

О динамике кусочно-линейной модели уравнения Свифта–Хоенберга

Л. М. Лерман^{1,2}, Н. А. Слинякова¹

¹Механико-математический факультет,

²НИИ прикладной математики и кибернетики,

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

lermanl@mm.unn.ru, nina_slinyakova@mail.ru

Получено 06 октября 2009 г.

Изучается кусочно-линейная модель известного в математической физике стационарного уравнения Свифта–Хоенберга, позволяющая получить в явном виде решения типа фронта, что влечет, в силу обратимости относительно двух инволюций соответствующей гамильтоновой системы, существование гетероклинического контура, связывающего два седло-фокуса. Используя методы символической динамики, дано описание всех решений, лежащих в окрестности контура на уровне гамильтониана, содержащего контур.

Ключевые слова: уравнение Свифта–Хоенберга, фронты, гетероклинический контур, гамильтонова система, седло-фокус, символическая динамика

L. M. Lerman, N. A. Slinyakova

On the dynamics of the piecewise-linear model of the Swift–Hohenberg equation

In this paper we study the piecewise-linear model of the stationary Swift–Hohenberg equation well known in mathematical physics, which provides explicit front type solutions. Due to the reversibility relative to two involutions of the corresponding Hamiltonian system, this involves the existence of a heteroclinic contour connecting two saddle-foci. Using methods of symbolic dynamics, we give a description of all solutions lying in the neighborhood of the contour at the level of the Hamiltonian containing the contour.

Keywords: Swift–Hohenberg equation, fronts, heteroclinic contour, Hamiltonian system, saddle focus, symbolic dynamics

Mathematical Subject Classifications: 34C37, 34C28, 70K44, 70K55

1. Введение

В работе изучается поведение траекторий кусочно-линейной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, полученной в качестве упрощенной модели обратимой гамильтоновой системы, к которой приводится известное в физике стационарное уравнение Свифта–Хоенберга (ниже — уравнение СХ) [13]. Для этой модельной системы, используя результаты из [12], мы получаем описание всех траекторий, лежащих в окрестности гетероклинического контура на уровне гамильтониана, содержащего контур. Траектории самого контура соответствуют фронтам в кусочно-линейном уравнении четвертого порядка (или — в другой терминологии — кинкам), связывающим два стационарных состояния. При этом удается получить весьма простое описание траекторий на языке символической динамики и надстроек над символической системой. Как показывает сравнение с численными результатами, полученными в [11], аналогичное поведение траекторий имеет место и в исходном стационарном уравнении СХ. Простые вариационные вычисления подтверждают тот факт, что симметричные фронты соответствуют минимуму функционала действия на классе решений, стабилизирующихся при $x \rightarrow \pm\infty$. Это позволяет надеяться на получение решений типа фронта для исходного уравнения СХ вариационными методами в духе работ [9, 14].

Обобщенное уравнение СХ

$$u_t = \alpha u + \beta u^2 - u^3 - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u \quad (1)$$

является одной из широко используемых моделей в различных разделах физики: в гидродинамике, нелинейной оптике, химии и т. д. [8, 13, 15, 16]. Поэтому его исследование представляет большой интерес. Мы изучаем стационарные решения этого уравнения (т. е. не зависящие от t), и в частности, стационарные фронты (т. е. такие, что при $x \rightarrow \pm\infty$ пределы $u(x)$ существуют и различны).

Стационарное уравнение СХ

$$u'''' + 2u'' - (\alpha - 1)u - \beta u^2 + u^3 = 0 \quad (2)$$

имеет тип высшего уравнения Эйлера–Лагранжа–Остроградского

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial u''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} + \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}u''^2 - u'^2 - \frac{(\alpha - 1)}{2}u - \frac{\beta}{3}u^3 + \frac{1}{4}u^4.$$

Введение новых переменных $u = q_1$, $u' = q_2$, $-(u' + u''') = p_1$, $u + u'' = p_2$ дает следующую гамильтонову систему с двумя степенями свободы

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = q_2, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 - q_1,$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = p_2 - \alpha q_1 - \beta q_1^2 + q_1^3, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -p_1$$

и гамильтонианом

$$H = p_1 q_2 - p_2 q_1 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{\alpha}{2}q_1^2 + \frac{\beta}{3}q_1^3 - \frac{1}{4}q_1^4.$$



Кроме свойства гамильтоновости, система является обратимой относительно инволюции $\sigma_1 : (q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (q_1, -q_2, -p_1, p_2)$ фазового пространства¹ (обратимость означает следующее свойство системы: если она имеет решение $X(x) = (q_1(x), q_2(x), p_1(x), p_2(x))$, то ее решением будет и $Y(x) = \sigma_1(X(-x)) = (q_1(-x), -q_2(-x), -p_1(-x), p_2(-x))$).

Полученная система может иметь до трех состояний равновесия, которые в зависимости от параметров α и β являются седло-фокусами (четверка комплексных собственных значений $\pm\rho \pm i\tau$), седло-центрами (пара чисто мнимых собственных значений и пара ненулевых вещественных) или эллиптическими точками (две пары различных чисто мнимых собственных значений). Для состояний равновесия, отличных от нулевого (последнее имеется при всех значениях параметров), их q_1 -координаты находятся как вещественные решения уравнения $q_1^2 - \beta q_1 + (\alpha - 1) = 0$. Отсюда и следует, что в системе может быть не более трех состояний равновесия.

