УДК 517.93, 531.011

Об уравнениях Абеля и интегралах Ришело

Ю. А. Григорьев, А. В. Цыганов
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, улица Ульяновская д.1
yury.grigoryev@gmail.com, tsiganov@mph.phys.spbu.ru

Получено 19 октября 2009 г.

Рассматриваются суперинтегрируемые системы типа Ришело с N степенями свободы, для которых $n \leqslant N$ уравнений движения являются уравнениями Абеля на гиперэллиптической кривой рода $n-1$. Соответствующие дополнительные интегралы движения являются полиномами второго порядка по импульсам.

Ключевые слова: суперинтегрируемые системы, разделение переменных, уравнения Абеля

Yu. A. Grigor'ev, A. V. Tsiganov

On the Abel equations and the Richelot integrals

The paper deals with superintegrable N-degree-of-freedom systems of Richelot type, for which $n \leqslant N$ equations of motion are the Abel equations on a hyperelliptic curve of genus $n-1$. The corresponding additional integrals of motion are second-order polynomials in momenta.

Keywords: superintegrable systems, separation of variables, Abel equations
Mathematical Subject Classifications: 37K10, 70H06, 70H20

В старинных малочитаемых сборниках научных учреждений, а также в обширной научной переписке ученых прежних времен заключается громадное количество научного материала, из которого всякий, кто сумеет, может вычитать многое побуждающее к собственной работе, попутно может и научиться многому полезному.

К. Вейерштрасс, «Речь, произнесенная при вступлении в должность ректора Берлинского университета 15 октября 1873 года»

1. Введение

В классической механике суперинтегрируемой системой с N степенями свободы называется система, обладающая более чем N функционально независимыми интегралами движения, определенными однозначно на всем $2N$-мерном фазовом пространстве. В частности, если число интегралов составляет $2N-1$, то система называется максимально суперинтегрируемой. Динамика таких систем особенно интересна тем, что все траектории являются замкнутыми и периодическими [5, 22]. С математической точки зрения, в этом случае фазовое пространство имеет топологически структуру дуальной пары, состоящей из инвариантного слоения Лиувилля–Арнольда лагранжевыми торами и (коизотропного) полярного слоения [25].

В квантовой механике Зоммерфельд и Бор первыми обратили внимание на то, что системы, допускающие разделение переменных более чем в одной системе координат, могут иметь дополнительные интегралы движения. Суперинтегрируемым системам свойственно дополнительное вырождение уровней энергии, от которого можно избавиться, приняв во внимание квантовые числа, соответствующие дополнительным интегралам движения; некоторая часть спектра может быть вычислена алгебраически, а соответствующие волновые функции являются комбинациями классических ортогональных полиномов. Один из лучших примеров такого рода — гармонический осциллятор и задача Кеплера–Кулона. В последние годы было опубликовано большое число работ, посвященных суперинтегрируемости; большинство из них посвящено интегралам движения второго порядка (новые результаты и ссылки на дополнительную литературу могут быть найдены в работах [3, 6, 9, 11, 15, 18, 21, 28, 32, 33]).

Систематическое исследование суперинтегрируемых систем началось с найденного Эйлером в 1761 году алгебраического интеграла для дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathrm{x}_1}{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}} \pm \frac{d\mathrm{x}_2}{\sqrt{f(\mathrm{x}_2)}} = 0,$$

где f — произвольный полином четвертой степени [12]. Классификация соответствующих двумерных суперинтегрируемых систем типа Штеккеля была построена в работе [18].

Теорему Абеля можно считать обобщением результатов Эйлера. Напомним, что уравнения Абеля

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{u_i(\mathrm{x}_j)\, d\mathrm{x}_j}{\sqrt{f(\mathrm{x}_j)}} = 0, \qquad i = 1, \ldots, p, \tag{1.1}$$

играют ключевую роль в классической механике и их применение для построения траекторий движения связывают с именами Якоби и Ришело (см. тринадцатую лекцию в книге

Якоби [13]). В современной математике первый подход, или отображение Абеля–Якоби, является одной из важнейших конструкций алгебраической геометрии, связывающей алгебраическую кривую с ее многообразием Якоби. Второй подход, связанный с работами Ришело, приводит к теории теорем сложения, теории модулей, криптографии и др.

Целью этой работы является обсуждение построения методом Ришело дополнительных интегралов движения для уравнений Абеля и построение соответствующих N-мерных суперинтегрируемых систем классической механики. В данной работе рассматриваются только классические суперинтегрируемые системы, хотя соответствующие результаты можно легко обобщить и на квантовый случай.

Структура данной статьи такова: в разделе 2 приведен краткий обзор результатов Ришело, затем обсуждаются возможные применения этих результатов для классификации суперинтегрируемых систем типа Штеккеля. В разделе 3 построена и исследована классификация суперинтегрируемых систем, допускающих разделение переменных в ортогональной системе координат. В заключении обсуждаются некоторые открытые задачи.

2. Суперинтегрируемые системы типа Ришело

В этом разделе мы используем обозначения Ришело [27].

Пусть y — алгебраическая функция от x, заданная уравнением вида

$$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{y}^m + f_1(\mathrm{x})\mathrm{y}^{m-1} + \cdots + f_m(\mathrm{x}) = 0, \tag{2.1}$$

где $f_1(\mathrm{x}),\ldots,f_m(\mathrm{x})$ — рациональные полиномы от x. Согласно теореме Абеля, система p дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i}{d\mathrm{x}_1}\,d\mathrm{x}_1 + \cdots + \frac{du_i}{d\mathrm{x}_N}d\mathrm{x}_N = 0, \qquad i = 1,\ldots,p$$

имеет дополнительные алгебраические интегралы, если $N > p$ и если $u_1,\ldots,u_p$ являются линейно независимыми абелевыми интегралами первого рода на алгебраической кривой (2.1). При доказательстве теоремы Абеля [2, 8, 16] используют **неявные** определения этих интегралов в виде различных детерминантов матриц ко-вычетов в точках ветвления.

Для некоторых алгебраических кривых (2.1), например гиперэллиптических кривых, существуют также **явные** формулы для интегралов, предложенные Эйлером [12], Лагранжем [24], Якоби [14], Ришело [27], Вейерштрассом [34] и другими [2, 8, 16, 23].

