УДК 531.38

Новая суперинтегрирумая система на сфере

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев
Институт компьютерных исследований,
Удмуртский государственный университет
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1
borisov@rcd.ru, aka@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Получено 03 августа 2009 г.

В работе показана суперинтегрируемость системы, описывающей движение материальной точки в поле нечетного числа одинаковых гуковских центров, расположенных на экваторе сферы. Гипотеза о суперинтегрируемости этой системы была высказана нами в [3], где также была первоначально указана общая структура суперинтеграла, имеющего сколь угодно высокую нечетную степень по импульсам. Указан изоморфизм этой системы с рассмотренной недавно в [13] задачей о взаимодействии N частиц на прямой, на которую также можно перенести указанный суперинтеграл.

Ключевые слова: суперинтегрируемые системы, системы с потенциалом, гуковский центр

A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev
New superintegrable system on a sphere

We consider the motion of a material point on the surface of a sphere in the field of $2n + 1$ identical Hooke centers (singularities with elastic potential) lying on a great circle. Our main result is that this system is superintegrable. The property of superintegrability for this system has been conjectured by us in [3], where the structure of a superintegral of arbitrarily high odd degree in momemnta was outlined. We also indicate an isomorphism between this system and the one-dimensional N-particle system discussed in the recent paper [13] and show that for the latter system an analogous superintegral can be constructed

Keywords: superintegrable systems, systems with a potential, Hooke center
Mathematical Subject Classifications: 70Hxx, 70H06, 70G65, 37J35, 70F10

1. Введение

В работе рассмотрена задача о дополнительном (супер)интеграле для системы $2n+1$ одинаковых гуковских центров, расположенных в углах правильного n-угольника на экваторе сферы. Гипотеза об этом интеграле, основанная на компьютерных экспериментах, была высказана нами в работе [3]. Эта система возникла при изучении нового конструктивного метода редукции для различных систем взаимодействующих друг с другом частиц с потенциалом типа Якоби, то есть со степенью однородности $\alpha = -2$. Она представляет и самостоятельный интерес, если рассматривать ее в рамках механики частиц в пространстве постоянной кривизны. Результаты классических и современных исследований в данном направлении собраны в сборнике работ [4] (см. также [5, 6, 7, 8]).

Под аналогом гуковского центра на сфере мы подразумеваем сингулярность, потенциал которой имеет вид $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$, где θ — широта (т. е. потенциал является центрально-симметричным). Заметим, что этот потенциал также возникает в различных задачах динамики твердого тела. В статье [9] он возник при понижении порядка различных систем из динамики осесимметричного твердого тела, обладающих дополнительным циклическим интегралом (кстати, в динамике твердого тела этот потенциал ранее систематически изучался Д. Н. Горячевым). Аналог такого потенциала также возникает при рассмотрении интегрируемых систем, связанных с движением материальной точки по поверхности трехосного эллипсоида (система Россохатиуса). Современный анализ этой проблемы содержится в работе [10]. Отметим также, что ранее была отмечена суперинтегрируемость системы трех гуковских центров, помещенных в вершинах ортогонального репера на сфере [11] (частный случай системы Россохатиуса). В этом случае дополнительный суперинтеграл является квадратичным по импульсам, и суперинтегрируемость этой системы может быть обобщена на n-мерную ситуацию. Отметим, что общий формализм поиска таких квадратичных суперинтегралов был недавно развит в работе [14]; он восходит к классическим методам и результатам, связанным с работами Ришело, Якоби, Вейерштрасса (см. также [15]).

В нашей задаче, как и предсказывалось в [3], суперинтеграл имеет произвольную сколь угодно высокую нечетную степень по импульсам, равную $2n+1$ для $2n+1$ одинаковых гуковских центров. Как будет показано в заключении, данный суперинтеграл может быть без труда «поднят» до рассмотренной недавно в [13] системы взаимодействующих частиц на прямой с одним из вариантов потенциала типа Якоби. Хотя, видимо, структура нашего суперинтеграла несколько отличается от приведенной в той работе. Кстати говоря, авторы [13] хотя и указали общий вид суперинтеграла, но не привели явного доказательства его справедливости для произвольного числа частиц. Мы же привели общий метод конструктивного нахождения суперинтегралов в системах, допускающих разделение переменных.

