонансы имеют место и в задаче о колебаниях материальной точки между двумя плоскостями, одна из которых гофрирована [1], а также в задаче о движении материальной точки в плоском канале, одна из стенок которого имеет синусоидальную форму [3]. Интересным здесь представляется тот факт, что центры трех из шести резонансов, расположенных выше границы $\beta = \pi/4$, лежат в точке $x = \pi/k$. Это значит, что соответствующие таким начальным условиям траектории отвечают устойчивым (!) скачкам материальной точки «по горбам» гофрированного профиля, что кажется невозможным ввиду неустойчивости самих точек, в которых происходит соударение.

Итак, рассмотрим подробно периодические (резонансные) траектории, начинающиеся при $x_0 = 0$ и $x_0 = \pi/k$ и заканчивающиеся в точках $x = 2\pi M/k$ и $x = \pi/k + 2\pi M/k$, соответственно, и отвечающие, таким образом, скачкам материальной точки на M периодов гофрировки. Ограничимся далее рассмотрением лишь положительных значений M , что отвечает движению в положительном направлении оси x . Формулы отображения дают очевидное равенство $\alpha_n = \beta_n \equiv \beta_0$, а также

$$x_n = x_0 + \frac{2v_{n,x}v_{n,y}}{g} = x_0 + \frac{(v_0^*)^2 \sin 2\beta_0}{g}. \tag{9}$$

Значение же скорости v_0^* определяется из закона сохранения энергии

$$gh = \frac{(v_0^*)^2}{2} - ga \cos kx_0, \tag{10}$$

откуда $v_0^* = \sqrt{2g(h + a \cos kx_0)}$, или же, для краткости, $v_0^* = \sqrt{2gh'}$, где $h' = h + a \cos kx_0$.

Как уже отмечалось, для рассматриваемых траекторий $x_n = x_0 + 2\pi M/k$, откуда с учетом (9) и выражения для v_0^* получаем условие, определяющее положение центра резонанса в фазовой плоскости:

$$\sin 2\beta_0 = \frac{\pi M}{kh'}. \tag{11}$$

Поскольку $0 \leq \beta_0 < \pi/2$, последнее уравнение имеет два решения:

$$\beta_0^-(M) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\pi M}{kh'} \quad \text{и} \quad \beta_0^+(M) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\pi M}{kh'}. \tag{12}$$

Обе эти величины располагаются симметрично относительно значения $\beta = \pi/4$, причем $\beta_0^-(M) < \pi/4$, а $\beta_0^+(M) > \pi/4$. Условием существования решений является выполнение неравенства

$$h' > \frac{\pi M}{k}. \tag{13}$$

Таким образом, при $\pi/k < h' < 2\pi/k$ в фазовой плоскости существуют положения равновесия $(x_0, \beta_0^-(1))$ и $(x_0, \beta_0^+(1))$, при $2\pi/k < h' < 3\pi/k$ появляются еще положения равновесия $-(x_0, \beta_0^-(2))$ и $(x_0, \beta_0^+(2))$ и так далее.

Следующий вопрос, на который следует ответить, касается устойчивости указанных положений равновесия. Для этого проведем вблизи них линеаризацию формул отображения: пусть $x_n = x_0 + \tilde{x}_n$, где $\tilde{x}_n \rightarrow 0$, и, аналогично, $\beta_n = \beta_0^\pm(M) + \tilde{\beta}_n$ и $\alpha_n = \beta_0^\pm(M) + \tilde{\alpha}_n$.

В этом случае из формулы (1) имеем

$$\tilde{\alpha}_{n+1} = \tilde{\beta}_n \mp 2k^2 a \tilde{x}_n, \quad (14)$$

где верхний знак отвечает $x_0 = 0$, а нижний — $x_0 = \pi/k$. Оставляя в (5) лишь первый порядок по малым величинам, заметим, что разность косинусов в подкоренном выражении вклада не дает, поэтому будет

$$x_0 + \frac{2\pi M}{k} + \tilde{x}_{n+1} \approx x_0 + \tilde{x}_n + \frac{(v_n^*)^2 \sin 2(\beta_0^\pm + \tilde{\alpha}_{n+1})}{g}, \quad (15)$$

откуда в итоге следует

$$\tilde{x}_{n+1} \approx \tilde{x}_n - \frac{2\pi M}{k} + \frac{(v_n^*)^2}{g} \left(\frac{\pi M}{kh'} + \cos 2\beta_0^\pm \cdot 2\tilde{\alpha}_{n+1} \right). \quad (16)$$

