

Статистическая механика релятивистского газа в отрезке*

В. В. Васькин*, **Н. Н. Ермакова****

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: vaskin@udsu.ru*, sernadya@yandex.ru**

Получено 10 ноября 2009 г.

Данная работа является продолжением описанного ранее компьютерного эксперимента [1] над системой частиц одномерного газа в отрезке. В настоящей статье приведены результаты исследования статистических свойств релятивистского газа в отрезке. Показано, что данная система приходит в состояние термодинамического равновесия, функция распределения которого определяется релятивистской энергией частиц. Проведена аналогия системы частиц в отрезке с бильярдом в многоугольнике.

Ключевые слова: релятивистский газ, термодинамическое равновесие, одномерный газ в отрезке, бильярды, распределение Больцмана

V. V. Vaskin N. N. Erdakova

Statistical mechanics of relativistic gas in a one-dimensional tube

This study is the continuation of the computer experiment [1] with particles of gas in a one-dimensional tube, described earlier. In this paper we give investigation results for the statistical properties of a relativistic gas in a one-dimensional tube. It is shown that this system reaches the state of thermodynamical equilibrium whose distribution function is determined by the relativistic energy of particles. The system of particles in a one-dimensional tube is described by analogy with the billiards in a polygon.

Keywords: relativistic gas, thermodynamical equilibrium, gas in a one-dimensional tube, Boltzmann distribution

Mathematical Subject Classifications: 37A60, 68U20

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 09-01-00791-а, 09-01-12151-офи_м) и Государственного контракта (№ 02.740.11.0195) на выполнение научно-исследовательских работ по теме: «Научно-образовательный центр «Регулярная и хаотическая динамика»».

Введение

Механизм прихода динамических систем к состоянию термодинамического равновесия до сих пор остается не до конца понятным. Существует несколько теоретических предположений о механизмах релаксации систем. Одно из них связано с *гипотезой эргодичности*, утверждающей, что все состояния с одинаковой энергией равновероятны [8, 12], в связи с чем для подсистем выводится каноническое распределение Гиббса. Тем не менее, известно, что существуют не эргодические системы [9], поэтому свойство эргодичности не является универсальным для динамических систем. Другое предположение связано с *гипотезой молекулярного хаоса*, утверждающей, что приход системы к термодинамическому равновесию сопровождается потерей динамической памяти, необратимостью системы во времени [6]. Наиболее математически обоснованным является предположение, связанное с концепцией прихода систем в состояние статистического равновесия в некотором «слабом пределе» [3], но существуют примеры, в которых статистическое равновесие, установившееся в системах в «слабом пределе», не является термодинамическим.

Также по вопросам установления статистического и термодинамического равновесия в динамических системах см. [14, 15].

Ясно, что значительную роль в процессе релаксации играет характер взаимодействия между частицами системы. Больцман попытался описать процесс прихода динамических систем в состояние термодинамического равновесия с помощью кинетического уравнения [10]. Но в связи с рядом допущений при выводе, как показал Цермело [16], уравнение утратило обратимость во времени, свойственную динамическим процессам.

Кроме того, в связи с экспоненциальной зависимостью нормального распределения от квадрата скорости (распределение Гаусса) создается впечатление, что в процессе релаксации значительную роль играет *центральная предельная теорема* [2], заимствованная из теории вероятностей и применяемая в статистической физике из соображений большого числа частиц в рассматриваемых системах.

В предыдущей работе [1], где различные модели одномерного *нерелятивистского* идеального газа в отрезке рассматривались с точки зрения численного эксперимента, было показано, что система невзаимодействующих частиц, упруго отражающихся от концов отрезка, приходит только в статистическое, но не тепловое равновесие. Добавление к системе колеблющейся стенки, на первый взгляд являющейся моделью термостата для частиц, также не привело к установлению теплового равновесия. Однако, при введении в систему невзаимодействующих частиц одной частицы отличной массы, рассеивающейся с остальными частицами газа согласно законам сохранения энергии и импульса, компьютерный эксперимент показал, что газ в отрезке приходит к термодинамическому равновесию, о чем нам говорит вид одночастичной функции распределения по импульсам, совпадающий с распределением Максвелла $\rho = Ce^{-\frac{p^2}{2\langle\varepsilon\rangle}}$ при соответствующем значении средней энергии $\langle\varepsilon\rangle = T$, и нулевые значения высших неприводимых моментов системы (1.1).

Добавление к такой системе однородного гравитационного поля привело к установлению распределения Больцмана по координатам $\rho = Ce^{-\frac{mgh}{T}}$, при условии, что почти все частицы участвуют в столкновениях с поршнем (в перераспределении энергии и импульса).

