УДК 531.36

Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Бобылева–Стеклова

Б. С. Бардин

Кафедра теоретической механики
Факультет прикладной математики и физики
Московский авиационный институт
125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4
bsbardin@yandex.ru

Получено 23 ноября 2009 г.

Рассматривается задача об орбитальной устойчивости периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Геометрия масс тела отвечает случаю Бобылева–Стеклова. Невозмущенное периодическое движение представляет собой плоские маятниковые колебания или вращения тела, при которых одна из его главных осей инерции сохраняет неизменное горизонтальное положение. Задача об устойчивости решается в нелинейной постановке.

В случае колебаний с малыми амплитудами и в случае вращений с большими угловыми скоростями удается ввести малый параметр и исследовать орбитальную устойчивость аналитически. При произвольных значениях параметров нелинейная задача об орбитальной устойчивости сведена к анализу устойчивости неподвижной точки симплектического отображения, генерируемого системой уравнений возмущенного движения. Коэффициенты симплектического отображения получены численно. На основе их анализа сделаны строгие выводы об орбитальной устойчивости или неустойчивости невозмущенного движения. Результаты проведенного исследования представлены в виде диаграмм устойчивости в плоскости параметров задачи.

Ключевые слова: гамильтонова система, периодические движения, нормальная форма, резонанс, переменные действие-угол, КАМ-теория

B. S. Bardin

On orbital stability of pendulum like motions of a rigid body in the Bobylev-Steklov case

We deal with the problem of orbital stability of pendulum like periodic motions of a heavy rigid body with a fixed point. We suppose that the geometry of the mass of the body corresponds to the Bobylev–Steklov case. Unperturbed motion represents oscillations or rotations of the body around a principal axis, occupying a fixed horizontal position. The problem of the orbital stability is considered on the base of a nonlinear analysis.

In the case of oscillations with small amplitudes as well as in the case of rotations with high angular velocities we studied the problem analytically. In general case we reduce the problem to the stability study of fixed point of the symplectic map generated by equations of perturbed motion. We calculate coefficients of the symplectic map numerically. By analyzing of the coefficients mentioned we establish orbital stability or instability of the unperturbed motion. The results of the study are represented in the form of stability diagram.

Keywords: Hamiltonian system, periodic orbits, normal form, resonance, action-angel variables, KAM theory

Mathematical Subject Classifications: 34D20, 70E50, 70E17

1. Постановка задачи

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Пусть mg — вес тела, l — расстояние от центра тяжести до неподвижной точки O. Введем неподвижную систему координат $OXYZ$, ось Z которой направлена вертикально вверх. С твердым телом жестко свяжем подвижную систему координат $Oxyz$, оси x, y, и z которой направим вдоль главных осей инерции тела для точки O. Соответствующие моменты инерции обозначим через A, B и C, а координаты центра тяжести в подвижной системе координат — через x_*, y_*, z_*. Положение тела (подвижных осей $Oxyz$) относительно неподвижной системы координат $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ.

Пусть имеет место случай Бобылева–Стеклова, когда $A = 2C$, а центр масс тела лежит на оси x подвижной системы координат, т. е. $x_* = l$, $y_* = z_* = 0$. В этом случае уравнения Эйлера–Пуассона, описывающие движение твердого тела, имеют вид [1]

$$\begin{gathered}2C\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = 0, \quad B\frac{dq}{dt} + Crp = mgl\gamma_3, \quad C\frac{dr}{dt} + (B-2C)pq = -mgl\gamma_2,\\ \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2,\end{gathered} \tag{1}$$

где p, q, r и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — проекции вектора угловой скорости и единичного вектора вертикали Z на оси подвижной системы координат $Oxyz$.

Случай Бобылева–Стеклова замечателен тем, что уравнения движения твердого тела допускают семейство частных решений [2,3], которые могут быть получены в эллиптических функциях Якоби (см., например, [4–6]).

В случае Бобылева–Стеклова уравнения движения допускают также частное решение, описывающее плоское движение твердого тела, при котором ось инерции z сохраняет неизменное горизонтальное положение, а постоянная интеграла площадей равна нулю. На этом движении $\theta = \pi/2$, $\psi = const$, а изменение угла φ описывается следующим уравнением физического маятника

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu^2\cos\varphi = 0, \quad \mu^2 = \frac{mgl}{C}. \tag{2}$$

Таким образом, в данном движении тело либо совершает маятниковые колебания или вращения вокруг оси z, либо асимптотически приближается к положению равновесия.

В настоящей работе исследуется задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твердого тела: колебаний и вращений относительно оси z.

Заметим, что если, кроме наложенных выше условий, потребовать еще $A = B$, то будет иметь место случай С. В. Ковалевской. В этом случае задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений была полностью изучена [7–9]. В настоящей статье применяется методика, аналогичная работе [9].

2. Гамильтониан задачи. Невозмущенное движение

В случае Бобылева–Стеклова кинетическая и потенциальная энергии твердого тела имеют вид

$$T = \frac{1}{2}(2Cp^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \Pi = mgl\gamma_1\,. \tag{3}$$

Перейдем от проекций угловой скорости p, q, r к обобщенным импульсам, соответствующим углам Эйлера, по формулам

$$p_\psi = 2Cp\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3, \quad p_\theta = Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi, \quad p_\varphi = Cr\,. \tag{4}$$

В переменных $\psi, \theta, \varphi, p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ уравнения движения имеют каноническую форму с гамильтонианом $H = T + \Pi$. Угол ψ является циклической координатой, а соответствующий импульс p_ψ представляет собой интеграл площадей и поэтому принимает на невозмущенном движении нулевое значение. Далее будем считать, что и в возмущенном движении также $p_\psi = 0$.