2. Новый интеграл задачи N гуковских центров на сфере

Рассмотрим систему, описывающую движение материальной точки по сфере S^2 в поле $N = 2n+1$ одинаковых гуковских центров, расположенных в углах правильного N-угольника на экваторе сферы. Потенциал гуковского центра имеет вид $\dfrac{1}{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2}$, где вектор $\boldsymbol{r}$ задает положение центра, а $\boldsymbol{\gamma}$ — положение материальной точки. Пусть N гуковских центров располагаются следующим образом:

$$\boldsymbol{r}_m = \Big(\sin\frac{\pi m}{N}, \cos\frac{\pi m}{N}, 0\Big), \quad m = 1, \ldots, N.$$

Тогда в сферической системе координат гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) + \sum_{m=1}^{N} \frac{a}{\sin^2\theta \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi m}{N}\right)}. \tag{2.1}$$

Используя тригонометрическое соотношение

$$\frac{1}{\sin^2 N\varphi} = \frac{1}{N^2}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi m}{N}\right)} \tag{2.2}$$

и обозначив $k = aN^2$, запишем гамильтониан в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2}p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2}p_\varphi^2 + \frac{k}{\sin^2 N\varphi}\right). \tag{2.3}$$

Соответствующие уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \dot\varphi &= \frac{p_\varphi}{\sin^2\theta}, \qquad & \dot p_\varphi &= \frac{2kN\cos N\varphi}{\sin^2\theta\sin^3 N\varphi}, \\ \dot\theta &= p_\theta, & \dot p_\theta &= \frac{2\cos\theta}{\sin^3\theta}\left(\frac{1}{2}p_\varphi^2 + \frac{k}{\sin^2 N\varphi}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Нетрудно заметить, что в системе (2.3) переменные разделяются. Действительно,

$$\frac{1}{2}p_\varphi^2 + \frac{k}{\sin^2 N\varphi} = G, \qquad \frac{1}{2}p_\theta^2 + \frac{G}{\sin^2\theta} = H, \tag{2.5}$$

где G — константа разделения, являющаяся дополнительным интегралом движения. Докажем следующее

Предложение 1. *Все траектории системы* (2.3) *замкнуты.*

Доказательство.

Введем новое время τ с помощью замены $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sin^2\theta}$ и выразим импульсы p_φ, p_θ через производные переменных φ и θ по новому времени:

$$p_\varphi = \varphi', \quad p_\theta = \theta'\cdot\sin^{-2}\theta. \tag{2.6}$$

Подставим выражения (2.6) в уравнения (2.5) и после явного интегрирования получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{G}{G-k}}\cos N\varphi &= \cos(N\sqrt{2G}\tau + C_1), \\ \sqrt{\frac{G}{H-G}}\operatorname{ctg}\theta &= \cos(\sqrt{2G}\tau + C_2). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь C_1 и C_2 — константы интегрирования, задаваемые начальными условиями. Из уравнений (2.7) видно, что переменные θ и φ являются периодическими функциями τ с соизмеримыми частотами $\omega_\varphi = N\omega_\theta$. Таким образом, все траектории системы (2.3) являются замкнутыми. ■

Интегралы H и G параметризуют торы Лиувилля системы (2.3). На самих торах траектории системы параметризуются с помощью еще одного первого интеграла системы. Для того чтобы его найти, запишем уравнения траекторий, лежащих на заданном торе:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2\Big(G-\frac{k}{\sin^2 N\varphi}\Big)}}=\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{2\Big(H-\frac{G}{\sin^2\theta}\Big)}}. \tag{2.8}$$

Проинтегрировав уравнение (2.8), получим новый интеграл движения

$$I=\arccos\Big(\sqrt{\frac{G}{G-k}}\cos N\varphi\Big)-N\arccos\Big(\sqrt{\frac{G}{H-G}}\operatorname{ctg}\theta\Big), \tag{2.9}$$

являющийся многозначной функцией переменных системы (2.3).