Гетероклинические траектории, связывающие два состояния равновесия, соответствуют решениям типа фронта в исходном стационарном уравнении СХ, поэтому для их существования такие состояния равновесия гамильтоновой системы должны лежать в одном уровне гамильтониана (напомним, что значение гамильтониана постоянно вдоль решения автономной гамильтоновой системы). Нулевое состояние равновесия является седло-фокусом при отрицательных значениях параметра α . В плоскости параметров имеется кривая l , соответствующая тем значениям параметров, когда у соответствующей системы нулевое состояние равновесия лежит на том же уровне гамильтониана, что и другое, ненулевое, причем при отрицательном α это ненулевое состояние равновесия также является седло-фокусом. Эта кривая задается уравнением $2\beta^2 + 9(\alpha - 1) = 0$. Для значений параметров (α, β) , изменяющимся вдоль этой кривой, как показывают численные эксперименты, существуют гетероклинические траектории, связывающие два состояния равновесия [11]. При $(\alpha, \beta) \in l$, т. е. когда $\alpha = 1 - 2\beta^2/9$, замена переменных $q_1 \rightarrow q_1 - \beta/3$, $p_2 \rightarrow p_2 - \beta/3$ приводит систему к виду (чтобы не загромождать обозначения, мы сохраняем старые обозначения для новых переменных)

$$\begin{aligned} q_1' &= q_2 = H_{p_1}, & p_1' &= p_2 - (1 + \beta^2/9)q_1 + q_1^3 = -H_{q_1}, \\ q_2' &= p_2 - q_1 = H_{p_2}, & p_2' &= -p_1 = -H_{q_2}, \end{aligned}$$

и, соответственно, наше уравнение принимает вид

$$v'''' + 2v'' - (\beta^2/9)v + v^3 = 0. \quad (3)$$

Наличие параметров делает задачу нахождения нужных нам решений достаточно сложной. В работе [11] было получено предельное уравнение при $\beta \rightarrow \infty$, которое вообще не зависит от параметров. Тем самым оно дает асимптотическое приближение для уравнения (3) при больших β вдоль кривой l . Напомним вывод предельного уравнения. Для этого перемасштабируем переменные $v, x : v \rightarrow \kappa v, x \rightarrow \sigma x$. Тогда после деления на κ^2 получим

$$\frac{1}{\kappa^2 \sigma^4} v'''' + \frac{2}{\kappa^2 \sigma^2} v'' - \frac{\beta^2}{9\kappa^2} v + v^3 = 0.$$

Выберем $\sigma^2 = 3/\beta$, $\kappa = \beta/3$ и обозначим $\mu = 6/\beta$, тогда уравнение примет вид

$$v'''' + \mu v'' - v + v^3 = 0.$$

¹Под инволюцией мы понимаем диффеоморфизм пространства, квадрат которого является тождественным преобразованием.

Устремляя $\mu \rightarrow 0$ (т. е. $\beta \rightarrow \infty$), получим следующее предельное уравнение:

$$v'''' - v + v^3 = 0.$$

Это уравнение также можно преобразовать к гамильтоновой системе заменой переменных $v = Q_1$, $v' = Q_2$, $-v'''' = P_1$, $v'' = P_2$. Соответствующая система имеет вид

$$\dot{Q}_1 = Q_2, \quad \dot{Q}_2 = P_2, \quad \dot{P}_1 = -Q_1 + Q_1^3, \quad \dot{P}_2 = -P_1,$$

а ее гамильтониан равен $H_l = P_1 Q_2 + P_2^2/2 + Q_1^2/2 - Q_1^4/4$. Полученная система является обратимой уже относительно двух инволюций

$$\sigma_1 : (Q_1, Q_2, P_1, P_2) \rightarrow (Q_1, -Q_2, -P_1, P_2)$$

и

$$\sigma_2 : (Q_1, Q_2, P_1, P_2) \rightarrow (-Q_1, Q_2, P_1, -P_2).$$

Она имеет три состояния равновесия: одно в начале координат, являющееся седло-центром, и два симметричных относительно инволюции σ_2 состояния равновесия $(\pm 1, 0, 0, 0)$, являющиеся седло-фокусами.

Полученное предельное уравнение остается все еще достаточно сложным для исследования, поэтому для получения представления о возможном поведении решений уравнений такого типа рассмотрим еще более простое модельное уравнение. Для этого в уравнении

$$v^{(4)} + f(v) = 0, \tag{4}$$

где $f(v) = v^3 - v$, функцию f заменим кусочно-линейной функцией

$$f(v) = \begin{cases} 4(v+1), & v < 0, \\ 4(v-1), & v > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Как мы увидим ниже, для полученного модельного уравнения уже можно изучить все типы решений и дать их классификацию, используя результаты [12].