Введем безразмерное время $\tau = \mu t$ и безразмерные канонические переменные q_1, q_2, p_1, p_2

$$q_1 = \varphi - \frac{3\pi}{2}, \quad q_2 = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad p_1 = \frac{p_\varphi}{C\mu}, \quad p_2 = \frac{p_\theta}{C\mu}\,. \tag{5}$$

Гамильтониан задачи принимает вид

$$\begin{aligned} H =& \frac{1}{4}\left[(2\,\alpha - 1)\,\sin^2 q_1 \tan^2 q_2 + \tan^2 q_2 + 2\right]\, p_1^2 + \frac{1}{4}\,(2\,\alpha - 1)\,\sin 2q_1 \tan q_2\; p_1\, p_2 + \\ &+ \frac{1}{4}\left[2\,\alpha - (2\,\alpha - 1)\,\sin^2 q_1\right]\, p_2^2 - \cos q_1\,\cos q_2, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\alpha = C/B$, причем в случае Бобылева–Стеклова $\dfrac{1}{3} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

На решениях, отвечающих плоским маятниковым движениям твердого тела относительно неподвижной оси инерции Oz, изменение переменных q_1, p_1 описывается системой канонических уравнений с гамильтонианом $H^{(0)} = 1/2p_1^2 - \cos q_1$, а переменные q_2, p_2 принимают нулевые значения. В зависимости от значения константы h интеграла энергии $H^{(0)} = h$ плоские движения являются либо асимптотическими ($h = 1$) к неустойчивому положению равновесия $\varphi = \pi/2$ твердого тела, либо представляют собой периодические движения: колебания ($|h| < 1$) в окрестности устойчивого положения равновесия $\varphi = 3\pi/2$ или вращения ($h > 1$) относительно оси Oz.

Введем переменные I, w, которые являются переменными действие-угол для системы с гамильтонианом $H^{(0)}$, описывающей невозмущенное движение. В случае колебаний каноническая унивалентная замена переменных $q_1, p_1 \to I, w$ имеет вид [9]

$$q_1 = 2\arcsin[k_1\,\mathrm{sn}(u, k_1)], \quad p_1 = 2k_1\,\mathrm{cn}(u, k_1), \quad u = 2\pi^{-1}K(k_1)w, \tag{7}$$

где $k_1 = k_1(I)$ — функция, обратная к функции

$$I = 8\pi^{-1}[E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)]. \tag{8}$$

В случае вращений переменные действие-угол I, w вводятся по формулам [9]

$$q_1 = 2\mathrm{am}(u, k_2), \quad p_1 = 2k_2^{-1}\,\mathrm{dn}(u, k_2), \quad u = \pi^{-1}K(k_2)w, \tag{9}$$

где $k_2 = k_2(I)$ — функция, обратная к функции

$$I = 4E(k_2)/(\pi k_2). \tag{10}$$

В (7)–(10) используются общепринятые обозначения для эллиптических функций и интегралов [10].

В невозмущенном движении

$$I = I_0 = \text{const}, \qquad w = \omega\tau + w(0), \tag{11}$$

где ω — частота периодического движения. В случае колебаний $\omega = \pi/(2K(k_1))$, а в случае вращений $\omega = \pi/(k_2 K(k_2))$. При этом $k_1(I_0) = \sin(\beta/2)$ (где β — амплитуда плоских колебаний; $0 < \beta < \pi$), $k_2^2(I_0) = 2(1+h)^{-1}$. Совместно с (11) формулы (7), (9) определяют явную зависимость переменных q_1, p_1 от τ на невозмущенном движении.

3. Гамильтониан возмущенного движения. Изоэнергетическая редукция

Введем возмущение переменной действие $r_1 = I - I_0$ и разложим гамильтониан возмущенного движения $\Gamma(w, r_1, q_2, p_2)$ в ряд по q_2, p_2, r_1

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \ldots + \Gamma_{2m} + \ldots, \tag{12}$$

где Γ_{2m} — форма степени $2m$ относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ с T-периодическими коэффициентами относительно w, причем $T = \pi$ в случае колебаний и $T = 2\pi$ в случае вращений. Несущественная аддитивная постоянная в (12) опущена. Необходимые для дальнейшего анализа формы Γ_2 и Γ_4 имеют вид

$$\Gamma_2 = \omega r_1 + \Gamma_2^{(0)}(q_2, p_2, w), \quad \Gamma_2^{(0)} = f_{20}q_2^2 + f_{11}q_2p_2 + f_{02}p_2^2, \tag{13}$$

$$\Gamma_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial I}r_1^2 + \frac{\partial\Gamma_2^{(0)}}{\partial I}r_1 + \Gamma_4^{(0)}(q_2, p_2, w), \quad \Gamma_4^{(0)} = f_{40}q_2^4 + f_{31}q_2^3p_2, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
f_{20} &= \frac{1}{4}\left[(2\alpha - (2\alpha-1)\cos^2 q_1)p_1^2 + 2\cos q_1\right],\\
f_{11} &= \frac{1}{2}(2\alpha-1)p_1\sin q_1\cos q_1, \;\; f_{02} = \frac{1}{4}\left[(2\alpha-1)\cos^2 q_1 + 1\right],\\
f_{40} &= \frac{1}{6}\left[(2\alpha\sin^2 q_1 + \cos^2 q_1)p_1^2 - \frac{1}{4}\cos q_1\right],\\
f_{31} &= \frac{1}{6}(2\alpha-1)p_1\sin q_1\cos q_1,
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\omega = \omega_1$ в случае колебаний и $\omega = \omega_2$ в случае вращений. Величины q_1 и p_1 отвечают невозмущенному движению и определяются по формулам (7) и (9) в случаях колебаний и вращений соответственно.

Гамильтониан (12) зависит от двух параметров: инерционного параметра α и величины I_0, которая является параметром семейства траекторий невозмущенного движения. Для дальнейшего анализа, однако, будет удобнее вместо I_0 использовать постоянную энергии плоского невозмущенного движения.

Задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений твердого тела эквивалентна задаче об устойчивости канонической системы с гамильтонианом (12) по отношению к переменным q_2, p_2, r_1.