Интеграл (2.9) также можно получить, исключив время τ из уравнений (2.7). Для того чтобы исключить многозначность, рассмотрим в качестве интегралов следующие функции:

$$J_1=\alpha\cos I,\quad J_2=\frac{\alpha}{\sqrt{G}}\sin I, \text{где } \alpha^2=2^{2n+2}(H-G)^{2n+1}(G-k). \tag{2.10}$$

После ряда тригонометрических преобразований интегралы J_1 и J_2 примут вид

$$\begin{gathered}
J_1=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m(2G)^{n-m}p_\theta^{2m}\operatorname{ctg}^{2(n-m)}\theta(C_N^{2m}2G\operatorname{ctg}\theta\cos N\varphi+C_N^{2m+1}p_\theta p_\varphi\sin N\varphi),\\
J_2=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m(2G)^{n-m}p_\theta^{2m}\operatorname{ctg}^{2(n-m)}\theta(C_N^{2m}p_\varphi\operatorname{ctg}\theta\sin N\varphi-C_N^{2m+1}p_\theta\cos N\varphi),
\end{gathered} \tag{2.11}$$

где $C_N^k=\dfrac{N!}{k!(N-k)!}$ — биномиальные коэффициенты. Как видно из (2.11), интегралы J_1 и J_2 являются однозначными функциями $(2n+2)$-й и $(2n+1)$-й степени по импульсам соответственно. Кроме того, нетрудно заметить, что они зависимы и связаны соотношением

$$J_1^2+J_2^2G^2=\alpha^2. \tag{2.12}$$

Таким образом, доказана гипотеза о суперинтегрируемости системы на сфере в поле N гуковских центров, расположенных на экваторе, высказанная нами в работе [3]. При этом кроме интеграла произвольной нечетной степени по импульсам мы получили также интеграл произвольной четной степени по импульсам, который всегда имеет степень на 1 больше, однако, зависим с «нечетным» интегралом.

3. Алгебраическая форма суперинтеграла

Приведем другую форму найденного суперинтеграла в переменных Эйлера–Пуассона $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma})$, пользуясь аналогом между движением точки по сфере и движением шарового волчка вокруг неподвижной точки (см., например, [1]).

Гамильтониан системы (2.1) в переменных $\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma}$ имеет вид

$$H=\frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2+\sum_{i=1}^{N}\frac{a}{(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{\gamma})^2}, \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-векторы гуковских центров. Уравнения движения определяются скобкой Пуассона алгебры $e(3)$

$$\{M_i, M_j\} = e_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = e_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \tag{3.2}$$

которая является вырожденной и обладает двумя функциями Казимира

$$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = C, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \tag{3.3}$$

Для рассматриваемых систем на сфере $C = 0$ (т. е. для задач динамики твердого тела все указанные интегралы являются частными). Дополнительный интеграл движения G в переменных $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}$ принимает вид

$$G = \frac{1}{2}M_n^2 + (1 - \gamma_n^2)\sum_{i=1}^{N} \frac{a}{(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{\gamma})^2},$$

где M_n и γ_n — составляющие векторов $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, перпендикулярные плоскости, в которой лежат гуковские центры. Второй из интегралов (2.11) в переменных $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}$ имеет вид

$$\begin{aligned} J_2 = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m(2G\gamma_n^2)^{n-m}(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_n)^{2n}\Big[C_N^{2m+1}(-1)^k(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_n)\prod_{k=1}^{2n+1}(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{e}_n) - \\ - C_N^{2m}M_n\gamma_n\prod_{k=1}^{2n+1}(\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{\gamma})\Big]/(1-\gamma_n^2)^{2n+1}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\boldsymbol{e}_n$ — единичный вектор нормали к плоскости, в которой расположены гуковские центры. В случае, когда все центры располагаются на экваторе, $\gamma_n = \gamma_3$, $M_n = M_3$, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, 1)$.

4. Суперинтегрируемость родственной многочастичной системы [13]

Полученную алгебраическую форму интеграла (3.4) можно обобщить на случай взаимодействующих частиц на прямой. Как было показано в нашей работе [3], натуральная система размерности D с однородным потенциалом степени однородности $\alpha = -2$ редуцируется к системе на сфере на единицу меньшей размерности. Таким образом, существует связь между рассмотренной выше задачей N гуковских центров и задачей о движении материальной точки в $\mathbb{R}^3$ (либо трех тел на прямой) под действием потенциальных сил специального вида. Соответствующая теорема редукции имеет следующий вид.