Кроме того, для этой системы был проведен эксперимент, связанный с вопросом обратимости системы во времени. Многие динамические системы, заведомо обратимые во времени, при численном интегрировании могут терять свойство обратимости за счет накопления ошибок для хаотических траекторий. Компьютерный эксперимент показал, что

данная система обратима на достаточно больших временах, в том числе после установления теплового равновесия.

В настоящей работе мы хотим обобщить результаты предыдущего исследования на случай *релятивистского* газа и показать, что при сохранении обратимости система приходит в состояние термодинамического равновесия, определяемого релятивистской энергией частиц системы.

Отметим, что исследование достижения равновесия в релятивистском газе с точки зрения броуновского движения выполнено в работе [11] (см. также ссылки в этой работе).

1. Модель и статистическое описание одномерного газа

Рассмотрим систему многих частиц на отрезке, которые не сталкиваются между собой и упруго отражаются от концов отрезка (одномерный газ в отрезке). Дополним систему, разделив газ частицей (поршнем) конечной массы M , сравнимой по величине с массой m отдельной частицы, соударяющейся с остальными частицами согласно *релятивистским* законам сохранения энергии и импульса:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2,$$

$$\sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4} + \sqrt{p_2^2 c^2 + M^2 c^4} = \sqrt{p_1'^2 c^2 + m^2 c^4} + \sqrt{p_2'^2 c^2 + M^2 c^4},$$

где p_1, p'_1, m — импульс (до и после рассеяния) и масса частицы, p_2, p'_2, M — импульс (до и после рассеяния) и масса поршня.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Впервые модель одномерного газа без поршня рассмотрел Пуанкаре [7], в дальнейшем более полное исследование было проведено Козловым [4].

В любой момент времени состояние системы описывается координатами и импульсами $x_i(t), p_i(t), i = 1, \dots, N$, которые рассчитываются на основании уравнений движения (без каких-либо дополнительных допущений) и упругого соударения частиц и поршня. Использование аналитических законов движения для частиц и поршня между соударениями позволяет проводить вычисления траекторий движения с произвольно заданной точностью.

Для статистического описания релятивистского газа мы используем подход Больцмана, основанный на построении одночастичной функции распределения $w_t(x, p)$. Для этого вся плоскость переменных (x, p) разбивается на ячейки, в данном случае прямоугольники со сторонами $\Delta x, \Delta p$, так что величина

$$N(\Delta x, \Delta p) = N w_t(x, p) \Delta x \Delta p$$

определяет число частиц, попавших в соответствующую ячейку в момент времени t . Кроме того, рассматриваются отдельно распределения по координатам и импульсам

$$\hat{w}_t(x) = \int w_t(x, p) dp, \quad \hat{w}_t(p) = \int w_t(x, p) dx.$$

Во многих случаях для контроля за приходом системы к состоянию равновесия удобно использовать неприводимые моменты K_n системы, определяемые как:

$$K_1 = M_1 = \langle x \rangle, \quad K_2 = M_2 - M_1^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \dots \quad (1.1)$$

и выражаемые через моменты координат и импульсов $M_n = \int x^n \omega_t(x) dx$. Система достигает статистического равновесия, когда моменты перестают меняться со временем. В частности, для нормального распределения отличны от нуля только первые два неприводимых момента ($K_{n>2} = 0$). Таким образом, вычисление неприводимых моментов равновесного состояния позволяет судить о близости распределения к нормальному.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теоретических исследованиях и аналитических оценках используется подход Гиббса, основанный на функции распределения по координатам и импульсам всех частиц

$$\rho_t(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \rho_t(x_1, p_1 \dots x_N, p_N);$$

существующие компьютеры не позволяют выполнить прямое моделирование динамики этого распределения с приемлемым числом частиц.

2. Результаты эксперимента

Проведя компьютерный эксперимент над системой частиц релятивистского газа, мы получили следующие результаты.

1. Данная динамическая система асимптотически ($t \rightarrow \infty$) приходит к состоянию термодинамического равновесия. Состояние равновесия характеризуется равномерным распределением частиц по координатам и релятивистской функцией распределения Больцмана (Гиббса) по импульсам:

$$w_B(p) = C_B e^{-\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{T_B}}. \quad (2.1)$$

Здесь $C_B = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{T_B}} dp \right)^{-1}$ — нормировочная константа равновесного распределения, T_B — температура системы, найденная из равенства энергий начального и равновесного состояний:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} w_0(p) dp = C_B \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} e^{-\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{T_B}} dp.$$

На рисунках (рис. 1 и рис. 2) приведены полученные одночастичные функции распределения $w_t(p)$ при различных начальных условиях и соответствующие функции

Гаусса $w_G(p) = C_G e^{-\frac{p^2}{2T_G}}$ и Больцмана $w_B(p) = C_B e^{-\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{T_B}}$, где C_G и T_G — нормировочная константа и температура системы, вычисленные из предположения, что равновесное распределение гауссово. Видно, что полученное в ходе моделирования одночастичное распределение $w_t(p)|_{t \rightarrow \infty}$ совпадает с распределением Больцмана (2.1) и не совпадает с распределением Гаусса $w_G(p)$.