2.1. Интегралы Ришело

Следуя обозначениям Ришело [27], рассмотрим гиперэллиптическую кривую

$$\mathrm{y}^2 = f(\mathrm{x}) \equiv A_{2n}\mathrm{x}^{2n} + A_{2n-1}\mathrm{x}^{2n-1} + \cdots + A_1\mathrm{x} + A_0 \tag{2.2}$$

и систему $n-1$ дифференциальных уравнений Абеля

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathrm{x}_1}{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}} + \frac{d\mathrm{x}_2}{\sqrt{f(\mathrm{x}_2)}} + \cdots + \frac{d\mathrm{x}_n}{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}} = 0,\\
&\frac{\mathrm{x}_1 d\mathrm{x}_1}{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}} + \frac{\mathrm{x}_2 d\mathrm{x}_2}{\sqrt{f(\mathrm{x}_2)}} + \cdots + \frac{\mathrm{x}_n d\mathrm{x}_n}{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\mathrm{x}_1^{n-2} d\mathrm{x}_1}{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}} + \frac{\mathrm{x}_2^{n-2} d\mathrm{x}_2}{\sqrt{f(\mathrm{x}_2)}} + \cdots + \frac{\mathrm{x}_n^{n-2} d\mathrm{x}_n}{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Пусть a_k — значения x в точках ветвления кривой (2.2) и $F(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}-\mathrm{x}_1)(\mathrm{x}-\mathrm{x}_2)\cdots(\mathrm{x}-\mathrm{x}_n)$, тогда в общем случае дополнительные интегралы уравнений Абеля (2.3) имеют вид

$$C_k = \frac{\left[\dfrac{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}{F'(\mathrm{x}_1)}\cdot\dfrac{1}{a_k-\mathrm{x}_1}+\dots+\dfrac{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}{F'(\mathrm{x}_n)}\cdot\dfrac{1}{a_k-\mathrm{x}_n}\right]^2}{\left[\dfrac{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}{F'(\mathrm{x}_1)}+\dots+\dfrac{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}{F'(\mathrm{x}_n)}\right]^2-A_{2n}}\,F(a_k). \tag{2.4}$$

Если $A_{2n}=0$, то дополнительные интегралы уравнений (2.3) равны

$$C_k = \left[\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}{F'(\mathrm{x}_1)}\cdot\frac{1}{a_k-\mathrm{x}_1}+\dots+\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}{F'(\mathrm{x}_n)}\cdot\frac{1}{a_k-\mathrm{x}_n}\right]^2\sqrt{F(a_k)}. \tag{2.5}$$

Подчеркнем, что эти интегралы определены **неявно** (абстрактно), так как мы не можем построить **явно** корни a_k полинома степени $2n$ при $n>1$. Заметим, однако, что в множестве интегралов C_k всего $n-1$ функционально независимых интегралов и, естественно, функции от этих интегралов также являются интегралами движения.

Используя специально выбранные функции интегралов C_k, можно избежать необходимости вычислять значения a_k от x в точках ветвления [14, 27, 34]. Например, Ришело в своей работе нашел два **явных** алгебраических интеграла

$$K_1 = \left[\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}{F'(\mathrm{x}_1)}+\dots+\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}{F'(\mathrm{x}_n)}\right]^2 - A_{2n-1}(\mathrm{x}_1+\dots+\mathrm{x}_n) - A_{2n}(\mathrm{x}_1+\dots+\mathrm{x}_n)^2 \tag{2.6}$$

и

$$K_2 = \left[\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}{\mathrm{x}_1^2F'(\mathrm{x}_1)}+\dots+\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}{\mathrm{x}_n^2F'(\mathrm{x}_n)}\right]^2\mathrm{x}_1^2\mathrm{x}_2^2\cdots\mathrm{x}_n^2 - A_1\left(\frac{1}{\mathrm{x}_1}+\dots+\frac{1}{\mathrm{x}_n}\right) - A_0\left(\frac{1}{\mathrm{x}_1}+\dots+\frac{1}{\mathrm{x}_n}\right)^2. \tag{2.7}$$

В общем случае производящая функция таких **явных** интегралов построена Вейерштрассом в работе [34], см. также детальное обсуждение этой проблемы в книге [2].

2.2. Построение суперинтегрируемых систем типа Ришело

Применим метод Ришело для классификации суперинтегрируемых систем классической механики.

Определение 1. Интегрируемая система с N степенями свободы является суперинтегрируемой системой типа Ришело, если $n-1$, $1<n\leqslant N$, уравнений движения являются уравнениями Абеля–Ришело (2.3).

Такие суперинтегрируемые системы типа Ришело достаточно просто построить в рамках метода разделения переменных Якоби, см. [18, 32, 33].

Рассмотрим сначала максимально суперинтегрируемые системы Ришело, для которых $N=n$, т. е. для которых число степеней свободы на единицу больше рода соответствующей гиперэллиптической кривой. В этом случае выбирается одна гиперэллиптическая кривая (2.2)

$$\mu^2 = f(\lambda), \qquad \text{где} \qquad f(\lambda) = A_{2n}\lambda^{2n} + A_{2n-1}\lambda_i^{2n-1} + \dots + A_1\lambda + A_0, \tag{2.8}$$

и вводится n произвольных подстановок

$$\lambda_j = v_j(q_j), \qquad \mu_j = u_j(q_j)p_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2.9}$$

где p и q — канонические переменные $\{p_j, q_i\} = \delta_{ij}$.

Используя n экземпляров этой гиперэллиптической кривой и n-подстановок, мы получим n разделенных уравнений

$$p_j^2\, u_j^2(q_j) = A_{2n}v_j(q_j)^{2n} + A_{2n-1}v_j(q_j)_i^{2n-1} + \cdots + A_1v_j(q_j) + A_0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2.10}$$

где $2n+1$ коэффициентов $A_{2n}, \ldots, A_0$ — линейные функции от n интегралов движения $H_1, \ldots, H_n$ и $2n+1$ произвольных параметров $\alpha_0, \ldots, \alpha_{2n+1}$.

Разрешая эти разделенные уравнения относительно H_k, мы получим функционально независимые интегралы движения типа Штеккеля

$$H_k = \sum_{j=1}^{n} (S^{-1})_{jk}\Big(p_j^2 + U_j(q_j)\Big), \qquad k = 1, \ldots, n = N, \tag{2.11}$$

где $U_j(q_j)$ — так называемые штеккелевские потенциалы и S — матрица Штеккеля [29].

Если H_1 — функция Гамильтона, то решения уравнений движения $q_j(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ находятся из уравнений Якоби

$$\sum_{j=1}^{n} \int \frac{S_{1j}(q_j)dq_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_{1j}(q_j) - U_j(q_j)}} = \beta_1 - t \tag{2.12}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \int \frac{S_{ij}(q_j)dq_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_{kj}(q_j) - U_j(q_j)}} = \beta_i, \qquad i = 2, \ldots, n, \tag{2.13}$$

где t — переменная времени, соответствующая функции Гамильтона H_1. В дифференциальной форме эти уравнения, согласно Якоби [13], являются уравнениями Абеля (1.1) и нахождение решений уравнений движения сводится к обращению Якоби отображения Абеля.