Для решения вопроса об устойчивости необходимо выполнить нормализацию гамильтониана (12), а затем применить соответствующие критерии устойчивости [11]. Заметим, однако, что данные критерии устойчивости совпадают с критериями устойчивости положения равновесия редуцированной системы с одной степенью свободы, описывающей движение на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$. Поэтому далее будем рассматривать возмущенное движение лишь на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$, отвечающем невозмущенному движению.

В силу уравнений движения с гамильтонианом (12) координата w является возрастающей функцией переменной τ, поэтому в задаче об устойчивости движения она может играть роль времени. Для описания движения на нулевом изоэнергетическом уровне примем координату w за новую независимую переменную. Кроме того, из уравнения $\Gamma = 0$ при малых q_2, p_2, r_1 имеем $r_1 = -K(q_2, p_2, w)$. Функция $K(q_2, p_2, w)$ представляет собой ряд

$$K = K_2 + K_4 + \ldots + K_k + \ldots, \tag{16}$$

K_k — форма степени k относительно q_2, p_2 с T-периодическими по w коэффициентами. Формы K_2 и K_4 имеют следующий явный вид

$$K_2 = \frac{1}{\omega}\Gamma_2^{(0)}(q_2, p_2, w), \tag{17}$$

$$K_4 = \frac{1}{\omega}\left[\Gamma_4^{(0)}(q_2, p_2, w) - \frac{\Gamma_2^{(0)}}{\omega}\frac{\partial \Gamma_2^{(0)}}{\partial I} + \frac{1}{2}\frac{\partial \omega}{\partial I}\left(\frac{\Gamma_2^{(0)}}{\omega}\right)^2\right]. \tag{18}$$

Уравнения движения на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$ можно записать в гамильтоновой форме

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial K}{\partial q_2}. \tag{19}$$

Таким образом, задача об устойчивости рассматриваемых плоских периодических движении твердого тела сводится к исследованию устойчивости положения равновесия $q_2 = p_2 = 0$ редуцированной системы (19).

4. Анализ устойчивости в линейном приближении

Рассмотрим систему линейных уравнений с гамильтонианом K_2

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{1}{\omega}(f_{11}q_2 + 2f_{02}p_2), \qquad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{1}{\omega}(2f_{20}q_2 + f_{11}p_2). \tag{20}$$

Величины f_{11}, f_{20}, f_{02} в (20) определяются равенствами (15).

Выводы об устойчивости системы (20) можно сделать на основании анализа корней ее характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2\varkappa\rho + 1 = 0, \tag{21}$$

где $2\varkappa = [x_{11}(T) + x_{22}(T)]$. Функции $x_{11}(w), x_{22}(w)$ — элементы фундаментальной матрицы $\mathbf{X}(w)$ системы (20), удовлетворяющей начальным условиям $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_2$, где $\mathbf{E}_2$ — единичная матрица второго порядка.

Если $|\varkappa| > 1$, то корни характеристического уравнения по модулю больше единицы. В этом случае линейная система (20) неустойчива [12]. Отсюда, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, следует неустойчивость нелинейной системы (19), а следовательно, и орбитальная неустойчивость соответствующего плоского периодического движения. Если же $|\varkappa| < 1$, то модули корней характеристического уравнения равны единице, поэтому линейная система (20) устойчива [12]. Из последнего, однако, не следует устойчивость соответствующей нелинейной системы.

При $|\varkappa| = 1$ характеристическое уравнение (21) имеет кратный корень $\rho = 1$ или $\rho = -1$. В этом случае анализа устойчивости линейной системы (20) также недостаточно для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости плоских движений твердого тела. При $|\varkappa| \leqslant 1$ вопрос об орбитальной устойчивости плоских периодических движений решается членами не ниже четвертого порядка в гамильтониане (16).

В общем случае величины $x_{11}(T)$ и $x_{22}(T)$ определяются путем численного интегрирования линейной системы (20) на интервале $[0; T]$. Оказывается, однако, что при определенных значениях параметров α и h можно найти общее решение системы (20) и получить выражения для $x_{11}(T)$ и $x_{22}(T)$ в явном виде. С этой целью выполним формально замену независимой переменной по формуле $z = \cos q_1(w)$ и перейдем от системы (20) к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2q_2}{dz^2} + P(z)\frac{dq_2}{dz} + Q(z)q_2 = 0\,, \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} P(z) =& \frac{1}{2}\,\frac{(1-2\,\alpha)\,z^4 + 2\,h\,(1-2\,\alpha)\,z^3 + 6\,\alpha\,z^2 + 2\,h\,(4\,\alpha-1)\,z - 1}{(2\,\alpha\,z^2 - z^2 + 1)\,(z+h)\,(z^2-1)},\\ Q(z) =& \frac{1}{2}\,\frac{(2\,\alpha-1)\,z^3 + h\,(\alpha+1)\,(2\,\alpha-1)\,z^2 + (1-4\,\alpha)\,z + h\,(1-3\,\alpha)}{(2\,\alpha\,z^2 - z^2 + 1)\,(z+h)\,(z^2-1)}\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Выполнив теперь замену зависимой переменной q_2 по формуле

$$\xi = q_2 \exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z} P(v)dv\right], \tag{24}$$

приходим к уравнению, не содержащему первой производной

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} - J(z)\xi = 0, \tag{25}$$

где

$$J(z) = -Q(z) + \frac{1}{4}P(z)^2 + \frac{1}{2}\frac{dP(z)}{dz}\,. \tag{26}$$

Коэффициент $J(z)$ уравнения (25) — рациональная функция независимой переменной z. Далее предполагаем, что переменная z принимает значения из комплексной области.

Если $\xi_1(z)$ — какое-либо частное решение уравнения (25), то функция

$$\xi_2(z) = \xi_1(z)\int\limits_{z_0}^{z}\frac{1}{\xi_1^2(v)}dv$$

также является частным решением данного уравнения, причем $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ образуют систему линейно независимых решений (см., например, [13]). Используя данные решения, уже несложно получить фундаментальную систему решений для (20).