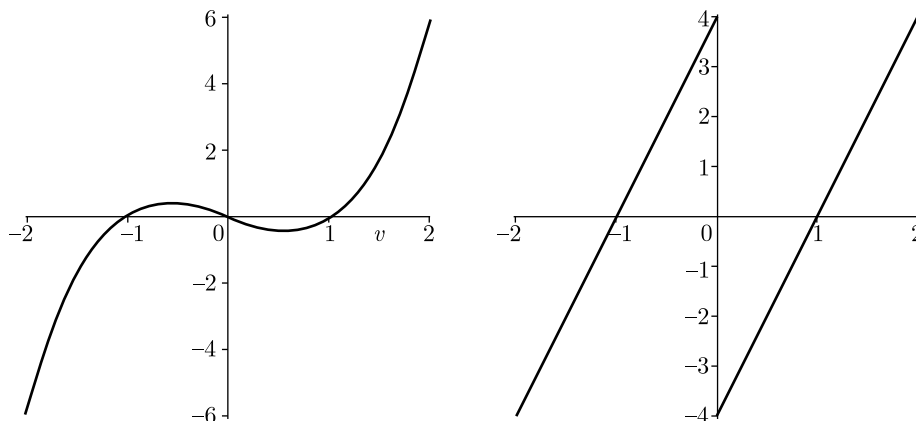


Рис. 1. Графики функций $f = -x + x^3$ и кусочно-линейной модели.

Для исследования уравнения (4) также перейдем к соответствующей системе дифференциальных уравнений первого порядка. Обозначим: $v = q_1$, $v' = q_2$, $v'' = p_2$, $-v'''' = p_1$.

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ \dot{q}_2 = p_2, \\ \dot{p}_1 = f(q_1), \\ \dot{p}_2 = -p_1, \end{cases} \quad (6)$$

где $f(q_1)$ соответствует (5). Данная система также является гамильтоновой, а ее (кусочно-гладкий) гамильтониан равен

$$H = p_1 q_2 + p_2^2/2 - 2q_1^2 + 4|q_1|. \quad (7)$$

Эта система также обратима относительно тех же двух инволюций σ_1, σ_2 (записанных в координатах (q, p)).

Полученная система дифференциальных уравнений является разрывной вдоль 3-плоскости $q_1 = 0$. Имея в виду непрерывность гамильтониана (7), условимся продолжать решения этой системы через плоскость разрыва по непрерывности для тех ее решений, которые пересекают плоскость разрыва без касания. Другие решения в данной работе рассматриваться не будут.

2. Состояния равновесия и гетероклинические траектории

Прежде чем доказывать существование решений различного типа, определим типы состояний равновесия и найдем их локальные устойчивые и неустойчивые многообразия, в пересечении которых должны лежать гетероклинические траектории. Состояния равновесия S_-, S_+ полученной системы имеют вид $(\pm 1, 0, 0, 0)$. В левом состоянии равновесия S_- матрица линеаризованной системы (в данном случае — полученной сдвигом начала координат в эту точку) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

характеристическим уравнением которой является $\lambda^4 + 4 = 0$, с корнями

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i \quad \lambda_{3,4} = -1 \pm i.$$

Таким образом, состояние равновесия имеет тип седло-фокус. Так как система обратима относительно инволюции σ_2 , то симметричное ему состояние равновесия $S_+ = (1, 0, 0, 0)$ также является седло-фокусом. Оба седло-фокуса лежат в одном уровне гамильтониана $H = 2$.

В окрестности каждого состояния равновесия типа седло-фокус имеется два двумерных многообразия — его устойчивое и неустойчивое многообразия: для точки $(-1, 0, 0, 0)$ обозначим их W_-^s, W_-^u , для точки $(1, 0, 0, 0)$ — W_+^s, W_+^u , они проходят через S_- и S_+ соответственно, и содержат траектории, стремящиеся к состояниям равновесия при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ соответственно. Поскольку движение вдоль траектории гамильтоновой системы сохраняет значение гамильтониана, то уровень гамильтониана $H = 2$ содержит эти 2-мерные многообразия, точнее — их части, лежащие в соответствующих полупространствах $q_1 < 0, q_1 > 0$.

Найдем эти многообразия и покажем, что состояния равновесия S_- и S_+ связаны парой гетероклинических траекторий, составляющих вместе с седло-фокусами гетероклинический контур, причем каждая гетероклиническая траектория симметрична относительно инволюции σ_2 , а гетероклинические траектории пары переставляются инволюцией σ_1 .

Вещественные инвариантные 2-мерные плоскости, соответствующие комплексно-сопряженным парам собственных значений матрицы A , имеют вид:

$$W_-^u = \begin{cases} q_2 = p_2/2 + q_1 + 1, \\ p_1 = -p_2 + 2q_1 + 2, \end{cases} \quad W_-^s = \begin{cases} q_2 = -p_2/2 - q_1 - 1, \\ p_1 = p_2 - 2q_1 - 2, \end{cases}$$

$$W_+^u = \begin{cases} q_2 = p_2/2 + q_1 - 1, \\ p_1 = -p_2 + 2q_1 - 2, \end{cases} \quad W_+^s = \begin{cases} q_2 = -p_2/2 - q_1 + 1, \\ p_1 = p_2 - 2q_1 + 2. \end{cases}$$