Важно, что из формулы (7) в первом порядке получается $v_{n+1}^* = v_{n+1}$, т. е. $v_{n+1}^* = v_n^* \equiv \sqrt{2gh'}$, а (8) аналогично дает $\tilde{\beta}_{n+1} = \tilde{\alpha}_{n+1}$. С учетом последнего в линейном приближении отображения сводятся к простой системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_{n+1} = \tilde{\beta}_n \mp 2k^2 a \cdot \tilde{x}_n, \\ \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + 4h' \cos 2\beta_0^\pm \cdot \tilde{\beta}_{n+1}, \end{cases} \quad (17)$$

или

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{\beta}_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \mp 8k^2 ah' \cos 2\beta_0^\pm & 4h' \cos 2\beta_0^\pm \\ \mp 2k^2 a & 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

В силу сохранения фазового объема $\det \hat{A} = 1$, а на устойчивость положения равновесия указывает значение шпура этой матрицы [1]:

$$\text{Sp } \hat{A} = 2 \mp 8k^2 ah' \cos 2\beta_0^\pm. \quad (20)$$

Поскольку второе слагаемое здесь следует считать малым по модулю по сравнению с первым, условие устойчивости положения равновесия $|\text{Sp } \hat{A}| < 2$ будет выполняться, если знаки перед вторым слагаемым и в верхнем индексе у β_0 будут одинаковы. Таким образом, на фазовой плоскости устойчивыми оказываются точки $(0, \beta_0^-(M))$ и, возможно, неожиданно, $(\pi/k, \beta_0^+(M))$, а точки $(\pi/k, \beta_0^-(M))$ и $(0, \beta_0^+(M))$ — неустойчивы. Структура фазового портрета, представленного на рис. 2б, прекрасно согласуется с этим фактом.

Для аналитической оценки ширины рассматриваемых резонансов связи необходимо от линеаризованного отображения (18) перейти к дифференциальным уравнениям и восстановить приближенный «интеграл движения» — гамильтониан. Так, пренебрегая на главной диагонали матрицы \hat{A} слагаемым $\mp 8k^2 ah' \cos 2\beta_0^\pm$ по сравнению с единицей, отображения (18) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} = 4h' \cos 2\beta_0^\pm \cdot \beta_n, \\ \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{(n+1) - n} = \mp 2k^2 a \cdot x_n. \end{cases} \quad (21)$$

«Превратив» левые части этих уравнений в производные по непрерывной переменной n , последнюю систему можно понимать как канонические уравнения Гамильтона для системы с гамильтонианом:

$$H = 4h' \cos 2\beta_0^\pm \cdot \frac{\beta^2}{2} \pm 2a \frac{k^2 x^2}{2}. \quad (22)$$

Далее для конкретики рассмотрим резонанс связи с центром в точке $(0, \beta_0^-(M))$, тогда

$$H^- = 4h' \cos 2\beta_0^- \cdot \frac{\beta^2}{2} + 2a \frac{k^2 x^2}{2}. \quad (23)$$

Восстановив (23) до гамильтониана математического маятника

$$H_{eff}^- = 4h' \cos 2\beta_0^- \cdot \frac{\beta^2}{2} - 2a \cos kx, \quad (24)$$

становится возможным получить приближенное уравнение сепаратрисы рассматриваемого резонанса

$$\beta^- = \pm \sqrt{\frac{2a}{h' \cos 2\beta_0^-}} \cos \frac{kx}{2}, \quad (25)$$

а также рассчитать его полуширину

$$\Delta\beta^- = \sqrt{\frac{2a}{h' \cos 2\beta_0^-}} = \frac{\sqrt{2a}}{((h+a)^2 - \pi^2 M^2/k^2)^{1/4}}. \quad (26)$$

Аналогично для резонанса с центром в точке $(\pi/k, \beta_0^+(M))$ можно получить

$$\Delta\beta^+ = \frac{\sqrt{2a}}{((h-a)^2 - \pi^2 M^2/k^2)^{1/4}}. \quad (27)$$

Рассмотрим подробнее процесс «рождения» первой пары резонансов связи (с $M = 1$) при изменении энергии материальной точки, т. е. параметра h (см. условие (13)). На рис. 3 показаны зависимости положения центров этих резонансов по оси β в фазовой плоскости от h , построенные по формулам (12). Поскольку для них $h' = h \pm a$, верхняя и нижняя ветви кривой на рис. 3 сдвинуты по горизонтали друг относительно друга на $2a$. Также здесь длинным пунктиром показаны и ширины резонансов, рассчитанные по формулам (26) и (27).

Как видно из этого рисунка, при изменении параметра h резонансы связи появляются на фазовой плоскости парами при значении $\beta = \pi/4$. Интересно то, что рождаются они сразу перекрытыми друг с другом, а уже при дальнейшем увеличении энергии «раздвигаются» и уменьшают каждый свою ширину. Конечно, оценки ширин резонансов (26) и (27) сразу после их рождения несправедливы, поскольку при получении этих оценок отклонения угла β от резонансных значений β_0^\pm подразумевались малыми. Чтобы понять, насколько сделанные оценки адекватны реальному положению вещей, обратимся к рис. 4, где представлены фрагменты фазового портрета системы при значениях эквивалентной высоты h , отмеченных на рис. 3 вертикальным пунктиром и буквами $(a, б, в)$.