2. Для системы частиц релятивистского газа был проведен компьютерный эксперимент, иллюстрирующий обратимость данной системы во времени с любой заданной точностью. В некоторый момент времени t эволюции системы (в том числе после установления теплового равновесия) скорости частиц системы заменялись на обратные $v_i(t) = -v_i(t)$. Эксперимент показал, что газ собирается в исходное (начальное) состояние.



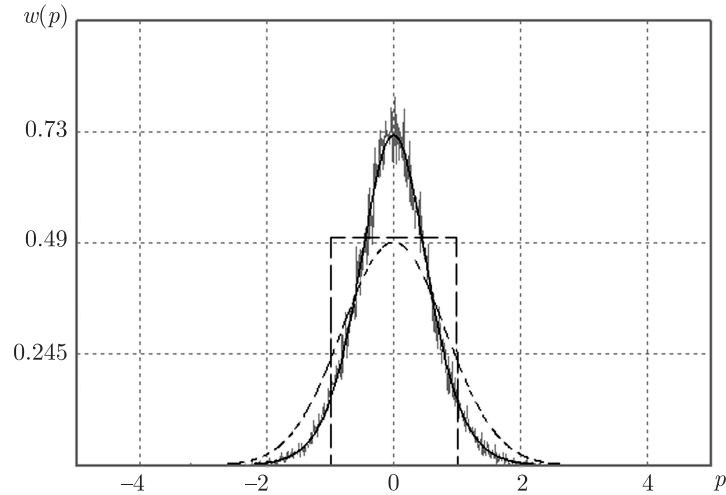


Рис. 1. Полученное одночастичное распределение по импульсам $w_t(p)$. Пунктиром изображены начальное распределение $w_0(p)$, равномерное на отрезке $[-1, 1]$, и функция Гаусса при соответствующем значении средней энергии $\langle \varepsilon \rangle = T_G$. Черным изображена функция Больцмана при соответствующем значении средней энергии релятивистского газа $w_B(p) = C_B e^{-\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{T_B}}$.

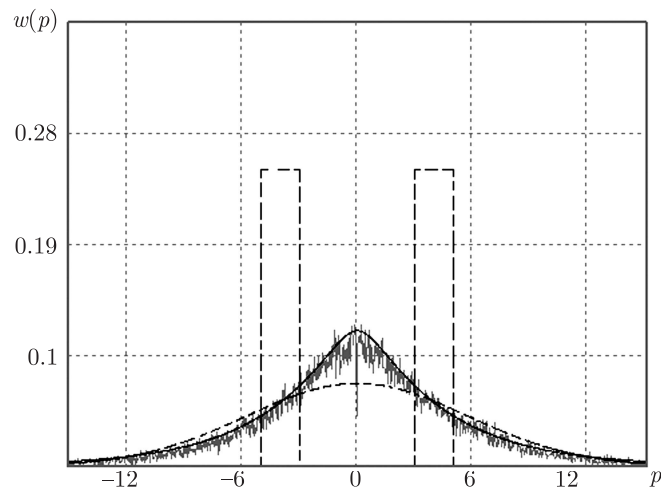


Рис. 2. Полученное одночастичное распределение по импульсам $w_t(p)$. Пунктиром изображены начальное распределение $w_0(p)$, равномерное на отрезках $[-5, -3] \cup [3, 5]$, и функция Гаусса при соответствующем значении средней энергии $\langle \varepsilon \rangle = T_G$. Черным изображена функция Больцмана при соответствующем значении энергии релятивистского газа $w_B(p) = C_B e^{-\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{T_B}}$.

Таким образом, обратимость системы во времени не противоречит возможности достижения термодинамического равновесия.