Теорема 1. *Натуральная система с гамильтонианом вида*

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 + U_{-2}(\boldsymbol{x}), \quad U_{-2}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{a}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}_i)}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3, \tag{4.1}$$

допускает редукцию на одну степень свободы с помощью замены времени и координат

$$dt = |\boldsymbol{x}|dt, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}. \tag{4.2}$$

Уравнения движения в новых переменных описывают движение материальной точки по двумерной сфере $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$

$$\boldsymbol{\gamma}'' = -\frac{\partial U_{-2}(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \Big(\Big(\boldsymbol{\gamma}, \frac{\partial U_{-2}(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\Big) - \boldsymbol{\gamma}'^2\Big)\boldsymbol{\gamma},$$

где штрих обозначает дифференцирование по новому времени.

Доказательство данной теоремы для произвольной размерности и потенциала U_{-2} приведено в [3].

Применив преобразование (4.2) к рассмотренной выше системе N гуковских центров, можно показать, что справедливо следующее предложение.

Предложение 2. *Система* (4.1), *получающаяся при «поднятии» системы* (2.1), *является максимально суперинтегрируемой и кроме гамильтониана обладает четырьмя независимыми первыми интегралами движения:*

$$\begin{aligned}
&1)\ P_n = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}),\\
&2)\ J = 2|\boldsymbol{x}|^2 H - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})^2,\\
&3)\ G = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_n)^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{a(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_n)^2}{(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{x})^2},\\
&4)\ J_2 = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m (2G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)^2)^{n-m} (\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}), \boldsymbol{e}_n)^{2m} \times\\
&\qquad \times \Big[C_N^{2m+1} (-1)^n (\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}), \boldsymbol{e}_n) \prod_{k=1}^{N} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{e}_n) -\\
&\qquad - C_N^{2m} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_n)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n) \prod_{k=1}^{N} (\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{x})\Big] / (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e}_n)^{2N}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Доказательство утверждения проводится с помощью явной проверки сохранения интегралов (4.3) и их независимости. При этом интеграл P_n отражает инвариантность системы (4.1) относительно переносов вдоль оси $\boldsymbol{e}_n$, перпендикулярно плоскости, в которой находятся гуковские центры. Интеграл J — это интеграл Якоби, существующий для любых натуральных систем с потенциалом степени однородности $\alpha = -2$, а интегралы G и J_2 являются обобщениями соответствующих интегралов для задачи N гуковских центров на сфере.

5. Заключение

Найденный в данной работе суперинтеграл является одним из наиболее сложных из известных на сегодняшний день в динамике. Примеры других суперинтегрируемых систем и подробный список литературы приведены, например, в [14, 15]. В последнее время деятельность по нахождению суперинтегралов стала особенно популярна среди физиков.

Как видно из метода нахождения нашего суперинтеграла, вопрос о суперинтегрируемости для случая компактной поверхности тесно связан с вопросом о замкнутости всех траекторий (что и было первоначально замечено в проведенных нами компьютерных экспериментах). Отметим, что в численных экспериментах, на которых была основана наша гипотеза об указанном здесь суперинтеграле, каждая траектория оказалась замкнутой.

Вопрос о замкнутых траекториях на различных компактных поверхностях вращения и при различных потенциалах является классическим и впервые, видимо, был рассмотрен Дарбу [16]. Более новые примеры поверхностей с замкнутыми траекториями имеются в [12]. Еще более сложным является вопрос о суперинтегралах на таких поверхностях. Высказывались различные соображения о том, что на поверхностях типа сферы для интегрируемых потенциальных систем, где потенциал является некоторой аналитической функцией на сфере, степень дополнительного интеграла всегда ограничена (см., например, [2]). Однако в работе [17] был построен пример аналитического геодезического потока на сфере, который имеет сколь угодно высокую степень по импульсам. К сожалению, в этой работе не содержится явного алгебраического примера для такой метрики или потенциала, а для геодезического потока сформулирована лишь краевая задача, которая, как доказывает автор, решаема в классе аналитических функций.