2.1. Существование гетероклинического контура

Покажем, что состояния равновесия S_- и S_+ связаны двумя гетероклиническими траекториями, составляющими вместе с седло-фокусами гетероклинический контур. Для этого найдем пересечение устойчивого многообразия точки S_+ с неустойчивым многообразием точки S_- . Мы даже покажем, что пересечение этих плоскостей в уровне $H = 2$ трансверсально вдоль гетероклинической траектории. Рассмотрим многообразия W_-^u и W_+^s . В силу симметрии этих плоскостей относительно инволюции σ_2 , рассмотрим их пересечение с 3-мерным подпространством $q_1 = 0$, которое, как нетрудно проверить, является трансверсальным для траекторий потока, кроме точек его двумерной плоскости $q_2 = 0$. Подставляя $q_1 = 0$ в уравнения многообразий, получаем две неколлинеарные прямые $W_-^u : \{q_2 = p_2/2 + 1, p_1 = -p_2 + 2\}$ и $W_+^s : \{q_2 = -p_2/2 + 1, p_1 = p_2 + 2\}$. Эти прямые лежат в двумерном множестве, являющемся пересечением уровня $H = 2$ с 3-плоскостью $q_1 = 0$, и пересекаются в нем трансверсально в точке $(0, 1, 2, 0)$. Таким образом, многообразия W_-^u и W_+^s пересекаются трансверсально в уровне $H = 2$ и можно говорить о существовании гетероклинической траектории, связывающей седло-фокусы S_- и S_+ . В силу обратимости системы относительно инволюции σ_1 , то же самое можно утверждать и для W_+^u и W_-^s , точка пересечения многообразий W_+^u и W_-^s есть $(0, -1, -2, 0)$. Следовательно, существует гетероклинический контур Γ , состоящий из двух гетероклинических траекторий и двух седло-фокусов (ниже мы указываем только первые координаты q_1 соответствующих траекторий, остальные получаются из формул замены):

$$\Gamma_1 = \{q_1 = e^x \cos(x) - 1, q_1 < 0 \cup q_1 = -e^{-x} \cos(x) + 1, q_1 > 0\}, \quad (8)$$

$$\Gamma_2 = \{q_1 = e^{-x} \cos(x) - 1, q_1 < 0 \cup q_1 = -e^x \cos(x) + 1, q_1 > 0\}, \quad (9)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup S_- \cup S_+. \quad (10)$$

3. Иллюстрация вариационного принципа

Вопрос о существовании гомо- и гетероклинических траекторий гамильтоновых систем является весьма сложным. Поскольку из существования таких траекторий (при некоторых условиях общего положения) можно извлечь большую информацию о структуре системы в целом (см. например [5–7, 11, 17]), то очень полезно иметь некоторые достаточные, проверяемые условия такого существования. Иногда такие условия можно получить, используя лагранжеву форму соответствующих уравнений, применяя вариационные принципы [4, 9, 14]. Было бы интересно получить результаты такого типа для уравнений (4) и (3).



Здесь мы только проиллюстрируем вариационный принцип на примере нашего простого уравнения (4) и соответствующей системы

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ \dot{q}_2 = p_2, \\ \dot{p}_1 = f(q_1), \\ \dot{p}_2 = -p_1, \end{cases} \quad \text{где } f(q_1) = \begin{cases} 4(q_1 + 1), & q_1 < 0, \\ 4(q_1 - 1), & q_1 > 0. \end{cases}$$

Ввиду того, что наша система обратима относительно инволюции σ_1 , ограничимся рассмотрением полупространства, где $q_1 \geq 0$. Состояние равновесия S_+ лежит на уровне гамильтониана $H = 2$, где $H = p_1 q_2 + p_2^2/2 - 2q_1^2 + 4q_1$, $q_1 > 0$. Тогда из соотношения $p_1 q_2 + p_2^2/2 - 2q_1^2 + 4q_1 = 2$ получаем

$$p_1 = \frac{4(q_1 - 1)^2 - p_2^2}{2q_2} = K.$$

Перейдем в системе к «новому времени» q_1 . Запишем

$$\begin{aligned} \frac{dq_2}{dq_1} &= \frac{p_2}{q_2} = -\frac{\partial K}{\partial p_2}, \\ \frac{dp_2}{dq_1} &= -\frac{4(q_1 - 1)^2 - p_2^2}{2q_2^2} = \frac{\partial K}{\partial q_2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Система (11) имеет гамильтонов вид с (неавтономным) гамильтонианом K . Найдем соответствующую этому гамильтониану функцию Лагранжа. Из первого уравнения (11) имеем $p_2 = q_2 q_2'$ (дифференцирование по q_1), т. е. $\partial L / (\partial q_2') = q_2 q_2'$, откуда получаем

$$L(q_2, q_2', q_1) = \frac{q_2 (q_2')^2}{2} + U(q_1, q_2).$$

Для этой функции Лагранжа соответствующий ей гамильтониан K_1 имеет вид

$$K_1 = p_2 q_2' - L = \frac{p_2^2}{2q_2} - U(q_1, q_2),$$

а уравнения Гамильтона —

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{\partial K_1}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dq_1} = -\frac{\partial K_1}{\partial q_2} = -\left[-\frac{p_2^2}{2q_2^2} - \frac{\partial U}{\partial q_2} \right].$$

Сравнивая с системой (11), получаем

$$U(q_1, q_2) = 2 \frac{(q_1 - 1)^2}{q_2}.$$

Теперь получаем, что интеграл в вариационном принципе имеет вид

$$J(q_2) = \int_0^1 \left(\frac{q_2 (q_2')^2}{2} + \frac{2(q_1 - 1)^2}{q_2} \right) dq_1.$$

Возвращаясь к «старому времени» x , получим, с учетом $dq_1(x) = q_2(x)dx$,

$$J(q_2) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}p_2^2 + 2(q_1 - 1)^2 \right) dx. \quad (12)$$

Подставим в (12) те решения системы, которые при $x = 0$ проходят через плоскость $q_1 = 0$ и при $x \rightarrow \infty$ стремятся к состоянию равновесия S_+ . Для них $p_2(x)$ и $q_1(x)$ имеют вид

$$q_1 = e^{-x} (-\cos(x) + b \sin(x)) + 1, \quad p_2 = -2e^{-x}(\sin(x) + b \cos(x)).$$

Подставляя, получаем

$$J = 2 \int_0^{\infty} e^{-2x} \left((b^2 + 1)(\sin^2 x + \cos^2 x) \right) dx = \frac{1 + b^2}{2}.$$

Отсюда видно, что минимум интеграла достигается на решении с $b = 0$, т. е. получаем правую половину симметричной гетероклинической траектории.