Для того чтобы использовать рассмотренные выше результаты Ришело для уравнений Абеля, нам придется наложить ограничения на элементы матрицы Штеккеля $S_{kj}(q_j)$, что приведет к условиям на коэффициенты A_k [18, 32].

В частности, если сравнить $n-1$ уравнение (2.3) и уравнения (2.13) при $\lambda = $ x, окажется, что матрица Штеккеля в переменных λ должна иметь одну из следующих форм, отличающихся друг от друга только первой строкой:

$$S^{(k)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \lambda_2^k & \cdots & \lambda_n^k \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad k = n, n+1, \ldots, 2n, \tag{2.14}$$

так что

$$\mu^2 = f(\lambda) = \lambda^k H_1 + \lambda^{n-1}H_{n-1} \cdots + H_{n-1}\lambda + H_n + \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j \lambda^j. \tag{2.15}$$

Поскольку k — произвольное число от n до $2n$, то мы получаем семейство двойственных систем Штеккеля, связанных с одной гиперэллиптической кривой (2.8) и различными блоками соответствующей матрицы Бриль-Нётер [30, 31].

Замечание 1. Для любых двух двойственных систем с функциями Гамильтона H_1 и $\widetilde{H}_1$ соответствующие матрицы Штеккеля $S^{(k)}$ и $S^{(\widetilde{k})}$ отличаются только первой строкой. Эти системы Штеккеля связаны каноническим преобразованием времени $t \to \widetilde{t}$:

$$\widetilde{H}_1 = \mathrm{v}(q)\, H_1, \quad d\widetilde{t} = \mathrm{v}(q)\, dt, \qquad \text{где} \qquad \mathrm{v}(q) = \frac{\det S^{(k)}}{\det S^{(\widetilde{k})}}. \tag{2.16}$$

У таких дуальных систем общие траектории с разной параметризацией по времени [31, 21]. Существование таких систем связано с тем фактом, что отображение Абеля является сюръективным и, в общем случае, инъективным.

Замечание 2. Для дуальных систем соответствующие гиперэллиптические кривые (2.15) связаны перестановкой одного из параметров α и функции Гамильтона H_1, и, следовательно, такие преобразования называются «coupling constant metamorphoses» [7, 19, 31]. Такие преобразования также тесно связаны с взаимообратными, или реверсивными, преобразованиями [1].

Сейчас кратко рассмотрим построение суперинтегрируемых систем типа Ришело, для которых только $n-1$ уравнение движения из N являются уравнениями Абеля–Ришело. В этом случае к n уравнениям (2.10) необходимо добавить $N-n$ произвольных разделенных уравнений

$$\Phi_m(p_m, q_m, H_1, \ldots, H_N) = 0, \qquad n < m \leqslant N.$$

Решая этот полный набор разделенных уравнений относительно интегралов движения H_k, мы получим N функционально независимых интегралов движения (2.11). Как и прежде, уравнения Абеля должны совпасть с уравнениями Ришело (2.3) и, следовательно, блок размера $n \times n$ матрицы Штеккеля размера $N \times N$ должен иметь вид (2.14). Приняв во внимание все эти условия, можно получить полную классификацию суперинтегрируемых систем типа Ришело.

Основная проблема заключается в том, что нам в классической механике необходимо получить функцию Гамильтона H_j от физических переменных x натурального вида или какого-то другого специального вида вместо построенных нами функций Гамильтона (2.11), зависящих от абстрактных переменных разделения q. Согласно [18, 32, 33], условие натуральности функции Гамильтона в физических переменных накладывает дополнительные ограничения на коэффициенты A_j в (2.8) и подстановки (2.9).

Легко заметить, что интегралы движения H_k (2.11) и дополнительные интегралы движения Ришело являются полиномами второй степени по импульсам

$$K_1 = \left[\frac{u_1 p_1}{F'(v_1)} + \cdots + \frac{u_n p_n}{F'(v_n)}\right]^2 - A_{2n-1}(v_1 + \cdots + v_n) - A_{2n}(v_1 + \cdots + v_n)^2 \tag{2.17}$$

и

$$K_2 = \left[\frac{u_1 p_1}{v_1^2 F'(v_1)} + \cdots + \frac{u_n p_n}{v_n^2 F'(v_n)}\right]^2 v_1^2 v_2^2 \cdots v_n^2 - A_1\left(\frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right) - A_0\left(\frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right)^2. \tag{2.18}$$

Здесь функции u_j и v_j зависят только от координат.

Таким образом, в случае Ришело все интегралы движения являются полиномами второй степени по импульсам, что позволяет найти суперинтегрируемые системы с гамильтонианом натурального вида на римановых многообразиях постоянной кривизны, используя хорошо изученную теорию ортогональных систем координат и соответствующих тензоров Киллинга [4, 10, 20, 26] на этих многообразиях.

3. Системы Ришело, интегрируемые в одной из ортогональных систем координат

Произвольную ортогональную систему координат можно представить в виде прямой суммы некоторых основных систем координат [4, 10, 20, 26]. Мы ограничимся рассмотрением некоторых из таких базисных систем координат в n-мерном евклидовом пространстве и сфере.

3.1. Базовые ортогональные системы координат

Определение 2. Эллиптическая система координат $\{q_i\}$ в N-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_N$ с параметрами $e_1 < e_2 < \cdots < e_N$ определяется уравнением

$$e(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k^2}{\lambda - e_k} = \frac{\prod_{j=1}^{N}(\lambda - q_j)}{\prod_{i=1}^{N}(\lambda - e_i)}. \tag{3.19}$$

Здесь уравнение (3.19) следует рассматривать как тождество по отношению к произвольному λ.

Положив два или более параметров e_i равными друг другу, мы получим вырожденную эллиптическую систему координат. При этом эллипсоид станет сфероидом или даже сферой, если все параметры будут равны. Таким образом, у системы появляется вращательная симметрия порядка m, если $m+1$ параметр совпадает.

Пример 1. *Положив для примера $e_1 = e_2$, получим*

$$e(\lambda) = 1 + \frac{r^2}{\lambda - e_1} + \sum_{i=3}^{N} \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = \frac{\prod_{i=1}^{N-1}(\lambda - q_i)}{\prod_{j=1}^{N-1}(\lambda - e_j)}, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2. \tag{3.20}$$

Это уравнение определяет эллиптическую систему координат в $\mathbb{E}_{N-1} = \{r, x_3, \cdots, x_N\}$. Для построения ортогональной системы координат $\{q_1, \cdots, q_N\}$ в $\mathbb{E}_N$ можно дополнить радиус r некоторой угловой координатой q_N в плоскости $\{x_1, x_2\}$, например, таким образом:

$$x_1 = r\cos q_N, \qquad x_2 = r\sin q_N, \qquad \text{где} \quad r = \sqrt{res|_{\lambda=e_1}\, e(\lambda)}. \tag{3.21}$$

При $N = 3$ эти уравнения задают вытянутую сфероидальную систему координат.