Нужно отметить, что, хотя мы нашли пример системы с интегралом сколь угодно высокой степени, потенциал имеет сингулярности на некоторых кривых на сфере, число которых растет со степенью интеграла. Поэтому здесь естественно возникает следующая гипотеза — указать, пользуясь развитыми в этой работе соображениями, явный пример потенциальной системы на сфере с аналитическими потенциалами, не имеющими сингулярности и допускающими суперинтеграл достаточно большой (> 4) степени по импульсам. В связи с этим отметим систему Гаффэ (см. [3]), который в цикле своих работ рассматривает систему на S^2 с потенциалом шестой степени по импульсам. Однако этот потенциал также имеет особенности, причем не в отдельных точках, а на дугах больших кругов, определенных пересечением сферы с координатными плоскостями.

6. Благодарности

Авторы признательны А. Мациевскому и М. Пржибыльска за полезные обсуждения во время их визита в Ижевск в мае 2009 г. и указание на интересную систему, найденную Х. Йошидой. Благодарим также Андрея Цыганова за присланные статьи. Работа частично поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований (коды проекта 09-01-12151, 09-01-00791), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (код проекта 2009.-1.5-503-004-019). Работа И. С. Мамаева и А. А. Килина выполнена в рамках гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых — докторов наук (код проекта МД-5239.2008.1) и кандидатов наук (код проекта МК-6376.2008.1) соответственно.

Список литературы

[1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: ИКИ, НИЦ «РХД», 2005. 576 с.

[2] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые геодезические потоки на сфере, порожденные системами Горячева–Чаплыгина и Ковалевской в динамике твердого тела // Матем. заметки, 1994, т. 56, № 2, с. 139–142.

[3] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Многочастичные системы: Алгебра интегралов и интегрируемые случаи // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 1, с. 53–82.

[4] Классическая динамика в неевклидовых пространствах / Борисов А. В., Мамаев И. С. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 348 с.

[5] Borisov A. V., Mamaev I. S. Generalized Problem of Two and Four Newtonian Centers // Celestial Mech. Dynam. Astronom., 2005, vol. 92, no. 4, pp. 371–380.

[6] Borisov A. V., Mamaev I. S. The Restricted Two-Body Problem in Constant Curvature Spaces // Celestial Mech. Dynam. Astronom., 2006, vol. 96, no. 1, pp. 1–17.

[7] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Two-Body Problem on a Sphere: Reduction, Stochasticity, Periodic Orbits // Regul. Chaotic Dyn., 2004, vol. 9, no. 3, pp. 265–280.

[8] Borisov A. V., Mamaev I. S. Superintegrable Systems on a Sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2005, vol. 10, no. 3, pp. 257–266.

[9] Борисов А. В., Мамаев И. С. Нелинейные скобки Пуассона и изоморфизмы в динамике // Regul. Chaotic Dyn., 1997, vol. 2, nos. 3–4, pp. 72–89.

[10] Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // ПММ, 1995, т. 59, вып. 1, с. 3–9.

[11] Козлов В. В., Федоров Ю. Н. Интегрируемые системы на сфере с потенциалами упругого взаимодействия // Матем. заметки, 1994, т. 56, вып. 3, с. 74–79.

[12] Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1982, т. 46, № 5, с. 994–1010.

[13] Chanu C., Degiovanni L., Rastelli G. Superintegrable Three-body Systems on the Line // J. Math. Phys., 2008, vol. 49, 112901, 10 pp.

[14] Григорьев Ю. А., Цыганов А. В. Об уравнениях Абеля и интегралах Ришело // Нелинейная динамика, 2009.

[15] Tsiganov A. V. Leonard Euler: Addition Theorems and Superintegrable Systems // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 3, pp. 389–406.

[16] Darboux G. Etude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de revolution // Bull. S.M.F., 1877, vol. 5, pp. 100–113.

[17] Kiyohara K. Two-dimensional Geodesic Flows Having First Integrals of Higher Degree // Math. Ann., 2001, vol. 320, pp. 487–505.