Частное решение уравнения (25), получаемое в квадратурах (если такое существует), можно попытаться построить при помощи алгоритма Дж. Ковачича [14]. Данный алгоритм позволяет находить лиувилевы решения уравнения вида (25), т. е. такие решения которые могут быть получены при помощи конечного числа следующих действий над рациональными функциями: выполнение алгебраических операций, вычисление неопределенного интеграла и нахождение экспоненты от неопределенного интеграла.

Не приводя громоздких вычислений, связанных с применением алгоритма Ковачича, укажем те случаи, когда линейную систему (20) удается проинтегрировать в квадратурах, и выпишем соответствующую ей фундаментальную матрицу.

1. Если $h = 0$, а $\alpha \in [1/3; 1]$, то элементы x_{ij} матрицы $\mathbf{X}(w)$ фундаментальной системы решений определяются формулами

$$\begin{aligned}
&x_{11} = \mathrm{cn}u,\\
&x_{12} = (\alpha-1)\mathrm{cn}u\,(2\mathsf{E}(\mathrm{am}u)-u)+\mathrm{sn}u\mathrm{dn}u,\\
&x_{21} = -2\mathrm{sn}u\mathrm{dn}u,\\
&x_{22} = \mathrm{cn}^3u-2(\alpha-1)\,(2\mathsf{E}(\mathrm{am}u)-u)\,\mathrm{sn}u\mathrm{dn}u, \quad u=\frac{2K}{\pi}w.
\end{aligned} \tag{27}$$

При $w = \pi$ матрица $\mathbf{X}(w)$ будет иметь вид

$$\mathbf{X}(\pi) = \begin{Vmatrix} -1 & 2(1-\alpha)(2E-K) \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}. \tag{28}$$

Через E обозначен эллиптический интеграл второго рода. В выражениях (27) и (28) модуль эллиптических интегралов и эллиптических функций принимает значение $k_1 = \sqrt{2}/2$, соответствующее $h = 0$.

2. Если $h = -\dfrac{1}{2\alpha-1}$ ($h \in (1; +\infty)$, $\alpha \in (1/3; 1/2)$), то элементы x_{ij} матрицы $\mathbf{X}(w)$ фундаментальной системы решений определяются формулами

$$\begin{aligned}
&x_{11} = \mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u,\\
&x_{12} = \frac{k_2}{k_2^2-2}\left[\mathrm{dn}u\,\mathrm{cn}u\,(u-\mathsf{E}(\mathrm{am}u))+\mathrm{sn}u\,(k_2^2\,\mathrm{cn}^2u-1)\right],\\
&x_{21} = -\frac{(k_2^2+2\,\mathrm{dn}^2u)\,\mathrm{sn}u}{k_2},\\
&x_{22} = \frac{\mathrm{sn}u\,(k_2^2+2\,\mathrm{dn}^2u)\,(\mathsf{E}(\mathrm{am}u)-u)+\mathrm{dn}u\,\mathrm{cn}u\,(k_2^2-2(1+k_2^2\mathrm{sn}^2u))}{k_2^2-2}, \quad u=\frac{K}{\pi}w\,.
\end{aligned} \tag{29}$$

При $w = 2\pi$ матрица $\mathbf{X}(w)$ будет иметь вид

$$\mathbf{X}(2\pi) = \begin{Vmatrix} -1 & \dfrac{2k_2}{(2-k_2^2)}(K-E) \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}. \tag{30}$$

В выражениях (29) и (30) модуль эллиптических интегралов и эллиптических функций принимает значение $k_2 = \sqrt{(2\alpha-1)/(\alpha-1)}$.

3. Если $h = \dfrac{1}{2\alpha - 1}$ ($h \in (1; +\infty)$, $\alpha \in (1/2; 1)$), то элементы x_{ij} матрицы $\mathbf{X}(w)$ фундаментальной системы решений определяются формулами

$$x_{11} = \frac{\mathrm{dn}u\,\mathrm{sn}u\,[u(1-k_2^2) - \mathsf{E}(\mathrm{am}u)] + \mathrm{cn}u\,(1 - k_2^2\,\mathrm{cn}^2 u)}{1-k_2^2},$$

$$\begin{aligned}
x_{12} &= \frac{k_2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u}{2-k_2^2},\\
x_{21} &= \frac{(k_2^2 - 2\,\mathrm{dn}^2 u)[\mathsf{E}(\mathrm{am}u) - u\,(1-k_2^2)]\,\mathrm{cn}u + (k_2^2 - 2(1-k_2^2\mathrm{cn}^2 u))\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u}{k_2(1-k_2^2)},\\
x_{22} &= \frac{(2\,\mathrm{dn}^2 u - k_2^2)\,\mathrm{cn}u}{2-k_2^2}, \quad u = \frac{K}{\pi}w\,.
\end{aligned} \tag{31}$$

При $w = 2\pi$ матрица $\mathbf{X}(w)$ будет иметь вид

$$\mathbf{X}(2\pi) = \left\|\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ \dfrac{(2-k_2^2)(2E - 2(1-k_2^2)K)}{k_2(1-k_2^2)} & -1 \end{array}\right\|. \tag{32}$$

В выражениях (31) и (32) модуль эллиптических интегралов и эллиптических функций принимает значение $k_2 = \sqrt{(2\alpha-1)/\alpha}$.

Заметим, что во всех трех указанных случаях интегрируемости системы (20) коэффициент $\varkappa = -1$, т. е. характеристическое уравнение (21) имеет кратный корень, равный -1. Это означает, что в системе возникает резонанс второго порядка, который, как правило, имеет место на границах областей устойчивости.