При $e_1 = e_2 = \cdots = e_n$ остается одна координата $r = \sqrt{\sum x_i^2}$ и $N-1$ угловых ортогональных координат вводятся на единичной сфере $\mathbb{S}_{N-1}$ произвольным образом — это могут быть углы Эйлера или какие-либо другие координаты, отличающиеся от них, например отражением осей или поворотом.

Таким образом, при вырождении часть координат определены явно, а часть координат (угловые координаты) определяются достаточно произвольным образом — в книге [20] такие угловые координаты называются **скрытыми** координатами.

Определение 3. Параболическая система координат $\{q_i\}$ в $\mathbb{E}_N$ с параметрами $e_1 < e_2 < \cdots < e_{N-1}$ определяется уравнением

$$e(\lambda) = \lambda - 2x_N - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{x_k^2}{\lambda - e_k} = \frac{\prod_{j=1}^{N}(\lambda - q_j)}{\prod_{i=1}^{N-1}(\lambda - e_i)}. \tag{3.22}$$

Эти ортогональные системы координат можно также вывести из эллиптической системы координат. Действительно, подставляя

$$x_i = \frac{x_i'}{\sqrt{e_i}}, \qquad i = 1, \ldots, N-1, \qquad x_N = \frac{x_N' - e_N}{\sqrt{e_N}}$$

в уравнение (3.19) и устремляя e_N к бесконечности, мы, после сокращения подобных членов, получим параболическую систему координат.

В параболической системе координат вырождения рассматриваются аналогично вырождениям в эллиптической системе координат.

Пример 2. *При $e_1 = e_2$ получаем*

$$e(\lambda) = \lambda - 2x_N - \frac{r^2}{\lambda - e_1} - \sum_{k=3}^{N-1} \frac{x_k^2}{\lambda - e_k} = \frac{\prod_{j=1}^{N-1}(\lambda - q_j)}{\prod_{i=1}^{N-2}(\lambda - e_i)}, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2. \tag{3.23}$$

Как и ранее, для построения ортогональной системы координат $\{q_1, \cdots, q_n\}$ в $\mathbb{E}_N$ необходимо к радиусу r добавить скрытую переменную, например угловую координату q_N в плоскости $\{x_1, x_2\}$, заданную уравнением (3.21). При $N = 3$ мы таким образом получим так называемые параболоидальные координаты.

Определение 4. Эллиптическая система координат $\{q_i\}$ на сфере $\mathbb{S}_N$ с параметрами $e_1 < e_2 < \cdots < e_{N+1}$ определяется уравнением

$$e(\lambda) = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{x_k^2}{\lambda - e_k} = \frac{\prod_{j=1}^{N}(\lambda - q_j)}{\prod_{i=1}^{N+1}(\lambda - e_i)}. \tag{3.24}$$

Заметим, что уравнение (3.24) предполагает выполнение условия $\sum_{i=1}^{N+1} x_i^2 = 1$. Подобным образом можно определить эллиптическую систему координат $\{q_i\}$ и на гиперболоиде $\mathbb{H}_N$, заданном уравнением $x_0^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 1$ [20]. Как и в предыдущих примерах, эти координаты можно сделать вырожденными, положив некоторые из параметров e_i равными друг другу.

Замечание 3. Существуют алгоритмы [4, 26] и программное обеспечение [17], определяющие для данной функции Гамильтона натурального вида $H = T + V$ на римановом многообразии постоянной кривизны, существуют ли для соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби переменные разделения, совпадающие с одной из ортогональных систем координат, и если это так, предъявляющие способ их построения, то есть получения производящей функции $e(\lambda)$.

3.2. Максимально суперинтегрируемые системы типа Ришело

Базисные ортогональные системы координат определяются функцией

$$e(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{N}(\lambda - q_j)}{\prod_{j=1}^{M}(\lambda - e_j)} = \frac{\phi(\lambda)}{u(\lambda)}, \qquad M = N, N \pm 1, \tag{3.25}$$

являющейся отношением полиномов

$$\phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{N}(\lambda - q_j) \qquad \text{и} \qquad u(\lambda) = \prod_{j=1}^{M}(\lambda - e_j). \tag{3.26}$$

Максимально суперинтегрируемые системы типа Ришело, допускающие разделение переменных в таких системах координат, можно описать, воспользовавшись следующим утверждением:

Утверждение 1. *Если $n = N$ разделенных уравнений имеют вид*

$$p_i^2\, u(q_i)^2 = \frac{1}{2}\left[u(\lambda)\cdot\left(H_1\,\lambda^k + \sum_{i=2}^{N} H_i\,\lambda^{n-i}\right) - \alpha(\lambda)\right]_{\lambda=q_i}, \qquad \alpha(\lambda) = \sum_{j=0}^{2N}\alpha_j\,\lambda^j, \tag{3.27}$$

где $\alpha(\lambda)$ — произвольный полином, то уравнения движения (2.13) являются уравнениями Абеля–Ришело (2.3).

Если $k = n$, то соответствующий максимально суперинтегрируемый гамильтониан

$$H_1 = T + V = \sum_{i=1}^{N}\operatorname{res}\Big|_{\lambda=q_i}\frac{1}{e(\lambda)}\cdot p_i^2 - \sum_{i=1}^{N}\operatorname{res}\Big|_{\lambda=q_i}\frac{\alpha(\lambda)}{u^2(\lambda)e(\lambda)}$$

имеет натуральный вид в физических декартовых координатах на пространстве $\mathbb{E}_n$

$$H_1 = T + V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_{x_i}^2 + \sum_{i=0}^{M}\operatorname{res}\Big|_{\lambda=e_i}\frac{\alpha(\lambda)}{u^2(\lambda)\,e(\lambda)}. \tag{3.28}$$

В последнем выражении мы для краткости ввели дополнительный параметр $e_0 = \infty$.

Если $k > n$, то $H_1^{(k>n)} = \mathrm{v}(x)\,H_1$, где функция $\mathrm{v}(x)$ дается уравнением (2.16).