4. Траектории вблизи гетероклинического контура

Выше был построен гетероклинический контур Γ , соответствующий (10), где Γ_1 и Γ_2 — гетероклинические траектории, определяемые (8) и (9) и соединяющие два седло-фокуса S_- и S_+ . Пусть U — некоторая окрестность этого контура в фазовом пространстве. Изучим поведение траекторий, не покидающих данную окрестность и лежащих на уровне гамильтониана $H = 2$. Для их описания будем использовать отображение Пуанкаре. Выберем две симметричные относительно инволюции σ_1 двумерные секущие к траекториям потока, лежащие в пересечении 3-плоскости $\{q_1 = 0\}$ и уровня $\{H = 2\}$. Эти секущие являются двумерными дисками в окрестности следов на полуплоскости $q_1 = 0$ гетероклинических траекторий Γ_1 и Γ_2 соответственно. Эти секущие трансверсальны к траекториям потока как из полупространства $q_1 \leq 0$, так и из полупространства $q_1 \geq 0$, и поэтому к самим гетероклиническим траекториям. Обозначим эти секущие через D_1 и D_2 соответственно. Также будем рассматривать другие секущие к траекториям Γ_1 и Γ_2 . Две из них, N_1^s и N_1^u , будут принадлежать малой окрестности состояния равновесия S_- , а две другие, N_2^s и N_2^u , — малой окрестности состояния равновесия S_+ . Эти секущие будут указаны ниже. Отметим, что для любой траектории системы, начинающейся (при $x = 0$) на диске D_2 вблизи следа гетероклинической траектории Γ_2 и продолжающейся при возрастании x в полупространство $q_1 < 0$, затем проходящей в окрестности седло-фокуса S_- (и, следовательно, пересекающей секущие N_1^s и N_1^u), после чего пересекающей секущую D_1 , имеется симметричная относительно инволюции σ_2 траектория, которая при $x = 0$ начинается на секущей D_1 , идет в полупространство $q_1 \geq 0$, проходит около седло-фокуса S_+ и пересекает D_2 через то же время, что и первая траектория проходит от D_2 до D_1 .

Предположив, что указанные секущие уже выбраны, обозначим через $T_1 : N_1^s \rightarrow N_1^u$ отображение, порожденное траекториями линейного потока в полупространстве $q_1 < 0$, действующее в окрестности точки S_- , а через $T_2 : N_2^s \rightarrow N_2^u$ — аналогичное отображение, порожденное траекториями потока в полупространстве $q_1 > 0$, действующее в окрестности точки S_+ . Эти два отображения будут описаны ниже. Введем также отображения $R_2^- : D_2 \rightarrow N_1^s$, $R_1^- : N_1^u \rightarrow D_1$, $R_1^+ : D_1 \rightarrow N_2^s$, $R_2^+ : N_2^u \rightarrow D_2$, определяемые траекториями



потока. Отметим, что отображения R_i^\pm , $i = 1, 2$, являются симплектическими диффеоморфизмами относительно ограничения симплектической формы $dp \wedge dq$ на секущие, так как время перехода траекторий потока с одной секущей на другую конечно.

Обозначим теперь $P_1 = R_1^- \circ T_1 \circ R_2^- : D_2 \rightarrow D_1$ и $P_2 = R_2^+ \circ T_2 \circ R_1^+ : D_1 \rightarrow D_2$. Тогда отображение $P = P_2 \circ P_1$ есть отображение Пуанкаре, определенное на секущей D_2 в окрестности точки ее пересечения с Γ_2 . (см. рис. 2).

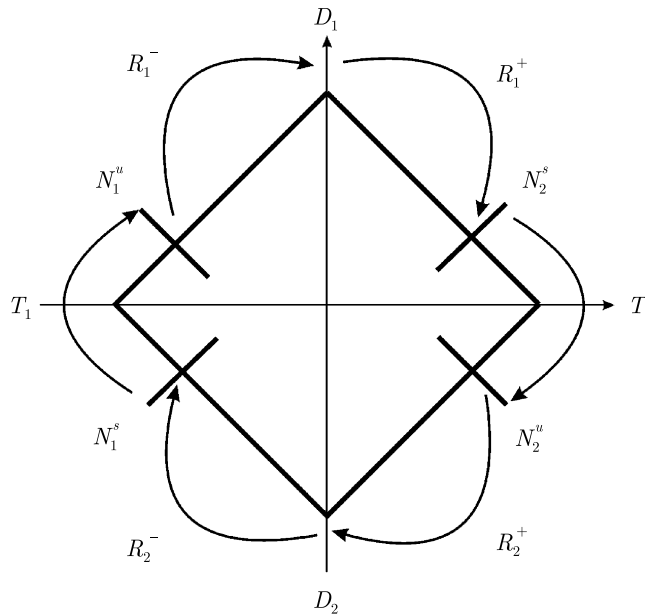


Рис. 2. Схема контура и отображений для построения отображения Пуанкаре.