Для произвольных значений параметров коэффициент $\varkappa$ вычислялся при помощи численного интегрирования системы (20). На основании проведенных расчетов была построена диаграмма устойчивости, изображенная на рис. 1. Штриховкой показана область неустойчивости. Она разделяется прямой $h = 1$ на две подобласти. Нижняя подобласть соответствует орбитально неустойчивым колебаниям, а верхняя подобласть — орбитально неустойчивым вращениям. Расчеты показали, что соотношения между параметрами α и h, соответствующие приведенным выше случаям интегрируемости линейной системы, действительно определяют границы области неустойчивости. Нижней границей $\gamma_2^{(1)}$ области неустойчивости является прямая $h = 0$, соответствующая колебаниям с амплитудой $\pi/2$. Криволинейные участки $\gamma_2^{(2)}$ и $\gamma_2^{(3)}$ левой и правой границ области неустойчивости задаются уравнениями $h = -\dfrac{1}{2\alpha-1}$ и $h = \dfrac{1}{2\alpha-1}$ соответственно. При $h \to +\infty$ кривые $\gamma_2^{(2)}$ и $\gamma_2^{(3)}$ асимптотически приближаются к вертикальной прямой $\alpha = 1/2$, соответствующей случаю С. В. Ковалевской.

В незаштрихованных областях на рис. 1 колебания (область I) или вращения (области II и III) орбитально устойчивы в линейном приближении. Для получения строгих выводов об устойчивости в указанных областях требуется дополнительное исследование.

5. Исследование устойчивости в предельных случаях

Строгий анализ устойчивости в областях I, II и III начнем с изучения предельных случаев, когда удается ввести малый параметр и выполнить исследование аналитически.

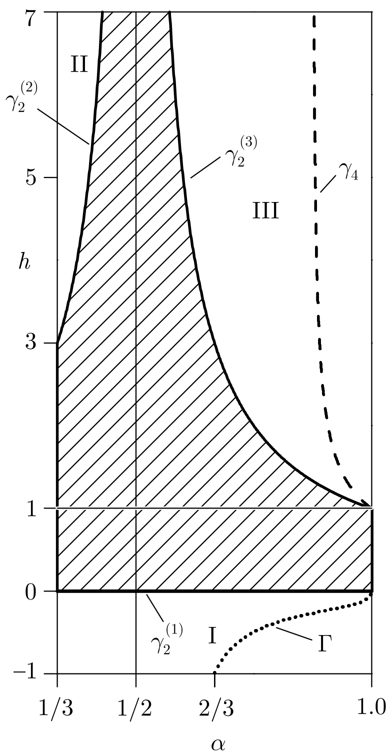

Рис. 1. Диаграмма устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Бобылева–Стеклова.

Рассмотрим два предельных случая: колебания с малыми амплитудами и вращения с большими угловыми скоростями.

Пусть невозмущенное движение представляет собой колебания с малой амплитудой. В этом случае в качестве малого параметра задачи удобно выбрать величину $k_1 = \sin\beta/2$ (где β — амплитуда колебаний). Используя известные разложения эллиптических функций [15], из (17) имеем

$$K_2 = \frac{1}{2}q_2^2 + \frac{1}{2}\alpha p_2^2 + O(k_1^2), \tag{33}$$

$$\begin{aligned} K_4 = &-\frac{1}{192}\,(11 + 48\cos 2\,w)\;{q_2}^4 + \frac{1}{4}\,(1 - 2\,\alpha)\;\sin 2\,w\,p_2\,{q_2}^3 + \\ &+\frac{1}{32}\,(-4 + 7\,\alpha + 4\,(1 - 4\,\alpha)\;\cos 2\,w)\;{p_2}^2\,{q_2}^2 + \frac{1}{4}\,\alpha\,(1 - 2\,\alpha)\sin 2\,w\,{p_2}^3\,q_2 - \\ &-\frac{1}{64}\,\alpha\,(\,8 - 15\,\alpha - 8\,(1 - 2\,\alpha)\cos 2\,w)\;{p_2}^4 + O(k_1^2). \end{aligned} \tag{34}$$

При $k_1 = 0$ линейная система с гамильтонианом (33) является автономной и описывает гармонические колебания с частотой $\Omega_0 = \sqrt{\alpha}$. Поскольку $1/3 \leqslant \alpha < 1$, то величина Ω_0 не равна целому числу. Это означает, что при $0 < k_1 \ll 1$ в линейной системе с π-периодическим по w гамильтонианом (33) не возникает параметрического резонанса [16] и положение равновесия $q_2 = p_2 = 0$ устойчиво в линейном приближении, что согласуется с результатами численного анализа.

Чтобы исследовать устойчивость положения равновесия в полной нелинейной системе, необходимо привести гамильтониан (16) к нормальной форме до членов четвертой степени и применить известный критерий устойчивости [11]. При этом нерезонасный и резонансный случаи следует рассмотреть отдельно.

Выполним сначала унивалентную каноническую замену переменных по формулам

$$q_2 = \alpha^{\frac{1}{4}}\sqrt{2r}\sin\varphi, \quad p_2 = \alpha^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2r}\cos\varphi. \tag{35}$$

В новых переменных имеем

$$K_2 = \Omega_0 r + O(k_1^2), \tag{36}$$

$$K_4 = r^2\Phi(\varphi, w) + O(k_1^2), \tag{37}$$

$$\begin{gathered}\Phi(\varphi, w) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\,\alpha + \frac{1}{4}(1-4\alpha)\cos 2\,w - \frac{1}{12}(3-7\,\alpha)\cos 2\,\phi - \frac{1}{48}\,\alpha\cos(4\,\phi) + \\ + \frac{1}{8}(1+2\sqrt{\alpha}(1-2\,\alpha))\cos(2\,\phi - 2\,w) + \frac{1}{8}(1-2\sqrt{\alpha}(1-2\,\alpha))\cos(2\,\phi + 2\,w).\end{gathered} \tag{38}$$