Легко показать, что эти максимально суперинтегрируемые системы типа Ришело совпадают с полученными другими методами суперинтегрируемыми системами [3, 6, 9, 11, 15, 21, 28]. Так, для эллиптической системы координат в $\mathbb{E}_N$ уравнение (3.28) приводит к потенциалу

$$V = \alpha_{2N}(x_1^2 + \cdots x_n^2) + \sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_i}{x_i^2}, \qquad \gamma_i = \frac{\alpha(e_i)}{\prod_{j\neq i}(e_i - e_j)^2}.$$

Для параболической системы координат в $\mathbb{E}_N$ получается

$$V = \alpha_{2N}(x_1^2 + \cdots 4x_N^2) + \gamma_N x_N + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\gamma_i}{x_i^2}, \qquad \gamma_N = 4\alpha_{2N}\sum e_i + 2\alpha_{2N-1}.$$

Для эллиптической системы координат на сфере $\mathbb{S}_N$ или на гиперболоиде $\mathbb{H}_N$ получаем

$$V = \sum_{i=1}^{N+1}\frac{\gamma_i}{x_i^2}, \qquad \gamma_i = \frac{\alpha(e_i)}{\prod_{j\neq i}(e_i - e_j)^2}.$$

Для того чтобы сравнить трудоемкость вычислений в различных методах, мы приведем несколько примеров.

Пример 3. *Рассмотрим параболические координаты (q_1, q_2, q_3), заданные уравнением*

$$e(\lambda) = \lambda - 2x_3 - \frac{x_1^2}{\lambda - e_1} - \frac{x_2^2}{\lambda - e_2} = \frac{(\lambda - q_1)(\lambda - q_2)(\lambda - q_3)}{(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)},$$

соответствующие импульсы равны

$$p_i = \frac{x_1 p_{x_1}}{2(q_i - e_1)} + \frac{x_2 p_{x_2}}{2(q_i - e_2)} + \frac{p_{x_3}}{2}, \qquad i = 1, \ldots, 3.$$

В этом случае разделенные уравнения (3.27)–(3.33) *имеют вид*

$$p_i^2(q_i-e_1)^2(q_i-e_2)^2=\frac{1}{2}\Big[(H_1\lambda^2+H_2\lambda+H_3)(\lambda-e_1)(\lambda-e_2)-\alpha(\lambda)\Big]_{\lambda=q_i},\qquad i=1,\ldots,3. \quad (3.29)$$

Решая эти уравнения относительно H_k, *получим интегралы движения и функцию Гамильтона*

$$H_1=\frac{p_{x_1}+p_{x_2}+p_{x_3}}{2}+\alpha_6(x_1^2+x_2^2+4x_3^2)+\gamma_3x_3+\frac{\gamma_1}{x_1^2}+\frac{\gamma_2}{x_2^2}+const. \quad (3.30)$$

Это максимально суперинтегрируемый гамильтониан со штеккелевскими интегралами движения H_2, H_3 *и двумя дополнительными интегралами движения Ришело* $K_{1,2}$ (2.17)–(2.18)*:*

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left(\frac{(q_1-e_1)(q_1-e_2)p_1}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)}+\frac{(q_2-e_1)(q_2-e_2)p_2}{(q_2-q_1)(q_2-q_3)}+\frac{(q_3-e_1)(q_3-e_2)p_3}{(q_3-q_1)(q_3-q_2)}\right)^2+\\
&+\frac{\alpha_5}{2}(q_1+q_2+q_3)+\frac{\alpha_6}{2}(q_1+q_2+q_3)^2,\\
K_2 &= \left(\frac{(q_1-e_1)(q_1-e_2)p_1}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)q_1^2}+\frac{(q_2-e_1)(q_2-e_2)p_2}{(q_2-q_1)(q_2-q_3)q_2^2}+\frac{(q_3-e_1)(q_3-e_2)p_3}{(q_3-q_1)(q_3-q_2)q_3^2}\right)^2 q_1^2q_2^2q_3^2+\\
&+\frac{H_3e_1+(H_3-H_2e_1)e_2}{2}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}\right)-\frac{e_1e_2H_3}{2}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}\right)^2.
\end{aligned} \quad (3.31)$$

В физических переменных (x,p_x) *эти интегралы имеют достаточно сложный вид и их построение в других методах занимает достаточно много времени.*

Несложно показать, что интегралы H_1,H_2,H_3 *и* K_1,K_2 *функционально независимы. Конечно, все эти интегралы движения могут быть также получены и в рамках теории Вейерштрасса* [34].

Пример 4. *Рассмотрим двойственную систему Штеккеля и положим* $k=n+1$ *в матрице Штеккеля* (2.14) *из предыдущего примера. Это будет означать перестановку одного из коэффициентов и гамильтониана в разделенных уравнениях* (3.29)

$$p_i^2(q_i-e_1)^2(q_i-e_2)^2=\frac{1}{2}\Big[(\widetilde{H}_1\lambda^3+\widetilde{H}_2\lambda+\widetilde{H}_3)(\lambda-e_1)(\lambda-e_2)-\alpha(\lambda)\Big]_{\lambda=q_i},\qquad i=1,\ldots,3.$$

Решая эти уравнения, мы получим суперинтегрируемую систему с гамильтонианом

$$\widetilde{H}_1=\mathrm{v}(q)\,H_1=\frac{1}{2x_3+e_1+e_2}\,H_1,$$

где H_1 *задан формулой* (3.30)*. Заметим, что такое каноническое преобразование времени существенно меняет вид дополнительных интегралов движения* $K_{1,2}$ (3.30)*.*

3.3. Суперинтегрируемые системы типа Ришело

Теперь рассмотрим вырожденные системы координат, для которых два или более параметров e_j совпадают друг с другом.

В терминах переменных разделения производящая функция $e(\lambda)$ остается мероморфной функцией с n простыми корнями и $m=n,n\pm1$ простыми полюсами. Так как для построения систем Ришело мы используем систему уравнений Абеля–Ришело, то это приводит к ограничению на число корней $1 < n < N$ функции $e(\lambda)$.

В этом случае для построения суперинтегрируемых систем Ришело с $n-1$ дополнительными интегралами движения необходимо рассмотреть n разделенных уравнений (3.27)

$$p_i^2\, u(q_i)^2 = \frac{1}{2}\left[u(\lambda)\cdot\left(H_1\,\lambda^k + \sum_{i=2}^{n} H_i\,\lambda^{n-i}\right) - \alpha(\lambda) + \frac{1}{2}\sum_{j=n+1}^{N}\frac{u(\lambda)}{\mathrm{g}_j(\lambda)}H_j\right]_{\lambda=q_i} \tag{3.32}$$

и $N-n$ разделенных уравнений для скрытых или угловых координат

$$p_j^2 = 2\Big(U_j(q_j) - H_j\Big), \qquad j = n+1,\ldots,N. \tag{3.33}$$

Здесь полиномы $\mathrm{g}_j(\lambda)$ зависят от степени вырождения и определения скрытых координат, см. [4, 20], тогда как $U_j(q_j)$ — произвольные функции этих скрытых (угловых) координат q_j.