Рассмотрим траекторию линейной системы в левом полупространстве, проходящую при $x = 0$ через точку на D_2 из некоторой окрестности точки $(0, -1, -2, 0)$. Отображение R_2^- переводит эту точку в точку на секущей N_1^s . Как сказано выше, в силу конечности времени перехода и трансверсальности траекторий к секущей, полученное отображение является диффеоморфизмом, более того — симплектическим диффеоморфизмом относительно ограничения основной 2-формы $dq \wedge dp$ на эти секущие (отметим попутно, что ограничение формы на D_i дает форму $dq_2 \wedge dp_2$). Аналогичное справедливо для отображения R_1^- . Для построения отображений T_i , $i = 1, 2$, удобнее перейти к новым координатам, сделав ряд замен. Это позволит прямо использовать результаты работы [12].

Напомним, что для состояния равновесия S_- есть два инвариантных многообразия W_-^s и W_-^u . Сделаем линейную замену координат, переводящую эти плоскости в координатные. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ \dot{q}_2 = p_2, \\ \dot{p}_1 = 4q_1, \\ \dot{p}_2 = -p_1; \end{cases}$$

(чтобы не загромождать обозначения, мы сохраняем старое обозначение для переменной q_1 : $q_1 + 1 \rightarrow q_1$). Сделаем замены

$$\xi_2 = q_2 - \frac{1}{2}p_2 - q_1, \quad \eta_1 = p_1 + p_2 - 2q_1$$



и запишем систему в новых координатах:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_1 + \xi_2 + \frac{1}{2}p_2, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_2 + \frac{1}{2}\eta_1, \\ \dot{\eta}_1 = -2\xi_2 - \eta_1, \\ \dot{p}_2 = -2q_1 - \eta_1 + p_2. \end{cases}$$

Затем перемасштабируем переменные

$$\xi_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2, \quad \eta_1 \rightarrow \sqrt{2}\eta_1, \quad q_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}q_1, \quad p_2 \rightarrow \sqrt{2}p_2$$

и получаем

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_1 + \xi_2 + p_2, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_2 + \eta_1, \\ \dot{\eta}_1 = -\xi_2 - \eta_1, \\ \dot{p}_2 = -q_1 - \eta_1 + p_2. \end{cases}$$

Сделаем еще одну замену

$$\xi_1 = q_1 + \frac{1}{4}(\xi_2 + \eta_1), \quad \eta_2 = p_2 - \frac{1}{4}(-\xi_2 + \eta_1).$$

В результате получим, после всех замен, что система распадается на две независимые друг от друга подсистемы:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1 + \eta_2 = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta_1}, \\ \dot{\eta}_2 = -\xi_1 + \eta_2 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi_2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\xi}_2 = -\xi_2 + \eta_1 = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta_2}, \\ \dot{\eta}_1 = -\xi_2 - \eta_1 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi_1}, \end{cases}$$

где гамильтониан равен $\hat{H} = -\xi_2\eta_2 + \eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2 + \xi_1\eta_1$. Уровень $\hat{H} = 0$ содержит состояние равновесия системы и соответствует в исходных координатах уровню $H = 2$. При этом $K_1 = \eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2$ и $K_2 = \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2$ являются интегралами системы. Таким образом, мы свели нашу задачу о построении отображения к аналогичной, рассмотренной в общем нелинейном случае в работе [12]. Для того чтобы воспользоваться ее результатами, переобозначим переменные следующим образом:

$$\xi_1 = y_2, \quad \eta_2 = -y_1, \quad \xi_2 = x_1, \quad \eta_1 = x_2.$$

Получаем

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2, \quad \dot{y}_1 = y_1 + y_2, \quad \dot{y}_2 = -y_1 + y_2,$$

$$\hat{H} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 - x_2y_1 = \xi + \eta,$$

где $\xi = x_1y_1 + x_2y_2$, $\eta = x_1y_2 - x_2y_1$.

Секущая для траекторий, проходящих вблизи устойчивого многообразия, задается как $N_1^s = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) | x_1^2 + x_2^2 = \rho_s^2, y_1^2 + y_2^2 \leq \delta^2\}$, а к точкам вблизи неустойчивого многообразия — как $N_1^u = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) | y_1^2 + y_2^2 = \rho_u^2, x_1^2 + x_2^2 \leq \delta^2\}$. Фиксируем уровень $\hat{H} = 0$ и на этих секущих вводим координаты (θ, η) , (φ, η) соответственно (секущие являются кольцами, где η — радиальная координата на кольце, а θ или, соответственно, φ —

угловые координаты на соответствующих кольцах). Тогда преобразование T_1 запишется следующим образом:

$$\varphi = \theta + B_0(\eta) \pmod{2\pi}, \quad \eta = \eta,$$

с функцией

$$B_0(\eta) = \ln(\rho_s \rho_u / \eta \sqrt{2}) + \Phi_0(\eta),$$

а функция $\Phi_0(\eta)$ является кусочно-постоянной функцией с разрывом первого рода при $\eta = 0$, причем $\Phi_0(-0) = -\pi/4$, а $\Phi_0(+0) = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

Далее все наши рассуждения будем проводить в некоторых окрестностях точек $\Gamma_2 \cap N_1^s$, $\Gamma_1 \cap N_1^u$, $\Gamma_1 \cap N_2^s$, $\Gamma_2 \cap N_2^u$. Как доказано в [12], область определения отображения T_1 состоит из счетного набора непересекающихся полос σ_n^s , накапливающихся к следу устойчивого многообразия W_-^s с обеих сторон от него, а область значения отображения T_1 также состоит из счетного набора непересекающихся полос σ_n^u , накапливающихся с обеих сторон к следу неустойчивого многообразия W_-^u (см. рис. 3). Аналогичное справедливо для отображения T_2 .