Так, на рис. 4а величина h выбрана таким образом, что $h'(x_0 = 0) = h + a > \pi/k$, а $h'(x_0 = \pi/k) = h - a < \pi/k$, отчего устойчивое положение равновесия $(0, \beta_0^-(1))$ уже

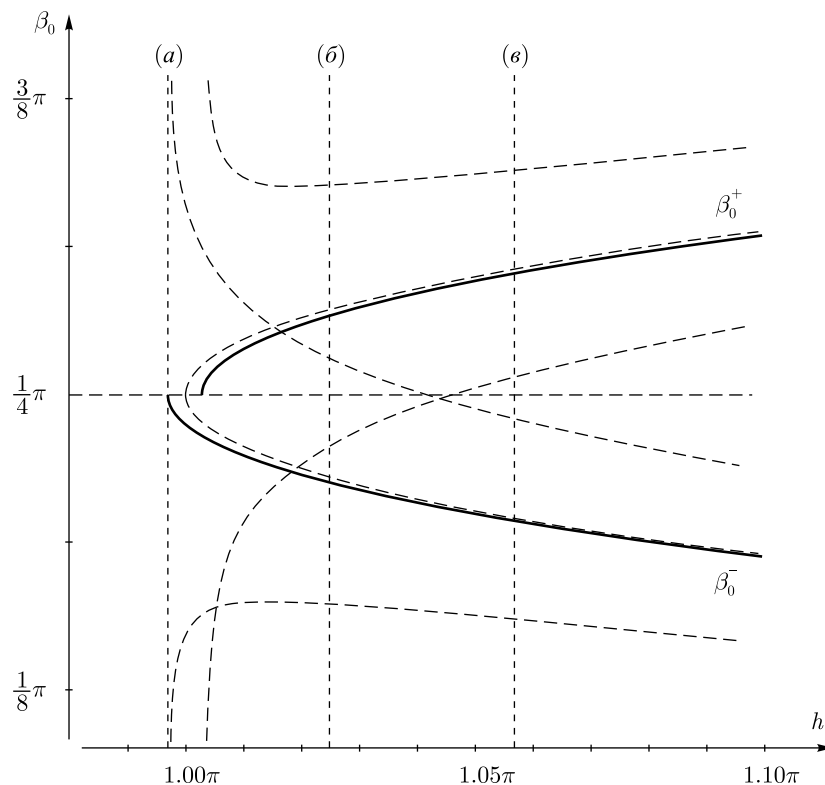


Рис. 3. Фрагмент зависимости $\beta_0^\pm(1)$ от h , отвечающий моменту рождения первой пары резонансов связи ($M = 1$) для $k = 1$ и $a = 0.01$. Пунктирными линиями здесь показаны ширины резонансов, рассчитанные по формулам (26) и (27). Вертикальные пунктирные линии указывают на значения эквивалентной высоты h , взятые при построении фазовых портретов, представленных на рис. 4

существует, а $(\pi/k, \beta_0^+(1))$ — еще нет. Как видно из этого рисунка, положение равновесия появляется на фазовой плоскости в результате укрупнения фазовых траекторий и их дальнейшего «перехлеста» с образованием сепаратрисной петли. Подобная ситуация известна, например, для модели двумерного ротатора с δ -образными толчками в контексте перемежаемости [6], а также в рамках задачи о топологии вязких течений [7]. На рис. 4б уже четко видны два устойчивых положения равновесия, однако сами резонансы еще не сформированы, и сепаратриса каждого из них по-прежнему имеет петлеобразную форму; на рис. 4в оба резонанса уже имеют «классическую» структуру.

Примечательным здесь является тот факт, что сделанные оценки ширины резонансов при значениях эквивалентной высоты (б) и (в) согласуются с реальной структурой фазовой плоскости очень хорошо: на рис. 4б можно сравнивать общую ширину двух резонансов с предсказываемой, а на рис. 4в оказывается возможным сопоставлять с оценками уже ширину каждого из двух резонансов. В обоих случаях согласие более чем удовлетворительное.

Вторым примечательным фактом, касающимся структуры фазовых портретов на рис. 4, является видимое отсутствие на них областей, заполненных хаотическими орбитами. Последнее особенно удивительно, поскольку речь идет о двух резонансах, которые сближены друг с другом на расстояние, меньшее или равное по порядку величины сумме их полуширин. Тогда в согласии с известным критерием Чирикова следовало бы ожидать перекрытия резонансов с образованием общего стохастического слоя, при нахождении внутри которого поведение системы было бы в определенном смысле непредсказуемо.