Решая эти уравнения относительно интегралов движения H_j, мы получим функцию Гамильтона в том же виде (3.28); все изменение будет в том, что, грубо говоря, коэффициенты полинома $\alpha(\lambda)$ будут зависеть от скрытых координат.

Утверждение 2. *В вырожденных эллиптических и параболических координатах суперинтегрируемые потенциалы типа Ришело имеют вид* (3.28)

$$V = \sum_{i=0}^{m}\mathrm{res}\Big|_{\lambda=e_i}\frac{\alpha(\lambda)-U_i}{u^2(\lambda)\,e(\lambda)}, \qquad e_0=\infty, \tag{3.34}$$

где $U_i = 0$ *для простых корней* e_i *исходной функции* $(\lambda-e_1)\cdots(\lambda-e_M)$ (3.26) *после вырождения* $e_k = e_j$. *Для вырожденных корней* $e_k = e_j$ *потенциал* U_i *является произвольной функцией от соответствующих скрытых координат.*

Это позволяет нам классифицировать все суперинтегрируемые системы Ришело, используя известную классификацию ортогональных систем координат [3, 9, 11, 15, 18, 21, 28]. Иными словами, мы можем взять любую из ортогональных систем координат на римановом многообразии постоянной кривизны (например, из книги Калнинса [20]) и построить соответствующий суперинтегрируемый потенциал Ришело по формуле (3.34).

Пример 5. *Рассмотрим вытянутую сфероидальную систему координат* (q_1,q_2,q_3), *заданную уравнением*

$$e(\lambda) = 1 + \frac{x_1^2+x_2^2}{\lambda-e_1} + \frac{x_3^2}{\lambda-e_3} = \frac{(\lambda-q_1)(\lambda-q_2)}{(\lambda-e_1)(\lambda-e_3)}, \qquad q_3 = \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

Соответствующие импульсы имеют вид

$$p_1 = \frac{x_1p_{x_1}+x_2p_{x_2}}{2(q_1-e_1)} + \frac{x_3p_{x_3}}{2(q_1-e_3)}, \qquad p_2 = \frac{x_1p_{x_1}+x_2p_{x_2}}{2(q_2-e_1)} + \frac{x_3p_{x_3}}{2(q_2-e_3)}, \qquad p_3 = x_2p_{x_1} - x_1p_{x_2}.$$

В этом случае $\mathrm{g}(\lambda) = (e_3-e_1)^{-1}(\lambda-e_1)$ *и разделенные уравнения* (3.32)–(3.33) *принимают форму*

$$p_i^2(q_i-e_1)^2(q_i-e_3)^2 = \frac{1}{2}\left[(H_1\lambda+H_2)(\lambda-e_1)(\lambda-e_2) - \alpha(\lambda) + \frac{(\lambda-e_3)(e_3-e_1)H_3}{2}\right]_{\lambda=q_i},$$

$$p_3 = 2\,(\,U\,(q_3) - H_3\,)\,,$$

где $\alpha(\lambda) = \alpha_4\lambda^4+\alpha_3\lambda^3+\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0$ — *произвольный полином четвертого порядка.*

Решая эти уравнения относительно H_k, получим интегралы движения и функцию Гамильтона

$$H_1 = \frac{p_{x_1}+p_{x_2}+p_{x_3}}{2} + \alpha_4(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \frac{\gamma_1 - U\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{x_1^2+x_2^2} + \frac{\gamma_3}{x_3^2} - 2\alpha_4(e_3+e_1) - \alpha_3,$$

где

$$\gamma_{1,3} = \frac{\alpha(e_{1,3})}{(e_1-e_3)^2}.$$

Это суперинтегрируемый гамильтониан с интегралами движения Штеккеля H_2, H_3 и дополнительным интегралом движения Ришело K_1 (2.17), имеющим вид

$$K_1 = \left(\frac{(q_1-e_1)(q_1-e_3)p_1}{q_1-q_2} + \frac{(q_2-e_1)(q_2-e_3)p_2}{q_2-q_1}\right)^2 - \frac{(H_1-\alpha_3)(q_1+q_2)}{2} + \frac{\alpha_4(q_1+q_2)^2}{2}.$$

В физических переменных (x, p_x) этот интеграл движения равен

$$K_1 = \frac{(x_1p_{x_1}+x_2p_{x_2}+x_3p_{x_3})^2}{4} + \frac{e_1+e_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2}{2}\Big(\alpha_4(e_1+e_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2)+\alpha_3-H_1\Big).$$

Второй интеграл Ришело K_2 (2.18) имеет вид

$$K_2 = \left(\frac{(q_1-e_1)(q_1-e_3)p_1}{(q_1-q_2)q_1^2} + \frac{(q_2-e_1)(q_2-e_3)p_2}{(q_2-q_1)q_2^2}\right)^2 q_1^2q_2^2 - A_1\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right) - A_0\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right),$$

где

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(e_1e_3H_1 - (e_1+e_3)H_2 + (e_1-e_3)H_3 - \alpha_1\right), \qquad A_0 = \frac{1}{2}\left(e_1e_3H_2 - e_3(e_1-e_3)H_3 - \alpha_0\right).$$

Легко проверить, что при подстановке $H_1, \ldots, H_3$ в K_2 мы получим $K_1 = K_2$, поскольку в этом случае есть только одно уравнение Абеля–Ришело, так как $n-1=1$ и один функционально независимый дополнительный интеграл движения. Это означает, что гамильтониан H_1 в $\mathbb{E}_3$ не будет максимально суперинтегрируемым и траектории движения будут просто ограниченными, а не замкнутыми [22].