При помощи близкой к тождественной, аналитической по k, линейной по $\sqrt{r}$, π-периодической по w и 2π-периодической по φ канонической замены переменных $r, \varphi \to \rho, \vartheta$ можно исключить зависимость K_2 от w и привести к гамильтониан системы (19) виду

$$\Gamma = \Omega\rho + \rho^2 F(\vartheta, w, k_1) + O(\rho^3). \tag{39}$$

Указанная замена переменных задается сходящимися по степеням малого параметра k_1 рядами. Коэффициенты при любой конечной степени k_1 в этих рядах можно определить, например, методом Биркгофа [11,17] или методом Депри–Хори [18]. При данной замене переменных явно выписанные в (36) и (37) члены нулевой и первой степени по k_1 сохраняются неизменными, так что в (39) постоянная величина Ω и функция $F(\vartheta, w, k_1)$ определяются равенствами

$$\Omega = \Omega_0 + O(k_1^2), \qquad F(\vartheta, w, k_1) = k_1\Phi(\vartheta, w) + O(k_1^2). \tag{40}$$

Поскольку гамильтониан (39) π–периодически зависит от w, то при выполнении равенства

$$m\Omega = 2n, \qquad m, n \in \mathbb{N}, \tag{41}$$

в соответствующей канонической системе имеет место резонанс. В случае резонанса нормальная форма гамильтониана содержит дополнительные (резонансные) члены, поэтому резонансные случаи следует рассматривать отдельно.

При нормализации гамильтониана до членов степени ρ^2 включительно необходимо учитывать лишь резонансы не выше четвертого порядка ($m \leqslant 4$). Резонансы более высокого порядка в данном приближении не проявляются. Функция Гамильтона (39) не содержит членов порядка $\rho^{3/2}$, а это означает, что и ее нормальная форма, вычисленная до членов порядка ρ^2 включительно, не будет содержать членов, отвечающих резонансу третьего порядка $3\Omega = 2n$. Заметим, наконец, что при $k_1 \ll 1$ резонансы первого и второго порядков, отвечающие границам областей параметрического резонанса, а также резонанс четвертого порядка невозможны в силу выполнения неравенства $1/3 \leqslant \alpha < 1$. Таким образом, в случае колебаний с малыми амплитудами при любых допустимых значениях параметра α подходящим выбором канонических переменных гамильтониан (39) можно привести к следующей нормальной форме

$$\Gamma = \Omega R + c_2 R^2 + \widetilde{\Gamma}(R, \psi, w, k_1), \tag{42}$$

где

$$c_2 = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} F(\vartheta, w, k_1)dwd\vartheta. \tag{43}$$

Замена переменных $\rho, \vartheta \to R, \psi$, приводящая гамильтониан (39) к виду (42), является близкой к тождественной аналитической по k_1 и ρ, π–периодической по w и 2π–периодической по φ, она может быть построена, например, методом Биркгофа или методом Деприи–Хори.

Вычисления показывают, что

$$c_2 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\alpha + O(k_1^2). \tag{44}$$

Если $\alpha \neq 3/2$, то при достаточно малых k_1 величина $c_2 \neq 0$, поэтому на основании теоремы Арнольда–Мозера [19, 20] положение равновесия системы (19) устойчиво по Ляпунову. Последнее означает, что колебания с достаточно малыми амплитудами орбитально устойчивы. Если же $\alpha = 3/2$, то для решения вопроса об устойчивости малых колебаний требуется дополнительный анализ с учетом членов выше четвертой степени по q_2 и p_2 в гамильтониане (16). Такой анализ здесь не проводится.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда невозмущенное движение представляет собой вращения с достаточно большой средней угловой скоростью вращения. Здесь в качестве малого параметра задачи выберем величину $k_2 = \sqrt{2}(1+h)^{-1/2}$, введенную в § 2.

Выполним унивалентную каноническую замену переменных

$$x = \frac{k_2^{1/2}}{\sqrt{2}}\, q_2, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{k_2^{1/2}}\, p_2\,. \tag{45}$$

и, аналогично случаю колебаний с малыми амплитудами, выпишем первые члены разложений форм K_2 и K_4 в сходящиеся при $k_2 \ll 1$ ряды

$$\begin{aligned} K_2 =&\frac{1}{8}\left(1+2\alpha+(1-2\alpha)\cos 2w\right)\, x^2 + \frac{1}{4}\left(2\,\alpha-1\right)\,\sin 2w\, y\, x+ \\ &+\frac{1}{8}\left(1+2\alpha-(1-2\alpha)\cos 2w\right)\, y^2 + O(k_2^2), \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} K_4 = k_2 \big\{ &\big(37+92\,\alpha-108\,\alpha^2+4\,(18\,\alpha-7)\,(2\,\alpha-1)\,\cos 2\,w-9\,(2\,\alpha-1)^2\,\cos 4\,w\big)\; x^4 - \\ &-8\,(2\,\alpha-1)\,(12\,\alpha\,\sin 2\,w-6\,\alpha \sin 4\,w-2\sin 2\,w+3\sin 4\,w)\,y\,x^3- \\ &-6\,(3+4\,\alpha+12\,\alpha^2-3\,(2\,\alpha-1)^2\cos 4\,w)\,y^2\,x^2+ \\ &+3\,(3+4\,\alpha+12\,\alpha^2+4\,(4\,\alpha^2-1)\cos 2\,w+\,(2\,\alpha-1)^2\cos 4\,w)\,y^4\big\} + O(k_2^3). \end{aligned} \tag{47}$$

Каноническая замена переменных переменных

$$x = \xi\sqrt[4]{2-2\alpha}\sin w + \eta\frac{\cos w}{\sqrt[4]{2-2\alpha}}, \quad y = \xi\sqrt[4]{2-2\alpha}\cos w - \eta\frac{\sin w}{\sqrt[4]{2-2\alpha}} \tag{48}$$

с валентностью, равной -1, приводит квадратичную часть гамильтониана к виду

$$K_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}(\xi^2+\eta^2) + O(k_2^2). \tag{49}$$

Гамильтониан (49) 2π–периодически зависит от w, поэтому при значениях α, близких к $1/2$, в соответствующей линейной системе возникает параметрический резонанс, приводящий к ее неустойчивости. Границы области параметрического резонанса получены аналитически в §4. Вне области параметрического резонанса при помощи канонической замены переменных $\xi, \eta \to \vartheta, \rho$ можно исключить зависимость K_2 от w и привести гамильтониан к виду (39), в котором величина Ω задается равенством

$$\Omega = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} + O(k_2^2). \tag{50}$$

Замена переменных $\xi, \eta \to \vartheta, \rho$ является аналитической по k, линейной по $\sqrt{\rho}$, 2π–периодической по w и ϑ.