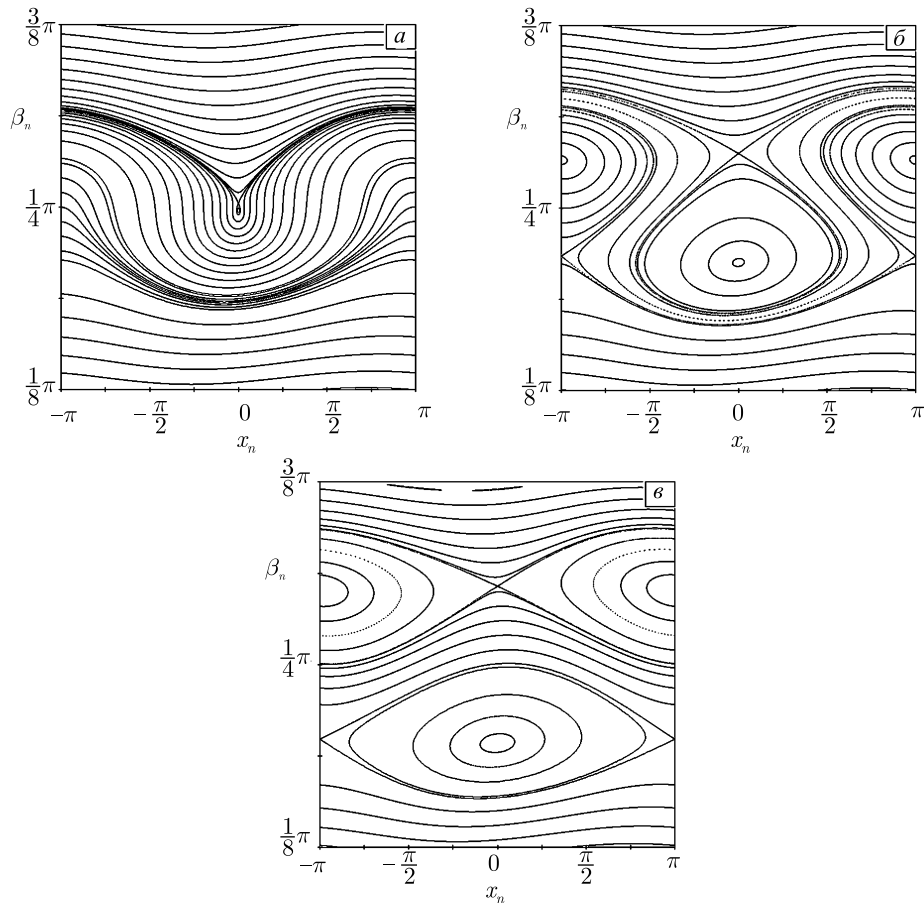


Рис. 4. Фрагменты фазового портрета системы для $k = 1$, $a = 0.01$ и $h = 3.132$ (а), $h = 3.22$ (б), $h = 3.32$ (в). Эти значения эквивалентной высоты отмечены также на рис. 3 вертикальными пунктирными линиями. Каждому начальному условию отвечают 5000 шагов отображения

Как показывают дополнительные расчеты, причиной отсутствия хаоса в данном случае является наличие в области между резонансами (в районе $\beta = \pi/4$) инвариантной кривой, примечательной тем, что ее разрушение является причиной наступления глобального хаоса в рассматриваемой механической системе. В этом режиме перекрытыми оказываются не только пара рассматриваемых резонансов связи, но и все остальные резонансы в фазовой плоскости. А до наступления глобального хаоса, несмотря на сильную близость двух резонансов, стохастизация происходит лишь в структуре каждого из них и не приводит к перекрытию внутри пары. Таким образом, несмотря на то, что изучаемые резонансы связи рождаются парами в одной области фазовой плоскости, эволюционируют они отдельно друг от друга вплоть до установления в системе режима глобального хаоса.

Автор благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований (проект 09-01-00268).

Список литературы

[1] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
 [2] Арнольд В. И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // ДАН СССР, 1964, т. 156, № 1, с. 9–12.



- [3] Демиховский В. Я., Мальшев А. И. Квантовая диффузия Арнольда в канале с гофрированной границей в присутствии переменного электрического поля // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам., 2004, т. 12, вып. 5, с. 3–15.
- [4] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2006. 292 с.
- [5] Chirikov B. V. A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems // Phys. Rep., 1979, vol. 52, no. 5, pp. 264–379.
- [6] Abdulaev S. S. Two-Dimensional Model of a Kicked Oscillator: Motion with Intermittency // Chaos, 1994, vol. 4, no. 3, pp. 569–581.
- [7] Zaks M. A., Pikovsky A. S., and Kurths J. Steady Viscous Flow with Fractal Power Spectrum // Phys. Rev. Lett., 1996, vol. 77, pp. 4338–4341.