Пример 6. *Рассмотрим параболоидальные координаты (q_1, q_2, q_3), заданные уравнением*

$$e(\lambda) = \lambda - 2x_3 - \frac{x_1^2+x_2^2}{\lambda-e_1} = \frac{(\lambda-q_1)(\lambda-q_2)}{\lambda-e_1}, \qquad q_3 = \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right),$$

при этом соответствующие импульсы имеют вид

$$p_1 = \frac{x_1p_{x_1}+x_2p_{x_2}}{2(q_1-e_1)} + \frac{p_{x_3}}{2}, \qquad p_2 = \frac{x_1p_{x_1}+x_2p_{x_2}}{2(q_2-e_1)} + \frac{p_{x_3}}{2}, \qquad p_3 = x_2p_{x_1} - x_1p_{x_2}.$$

В этом случае $\mathrm{g}(\lambda) = (\lambda - e_1)$ и разделенные уравнения (3.32)–(3.33) равны

$$p_{1,2}^2(q_{1,2}-e_1)^2 = \frac{1}{2}\left[(H_1\lambda+H_2)(\lambda-e_1) - \alpha(\lambda) + \frac{H_3}{2}\right]_{\lambda=q_{1,2}},$$

$$p_3^2 = 2(U(q_3)-H_3),$$

где $\alpha(\lambda) = \alpha_4\lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$. *Решая эти уравнения относительно* H_k, *мы получим интегралы движения и функцию Гамильтона*

$$H_1 = \frac{p_{x_1}+p_{x_2}+p_{x_3}}{2} + \alpha_4(x_1^2+x_2^2+4x_3^2) + 2(2\alpha_4 e_1+\alpha_3)x_3 + \frac{\alpha(e_1) - U\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{x_1^2+x_2^2} - 3\alpha_4 e_1^2 - 2\alpha_3 e_1 - \alpha_2.$$

Это суперинтегрируемый гамильтониан со штеккелевскими интегралами движения H_2, H_3 *и дополнительным интегралом движения Ришело* K_1 (2.17), *имеющим вид*

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(\frac{(q_1-e_1)p_1}{q_1-q_2} + \frac{(q_2-e_1)p_2}{q_2-q_1}\right)^2 + \frac{\alpha_3}{2}(q_1+q_2) + \frac{\alpha_4}{2}(q_1+q_2)^2 \\ &= \frac{p_{x_3}^2}{4} + 2\alpha_4 x_3^2 + (2\alpha_4 e_1+\alpha_3)x_3 + \frac{e_1(\alpha_4 e_1+\alpha_3)}{2}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Как и в предыдущем примере, здесь $K_1 = K_2$ (2.17)–(2.18).

Пример 7. *Рассмотрим вырожденную эллиптическую систему координат на сфере* $\mathbb{S}_3$ *в* $\mathbb{E}_4$, *так что координаты* (q_1, q_2, q_3) *заданы уравнением*

$$e(\lambda) = \frac{x_1^2+x_2^2}{\lambda-e_1} + \frac{x_3^2}{\lambda-e_3} + \frac{x_4^2}{\lambda-e_4} = \frac{(\lambda-q_1)(\lambda-q_2)}{(\lambda-e_1)(\lambda-e_3)(\lambda-e_4)}, \qquad q_3 = \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

Это означает, что радиус сферы равен $R = \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1$.

В этом случае $\mathrm{g}(\lambda) = (e_3-e_1)^{-1}(e_1-e_4)^{-1}(\lambda-e_1)$ *и пара разделенных уравнений равна*

$$\begin{aligned} p_i^2(q_i-e_1)^2(q_i-e_3)^2(q_i-e_4)^2 &= \frac{1}{2}\Big[(H_1\lambda+H_2)(\lambda-e_1)(\lambda-e_3)(\lambda-e_4) - \alpha(\lambda) \\ &+ (e_3-e_1)(e_1-e_4)(\lambda-e_3)(\lambda-e_4)H_3\Big]_{\lambda=q_{1,2}}, \end{aligned} \tag{3.36}$$

где $\alpha(\lambda)$ — *полином четвертой степени с произвольными коэффициентами, а третье разделенное уравнение для скрытой переменной имеет вид*

$$p_3^2 = 2(U(q_3) - H_3).$$

Решая разделенные уравнения относительно H_k, *мы получим интегралы движения и функцию Гамильтона*

$$H_1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^4 p_i^2 - \left(\sum_{i=1}^4 x_i p_i\right)^2\right) + \frac{\gamma_1 + U\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{x_1^2+x_2^2} + \frac{\gamma_3}{x_3^3} + \frac{\gamma_4}{x_4^2} - \frac{\alpha_4}{R}, \qquad \gamma_i = \frac{\alpha(e_i)}{\prod_{j\neq i}(e_i-e_j)^2}.$$

Эта суперинтегрируемая функция Гамильтона, и дополнительный интеграл Ришело имеет вид

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(\frac{(q_1-e_1)(q_1-e_3)(q_1-e_4)p_1}{q_1-q_2} + \frac{(q_2-e_1)(q_2-e_3)(q_2-e_4)p_2}{q_2-q_1}\right)^2 + \\ &+ \frac{(e_1+e_3+e_4)H_1+\alpha_3-H_2}{2}\Big(q_1+q_2\Big) + \frac{\alpha_4-H_1}{2}\Big(q_1+q_2\Big)^2. \end{aligned} \tag{3.37}$$

При этом $n = 2$ *и, следовательно,* $K_1 = K_2$ (2.17)–(2.18).

В этом случае преобразование времени (2.16) *при* $k = n + 1$ *приводит к следующему преобразованию пары разделенных уравнений* (3.32)–(3.36)*:*

$$p_i^2\, u(q_i)^2 = \frac{1}{2}\left[u(\lambda)\cdot\left(H_1\,\lambda^2 + H_2\right) - \alpha(\lambda) + \frac{1}{2}\frac{u(\lambda)}{\mathrm{g}_3(\lambda)}H_3\right]_{\lambda=q_i} = \frac{H_1}{2}\,\lambda^5 + \ldots\Big|_{\lambda=q_i}.$$

В правой части уравнений получается полином степени $2n + 1$ *по* λ *и, следовательно, соответствующие два уравнения Абеля больше не являются уравнениями Ришело* (2.3)*. Тем самым, это пример случая, когда преобразование времени сохраняет интегрируемость, но приводит к потере свойства суперинтегрируемости.*

4. Заключение

Согласно [18, 32, 33], существует два класса суперинтегрируемых систем, в которых переменные типа угол либо *логарифмические*, либо *эллиптические* функции. В обоих случаях использование теорем сложения, являющихся частными случаями теоремы Абеля, позволяет получить дополнительные интегралы движения, являющиеся однозначными функциями на всем фазовом пространстве.

Основная цель этой работы — обсуждение метода Ришело, одного из старейших, но практически не освещенного в современной литературе, подхода к построению и исследованию суперинтегрируемых систем, допускающего разделение переменных в одной из ортогональных систем координат. Конечно, такие n-мерные суперинтегрируемые системы могут быть получены и другими известными методами (см. работы [3, 9, 11, 15, 21, 28] и ссылки в них). Тем не менее, мы считаем, что новое определение (3.28), (3.34)

$$V = \sum \operatorname{res}\Big|_{\lambda=e_i}\,\frac{\alpha(\lambda)}{u^2(\lambda)\,e(\lambda)}, \qquad u(\lambda) = \prod_{j=1}^{M}(\lambda - e_j),$$

суперинтегрируемых потенцилов через производящую функцию $e(\lambda)$ системы координат и произвольный полином $\alpha(\lambda)$ может быть полезным в различных приложениях.