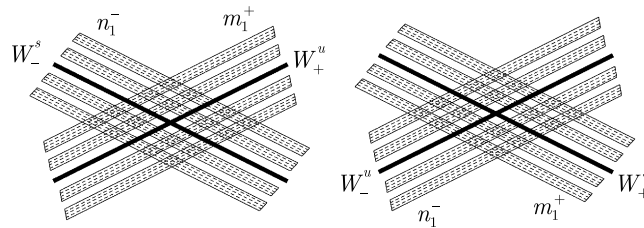


Рис. 3. Области определения и значения отображений P_1, P_2 .

Поскольку отображения R_2^\pm, R_1^\pm являются диффеоморфизмами, то эта структура полос переносится на области определения и значений отображений P_1, P_2 . Перенумеруем полосы σ_n^s из области определения отображения P_1 на D_2 (мы сохраняем те же обозначения для полос) символами от 1 до ∞ (с одной стороны от следа W_-^s) и от -1 до $-\infty$ (с другой стороны от следа W_-^s), и аналогично для полос из области значений для P_2 — символами от 1 до ∞ и от -1 до $-\infty$ для полос с обеих сторон от следа W_+^s . Чтобы различить номера одной серии полос от номеров другой серии, припишем им еще символ «-» для полос на D_2 и «+» — для полос на D_1 . Отметим, что в силу симметрии секущих ($D_2 = \sigma_1(D_1)$) и свойства $P_2 = \sigma_1 \circ P_1 \circ \sigma_1$ полосы, из области определения отображения P_1 на D_2 симметричны полосам из области определения отображения P_2 на D_1 . Это свойство позволяет искать симметричные траектории системы, используя симметричные коды символической системы.

Для описания траекторий системы, лежащих в U , используем символическую динамику [1, 10]. Напомним, что построение символической системы начинается с задания некоторого, не более чем счетного, множества, называемого алфавитом \mathcal{A} , и отображения $\mathcal{T} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$, называемого матрицей переходов или маршрутной схемой [1]. Тогда символическая система состоит из: (1) пространства Y с некоторой топологией, являющегося подмножеством множества таких двусторонних последовательностей $(\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots)$ с фиксированным нулевым местом, что два любых соседних символа ω_i, ω_{i+1} могут следовать один после другого, если и только если $\mathcal{T}(\omega_i, \omega_{i+1}) = 1$, и (2) непрерывного отображения $\sigma : Y \rightarrow Y$, являющегося сдвигом влево на один символ для любой символической последовательности. Обозначим символическую систему как (Y, σ, \mathcal{T}) .



В нашем случае мы сначала берем следующие алфавит и матрицу переходов. Рассмотрим счетное компактное пространство \mathcal{B} , состоящее из точек на прямой \mathbb{R} с координатами $\pm n^{-1}, n \in \mathbb{N}$, дополненное двумя точками $0_1, 0_2$. Это множество берется с дискретной топологией всюду, кроме точек $\{0_1, 0_2\}$, которые рассматриваются как неотделимое двоеточие, т. е. окрестностями точки 0_1 являются множества $\pm n^{-1}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ вместе с самой точкой 0_1 . Те же окрестности с заменой 0_1 на 0_2 являются окрестностями точки 0_2 .

Алфавит $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_- \cup \mathcal{B}_+$ состоит из двух копий множества \mathcal{B} , чтобы различить символы из разных копий, мы будем приписывать им знаки $+, -$. Переходы описываются следующим образом:

- после любого символа из \mathcal{B}_- , кроме 0_2^- , может следовать только символ из \mathcal{B}_+ , причем любой, кроме 0_2^+ ; после любого символа из \mathcal{B}_+ , может следовать только символ из \mathcal{B}_- , причем любой, кроме 0_2^- ;
- после символа 0_1^- может следовать только 0_1^- ; аналогично, после символа 0_1^+ может следовать только 0_1^+ ;
- только 0_2^- может предшествовать символу 0_2^- , только 0_2^+ может предшествовать 0_2^+ .

Соответствующее множество всех допустимых последовательностей будем обозначать Y_0 , символическую систему — как (Y_0, σ) .