Помимо параметрического резонанса в случае вращений возможен резонанс четвертого порядка $\Omega = 1/4$, для которого анализ устойчивости следует проводить отдельно.

Вне области параметрического резонанса и резонансной кривой, отвечающей резонансу четвертого порядка $\Omega = 1/4$, подходящим выбором канонических переменных ψ, R гамильтониан (39) можно привести к нормальной форме (42), в которой, как показали вычисления,

$$c_2 = -\frac{k_2}{16} + O(k_2^3).$$

При достаточно малых значениях k_2 коэффициент $c_2 \neq 0$, поэтому на основании теоремы Арнольда–Мозера [19, 20] положение равновесия системы (19) устойчиво по Ляпунову.

Кроме того, поскольку при достаточно малых значениях k_2 коэффициент $c_2 < 0$, то на основании результатов работы [21] можно сделать вывод о неустойчивости положения равновесия на левой границе (где $\alpha < 1/2$) области параметрического резонанса и его устойчивости по Ляпунову на правой границе (где $\alpha > 1/2$) (см. рис. 1).

Случай резонанса четвертого порядка требует отдельного исследования. В этом случае подходящим выбором канонических переменных ψ, R гамильтониан (39) можно привести к следующей нормальной форме

$$\Gamma = \Omega R + [c_2 + a\cos(4\psi - w) + b\sin(4\psi - w)]R^2 + \widetilde{\Gamma}(R, \psi, w, k_1), \tag{51}$$

где

$$\begin{aligned} a =& \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\vartheta, w, k_1)\cos(4\vartheta - w)\,dw\,d\vartheta, \\ b =& \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\vartheta, w, k_1)\sin(4\vartheta - w)\,dw\,d\vartheta, \end{aligned} \tag{52}$$

а коэффициент c_2 вычисляется по формуле

$$c_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\vartheta, w, k_1) dw\,d\vartheta. \tag{53}$$

Положение равновесия системы (19) устойчиво по Ляпунову, если выполнено неравенство $c_2 > \sqrt{a^2 + b^2}$, и неустойчиво, если $c_2 < \sqrt{a^2 + b^2}$ [11].

Вычисления показывают, что

$$a = O\left(k_2^3\right), \quad b = O\left(k_2^3\right), \tag{54}$$

поэтому при достаточно малых k_2 неравенство $c_2 > \sqrt{a^2 + b^2}$ выполнено и положение равновесия системы (19) устойчиво по Ляпунову.

Таким образом, вне области параметрического резонанса и ее левой границы, вращения с достаточно большими угловыми скоростями орбитально устойчивы.

6. Нелинейный анализ устойчивости

При произвольных значениях параметров нелинейный анализ устойчивости в областях I, II, III и на границах $\gamma_2^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ будем проводить, следуя методике, разработанной в [22]. Суть данной методики состоит в построении симплектического отображения, порождаемого системой уравнений (19), и исследовании устойчивости его неподвижной точки. Задача об устойчивости неподвижной точки данного отображения эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия системы (19).

Пусть $q_2^{(0)}, p_2^{(0)}$ — начальные значения переменных q_2, p_2, а $q_2^{(1)}, p_2^{(1)}$ — их значения при $w = T$. Тогда, согласно [22], искомое симплектическое отображение имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} q_2^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{matrix} \right\| = \mathbf{X}(T) \left\| \begin{matrix} q_2^{(0)} - \dfrac{\partial S_4}{\partial p_2^{(0)}} + O_4 \\ p_2^{(0)} + \dfrac{\partial S_4}{\partial q_2^{(0)}} + O_4 \end{matrix} \right\|, \tag{55}$$

где $S_4 = \Phi_4(q_2^{(0)}, p_2^{(0)}, T)$, а $\Phi_4(q_2^{(0)}, p_2^{(0)}, w)$ — форма четвертой степени, удовлетворяющая равенству

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial w} = -G_4\,. \tag{56}$$

Причем $G_4(q_2^{(0)}, p_2^{(0)}, w)$ — форма, которая получается из $K_4(q_2, p_2, w)$ в результате замены переменных

$$q_2 = x_{11}(w) q_2^{(0)} + x_{12}(w) p_2^{(0)}, \quad p_2 = x_{21}(w) q_2^{(0)} + x_{22}(w) p_2^{(0)}. \tag{57}$$

Приравняв коэффициенты при равных степенях в левой и правой частях равенства (56), получим пять обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов формы Φ_4. Правые части этих уравнений зависят от $x_{ij}(w)$, которые, в свою очередь, определяются в результате решения линейной системы (20). Таким образом, интегрируя систему из девяти уравнений (пять уравнений для коэффициентов формы Φ_4 и четыре уравнения для величин $x_{ij}(w)$) на интервале $[0; T]$, можно определить значения коэффициентов формы S_4. В общем случае интегрирование данной системы нужно проводить численно.

Выполним замену переменных

$$q_2 = n_{11} Q + n_{12} P, \quad p_2 = n_{21} Q + n_{22} P, \tag{58}$$

нормализующую линейную часть отображения (55). Если $|\varkappa| < 1$, то коэффициенты n_{ij} можно вычислить по формулам [22]

$$n_{11} = x_{12}(T), \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = (\varkappa - x_{11}(T)), \quad n_{22} = \sqrt{1 - \varkappa^2}. \tag{59}$$

В новых переменных отображение примет вид

$$\left\|\begin{matrix} Q^{(1)} \\ P^{(1)} \end{matrix}\right\| = \mathbf{G}\left\|\begin{matrix} Q^{(0)} - \dfrac{\partial F_4}{\partial P^{(0)}} + O_4 \\ P^{(0)} + \dfrac{\partial F_4}{\partial Q^{(0)}} + O_4 \end{matrix}\right\|, \tag{60}$$

где $F_4(Q^{(0)}, P^{(0)}) = cS_4(n_{11}Q^{(0)} + n_{12}P^{(0)}, n_{21}Q^{(0)} + n_{22}P^{(0)})$, а c — валентность преобразования (58), вычисляемая по формуле $c = (n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12})^{-1}$.