Представляет интерес построение квантовых аналогов интегралов движения Ришело и исследование алгебры интегралов движения в терминах алгебраической геометрии. Другим направлением продолжения исследований является классификация суперинтегрируемых систем Ришело на пространствах Дарбу.

Список литературы

[1] Abenda S. Reciprocal transformations and local Hamiltonian structures of hydrodynamic type systems // J. Phys. A, 2009, vol. 42, 095208, 20 p.

[2] Baker H. F. Abel's theorem and the allied theory including the theory of the theta functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1897.

[3] Ballesteros A., Herranz F. J. Universal integrals for superintegrable systems on N-dimensional spaces of constant curvature // J. Phys. A, 2007, vol. 40, pp. F51-F59.

[4] Benenti S. Orthogonal separable dynamical systems // Differential geometry and its applications: Proc. of the 5th Intern. Conf. on Differential Geometry and Its Applications (Silesian Univ., Opava, August 24-28, 1992) / O. Kowalski, D. Krupka. Opava, 1993. Vol. 1, pp. 163–184.

Benenti S. Separability on Riemannian manifolds (2004). http://www2.dm.unito.it/~benenti/.

[5] Bertrand J. Théorème relatif au mouvement d´un point attiré vers un centre fixe // C. R. Acad. Sci. Paris, 1873, vol. 77, pp. 849–853.

[6] Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S., Multiparticle Systems. The Algebra of Integrals and Integrable Cases // Regular and Chaotic Dynamics, 2009, vol. 14, pp. 18–41.

[7] Boyer C. P., Kalnins E. G., Miller W. Jr. Stäckel-equivalent integrable Hamiltonian systems // SIAM J. Math. Anal., 1986, vol. 17, pp. 778–797.

[8] Caley A. An elementary treatise on elliptic functions. London: Constable & Co., 1876.

[9] Daskaloyannis C., Ypsilantis K. Unified treatment and classification of superintegrable systems with integrals quadratic in momenta on a two-dimensional manifold // J. Math. Phys., 2006, vol. 47, 042904.

[10] Eisenhart L. P. Separable systems of Stäckel // Ann. Math., 1934, vol. 35, pp. 284–305.

[11] Evans N. W. Superintegrability in classical mechanics // Phys. Rev. A, 1990, vol. 41, pp. 5666–5676.

[12] Euler L. Institutiones Calculi integralis. Petropoli, 1768. [Эйлер Л. Интегральное исчисление. М., 1956.]

[13] Jacobi C. G. J. Vorlesungen über Dynamik. Königsberg, 1866.

[14] Jacobi C. G. J. Über eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen // J. Reine Angew. Math., 1846, vol. 32, pp. 220–227.

[15] Friš J., Mandrosov V., Smorodinsky Ya. A., Uhlíř M., Winternitz P. On higher symmetries in quantum mechanics // Phys. Lett., 1965, vol. 16, pp. 354–356.

[16] Greenhill A. G. The applications of elliptic functions. London: Macmillan, 1892.

[17] Grigoryev Yu. A., Tsiganov A. V. Symbolic software for separation of variables in the Hamilton–Jacobi equation for the L-systems // Regul. Chaotic Dyn., 2005, vol. 10, no. 4, pp. 413–422.

[18] Grigoryev Yu. A., Khudobakhshov V. A., Tsiganov A. V. On the Euler superintegrable systems // J. Phys. A, 2009, vol. 42, 075202, 11 p.

[19] Hietarinta J., Grammaticos B., Dorizzi B., Ramani A. Coupling-constant metamorphosis and duality between integrable Hamiltonian systems // Phys. Rev. Lett., 1984, vol. 53, pp. 1707–1710.

[20] Kalnins E. G. Separation of variables for Riemannian spaces of constant curvature. Harlow: Longman; New York: Wiley, 1986. (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Vol. 28.)

Kalnins E. G., Miller W. Jr. Separation of variables on n-dimensional Riemannian manifolds: I. The n-sphere S_n and Euclidean n-space R_n // J. Math. Phys., 1986, vol. 27, pp. 1721–1736.

[21] Kalnins E. G., Kress J. M., Miller W. Jr. Second-order superintegrable systems in conformally flat spaces: I, II, III // J. Math. Phys., 2005, vol. 46, 053509, 28 p.; 053510, 15 p.; 103507, 28 p.

[22] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995. 432 с.

[23] Krazer A. Lehrbuch der Thetafunctionen. Leipzig, 1903; Chelsea Reprint, New York, 1970.

[24] Lagrange J. L. Théorie des fonctions analytiques. Paris, 1797.

[25] Nekhoroshev N. N. Action-angle variables and their generalization // Trans. Moscow Math. Soc., 1972, vol. 26, pp. 180–198.

[26] Rauch-Wojciechowski S., Waksjö C. How to find separation coordinates for the Hamilton-Jacobi equation: A criterion of separability for natural Hamiltonian systems // Math. Phys. Anal. Geom., 2003, vol. 6, pp. 301–348.

[27] Richelot F. Über die Integration eines merkwürdigen Systems von Differentialgleichungen // J. Reine Angew. Math., 1842, vol. 23, pp. 354–369.

[28] Rodríguez M. A., Tempesta P., Winternitz P. Reduction of superintegrable systems: The anisotropic harmonic oscillator // Phys. Rev. E, 2008, vol. 78, 046608, 6 p.

[29] Stäckel P. Über die Integration der Hamilton–Jacobischen Differential Gleichung mittelst Separation der Variabel: Habilitationsschrift. Halle, 1891.

[30] Tsiganov A. V. The Stäckel systems and algebraic curves // J. Math. Phys., 1999, vol. 40, pp. 279–298.

[31] Tsiganov A. V. Duality between integrable Stäckel systems // J. Phys. A, 1999, vol. 32, no. 45, pp. 7965–7982.

[32] Tsiganov A. V. Addition theorem and the Drach superintegrable systems // J. Phys. A, 2008, vol. 41, no. 33, 335204, 16 p.

[33] Tsiganov A. V. Leonard Euler: Addition theorems and superintegrable systems // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 3, pp. 389–406.

[34] Weierstrass K., *Über die geodätischen linien auf dem dreiaxigen ellipsoid*, Math. Werke, vol. I, p. 257, Berlin, Mayer and Müller, 1895.