3. Аналогия с бильярдом

Любопытно отметить, что систему многих частиц с поршнем в отрезке можно рассматривать как многомерный бильярд с соответствующими условиями отражения от границ бильярда. Например, система, состоящая из двух невзаимодействующих частиц, разделенных поршнем, эквивалентна трехмерному бильярду с одной частицей внутри (рис. 3). Соответствующие проекции скорости этой воображаемой частицы равны скоростям соответствующих частиц в отрезке: первой частице соответствует проекция на ось OX_1 , второй — на ось OX_2 , поршню — проекция на ось OX_3 . В этом случае от двух граней (перпендикулярных осям OX_1 и OX_2) происходит обычное зеркальное отражение $p'_\tau = p_\tau$, $p'_n = -p_n$ (где $p_\tau, p'_\tau, p_n, p'_n$ — тангенциальная и нормальная составляющая импульса до и после соударения), а от двух диагональных граней — неупругое отражение согласно законам сохранения:

- для нерелятивистского удара: $p'_\tau = p_\tau$, $p'_n = -p_n - 2\frac{M-m}{M+m}p_\tau$ (см. [5]),
- для релятивистского удара: $p'_\tau = p_\tau$, $p'_n = Y(p_n, p_\tau)$, где явный вид функции Y определяется из решения уравнения

$$\sqrt{\frac{(Y+p_\tau)^2 c^2}{2} + m^2 c^4} + \sqrt{\frac{(p_\tau - Y)^2 c^2}{2} + M^2 c^4} - \sqrt{\frac{(p_n + p_\tau)^2 c^2}{2} + m^2 c^4} - \sqrt{\frac{(p_\tau - p_n)^2 c^2}{2} + M^2 c^4} = 0.$$

Для N частиц газа, разделенных поршнем, в отрезке имеем $(N + 1)$ -мерный бильярд.

Заметим, что аналогия с многомерным бильярдом в многограннике в некоторой степени объясняет отсутствие экспоненциального разбегания траекторий в этой системе. Действительно, известно, что для бильярдов в многоугольниках не существует хаотических траекторий [13].

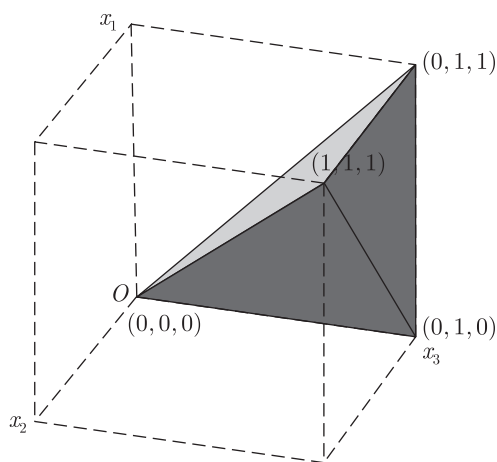


Рис. 3. Система трехмерного бильярда с одной частицей, эквивалентная системе двух частиц, разделенных поршнем, в отрезке $[0, 1]$.

Авторы благодарят А. В. Борисова и И. С. Мамаева за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Васькин В. В., Ердакова Н. Н., Мамаев И. С. Статистическая механика нелинейных динамических систем // *Нелинейная динамика*. — 2009. — Т. 5, № 3. — с. 385–402.
- [2] Крамер Г. Колмогоров А. Н. — Случайные величины и распределения вероятностей. — М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1947.
- [3] Козлов В. В. — Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика. — М.–Ижевск: РХД, 2008.
- [4] Козлов В. В. — Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. — М.–Ижевск: ИКИ, 2002.
- [5] Козлов В. В., Трещев Д. В. — Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. — М.: Изд-во Моск. ун-та. 1991.
- [6] Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. — М.: Прогресс, 1986.
- [7] Пуанкаре А. Замечания о кинетической теории газов. В. кн.: Избранные труды. Т. III. — М.: Наука. — 1974. — 385–412.
- [8] Хинчин А. Я. Математические основания статистической механики. — М.–Ижевск: РХД, 2003. (Оригинальное издание: — М.–Л.: — ОГИЗ-ГИТТЛ, 1943.)
- [9] Berman G. P., Izrailev F. M. The Fermi–Pasta–Ulam problem: Fifty years of progress. — *CHAOS* 15. 2005.
- [10] Boltzmann L. *Nature* 51. 413. 1895.
- [11] Dunkel J. Theory of relativistic Brownian motion: The (1 + 1)-dimensional case. // *Phys. Rev. E* 71. — 016124 — 2005. — 12 p.
- [12] Ehrenfest P., Ehrenfest T. Begriffliche Grundlagen der Statistischen Auffassung in der Mechanik. *Encyclopädie der Math. Wiss.* Bd. IV. 1911.
- [13] Katok A., Hasselblatt B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. — Cambridge: Cambridge University Press. 1995.
- [14] Kozlov V. V. Gibbs Ensembles, Equidistribution of the Energy of Sympathetic Oscillators and Statistical Models of Thermostat // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2008. — 13(3). — pp. 141–154.
- [15] Kozlov V. V. Kinetics of collisionless gas: Equalization of temperature, growth of the coarse-grained entropy and the Gibbs paradox // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2009. — 14(4–5). — pp. 535–540.
- [16] Zermelo E. Über einen Satz der Dynamik und der mechanischen Wärmetheorie. — *Wied. Ann.* 57. 1896.