Нормализованная линейная часть отображения (60) задается матрицей

$$\mathbf{G} = \left\|\begin{matrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix}\right\| \tag{61}$$

и представляет собой поворот на угол $\alpha = \mathrm{acrcos}\varkappa$.

Пусть в системе (19) нет резонансов до четвертого порядка включительно, т. е. корни характеристического уравнения (21) удовлетворяют неравенству $\rho^k \neq 1$ (где $k \in \{1, 2, 3, 4\}$). Введем обозначения:

$$\sigma = 3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}, \quad \sigma_1 = f_{22} - f_{40} - f_{04}, \quad \sigma_2 = f_{13} - f_{31},$$

где f_{ij} — коэффициенты формы F_4.

При выполнении неравенства $\sigma \neq 0$ неподвижная точка отображения (55) устойчива [22].

Резонансные случаи требуют отдельного исследования. В нашей задаче возможны резонансы второго и четвертого порядка. Резонанс четвертого порядка имеет место на кривой γ_4, лежащей в области III. В случае резонанса четвертого порядка устойчивость неподвижной точки имеет место, если выполнено неравенство $|\sigma| > \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, если же $|\sigma| < \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, то неподвижная точка неустойчива [22].

Резонансы второго порядка имеют место на границах $\gamma_2^{(i)}$ $i = 1, 2, 3$, где $\varkappa = -1$, а элементарные делители матрицы $\mathbf{X}(T)$ не простые. В этом случае коэффициенты нормализующего преобразования (58) выбираются следующим образом:
если $x_{12}(T) \neq 0$, $x_{21}(T) = 0$, то

$$n_{11} = \sqrt{|x_{12}(T)|}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = 0, \quad n_{22} = \sqrt{|x_{12}(T)|}/x_{12}(T);$$

если $x_{12}(T) = 0$, $x_{21}(T) \neq 0$, то

$$n_{11} = 0, \quad n_{12} = \sqrt{|x_{21}(T)|}/x_{21}(T), \quad n_{21} = \sqrt{|x_{21}(T)|}, \quad n_{22} = 0.$$

При этом линейная часть отображения (60) приводится к нормальной форме, определяемой матрицей

$$\mathbf{G} = \left\|\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}\right\|. \tag{62}$$

Неподвижная точка отображения (55) будет устойчива при выполнении неравенства $f_{40} > 0$ и неустойчива, если выполнено неравенство $f_{40} < 0$ [22].

В рассматриваемой задаче приведенные выше критерии устойчивости были проверены численно. Оказалось, что в областях I (за исключением кривой Γ), II и III (включая и резонансную кривую γ_4), а также на границах $\gamma_2^{(i)}$ $(i = 1, 3)$ (см. рис. 1) неподвижная точка отображения (55) устойчива. Последнее означает орбитальную устойчивость соответствующих периодических движений твердого тела. На границе $\gamma_2^{(2)}$ неподвижная точка отображения (55) неустойчива, что означает орбитальную неустойчивость соответствующих плоских вращений твердого тела. На кривой Γ величина σ обращается в нуль, и вопрос об устойчивости остается открытым. В этом случае для получения строгих выводов об устойчивости требуется провести нелинейный анализ с учетом членов выше четвертой степени в гамильтониане (16).

Благодарности

Автор хотел бы выразить глубокую благодарность профессору А. П. Маркееву (Институт проблем механики, РАН), который привлек его внимание к данной проблеме. Автор также очень благодарен профессору Себастьяну Вальхеру (Sebastian Walcher) за полезные обсуждения результатов и гостеприимство, оказанное в Техническом университете г. Аахен, Германия. Данная работа была выполнена при финансовой поддержке Германской службы академических обменов (DAAD), Российского фонда фундаментальных исследований (грант №02-01-00831) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ–7944.2006.1).

Список литературы

[1] Маркеев А. П. Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 592 с.

[2] Бобылев Д. К. Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1896, т. 8, вып. 2, с. 21–25.

[3] Стеклов В. А. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, 1896, т. 8, вып. 2, с. 19–21.

[4] Кузьмин П. А. Частные виды движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки (в трудах русских ученых) // Тр. Казан. авиац. ин-та, 1953, т. 27, с. 91–121.

[5] Докшевич А. И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 168 с.

[6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. М.–Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2005. 575 с.

[7] Иртегов В. Д. Об устойчивости маятниковых колебаний гироскопа С. В. Ковалевской // Тр. Казан. авиац. ин-та, 1968, вып. 97, с. 38–40.

[8] Брюм А. З. Исследование орбитальной устойчивости при помощи первых интегралов // ПММ, 1989, т. 53, вып. 6, с. 873–879.

[9] Маркеев А. П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ, 2001, т. 65, вып. 1, с. 51–58.

[10] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.

[11] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М: Наука, 1978. 312 с.

[12] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

[13] Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.–Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1955. 655 с.

[14] Kovacic J. J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // J. Symbolic Comput., 1986, vol. 2, pp. 3–43.

[15] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

[16] Якубович В. Я., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.

[17] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1999, 408 с.

[18] Giacaglia G. E. O. Perturbation methoda in non-linear systems. New York: Springer, 1972. [Джакалья Г. Е. О. Методы возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.]

[19] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук, 1963, т. 18, вып. 6(114), с. 91–192.

[20] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.

[21] Маркеев А. П. О поведении нелинейной гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границе области параметрического резонанса // ПММ, 1995, т. 59, вып. 4, с. 569–580.

[22] Маркеев А. П. Об одном способе иследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // Изв. РАН. МТТ, 2004, № 6, с. 3–12.