Из результатов [12] следует, что при отображении полосы σ_n^s в полосу σ_n^u (из области определения в область значений) из-за прохода в окрестности седло-фокуса происходит сильное сжатие в направлении ее длинной стороны и сильное растяжение в направлении короткой (тем сильнее, чем больше номер соответствующей полосы). Кроме того, полосы из области значений отображения P_1 на D_1 и полосы из области определения отображения P_2 на D_1 пересекаются трансверсально, точнее — трансверсально пересекаются отрезки, являющиеся длинными границами этих полос, и аналогичное свойство справедливо для полос на D_2 . Эти свойства трансверсальности следуют из трансверсальности следов на D_2 устойчивого многообразия седло-фокуса S_- и следа неустойчивого многообразия седло-фокуса S_+ , а также достаточной малости окрестности U контура; аналогичное справедливо для секущей D_1 . Эти два свойства — сильное растяжение/сжатие и трансверсальность пересечений — приводит к гиперболическим свойствам отображения Пуанкаре (эта гиперболичность, точнее постоянные, входящие в определение гиперболичности, стремятся к бесконечности при приближении точки к гомоклиническому контуру, поэтому гиперболичность не является равномерной).

Рассмотрим теперь поведение траекторий системы, остающихся при всех x в достаточно малой окрестности контура и лежащих на уровне $H = 2$. Сначала рассмотрим траектории, которые не являются асимптотическими к состояниям равновесия S_-, S_+ ни в одну из сторон по переменной x , т. е. не ложатся на их устойчивые и неустойчивые многообразия (напомним, что x служит «временем» в нашей системе). Такая траектория обязана бесконечное число раз проходить через области определения отображений P_1, P_2 , т. е. при последовательных пересечениях ею секущих D_1, D_2 она проходит только через отмеченные выше полосы и не ложится на следы устойчивых и неустойчивых многообразий седло-фокусов S_-, S_+ . В силу автономности системы можно считать, что такая траектория при $x = 0$ проходит через точку на секущей D_2 , поэтому она лежит в области определения отображения P_1 , т. е. в полосе $\sigma_{n^-}^s$ с номером n^- . Затем эта траектория, пройдя через окрестность точки S_- , попадает на D_1 в полосу $\sigma_{n^-}^u$, но эта полоса трансверсальна (в указанном выше смысле) всем полосам $\sigma_{n^+}^s$, поэтому она попадает в единственную полосу $\sigma_{n^+}^s$ с номером n^+ . Далее

траектория при возрастании времени проходит окрестность точки S_+ и оказывается на D_2 в полосе $\sigma_{n_+}^u$, которая трансверсальна всем полосам $\sigma_{n_-}^s$, и этот процесс нумерации продолжается. Тем самым, для данной траектории мы получаем последовательность номеров соответствующих полос, по которым она проходит. В этой последовательности любые два соседних символа имеют противоположные знаки (в указанном смысле). Обратное свойство, что для любой такой последовательности символов существует единственная траектория системы, лежащая в рассматриваемой окрестности контура, вытекает из результатов работы [12], а именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Множество всех траекторий системы (6), лежащих на уровне $H = 2$ в достаточно малой окрестности построенного гетероклинического контура и не являющихся асимптотическими ни к S_- , ни к S_+ , находится во взаимно-однозначном соответствии со множеством бесконечных в обе стороны последовательностей из символов указанного алфавита, в которых любые два соседних символа имеют противоположные знаки.*

Техника, используемая в [12] для доказательства этой теоремы, работает и в случае последовательностей, которые, начиная с некоторого места справа или слева, содержат только символы $0_{1,2}^\pm$, им соответствуют гомо- или гетероклинические траектории к S_\pm . В частности, базисным гетероклиническим траекториям Γ_1, Γ_2 соответствуют символические траектории последовательностей $(\dots, 0_2^-, 0_2^-, 0_1^+, 0_1^+, \dots)$ (для Γ_1) и $(\dots, 0_2^+, 0_2^+, 0_1^-, 0_1^-, \dots)$ (для Γ_2).

Полученное символическое описание траекторий можно сделать более приспособленным к описанию траекторий потока с помощью конструкции надстройки [?, 2]. Для этого сначала рассмотрим символическую систему — схему Бернулли последовательностей ω из двух символов $\{0, 1\}$ (матрица переходов состоит из одних единиц). Умножим полученное топологическое пространство всех двоичных последовательностей Σ_2 на отрезок $[0, 1]$ с координатой θ , и зададим движение по полученным отрезкам согласно векторному полю $\dot{\theta} = 1$. Теперь в произведении $\Sigma_2 \times [0, 1]$ склеим верхнее основание $\Sigma_2 \times \{1\}$ с нижним основанием $\Sigma_2 \times \{0\}$ согласно отождествлению $(\omega, 1) = (\sigma(\omega), 0)$. Полученное пространство с векторным полем называется надстройкой над символической системой (Σ_2, σ) . Пространство \mathcal{S} является расслоением над окружностью со слоем Σ_2 и отображением в слое σ . В нем имеются две периодические с периодом 1 траектории, соответствующие точкам в слое $(\dots, 0, 0, 0, \dots)$, $(\dots, 1, 1, 1, \dots)$. Отождествим в \mathcal{S} каждую из этих периодических траекторий в свою точку (эти точки будут соответствовать седло-фокусам S_\pm). Получим новое пространство \mathcal{S}_0 с потоком на нем. Из теоремы 1 и конструкции надстройки следует

Теорема 2. *Множество всех траекторий системы (6), лежащих на уровне $H = 2$ в достаточно малой окрестности построенного гетероклинического контура, топологически эквивалентно построенному потоку на \mathcal{S}_0 .*

Доказательство. Укажем только перекодировку траекторий, остальное следует из теоремы 1. Рассмотрим траекторию, не являющуюся гомо- или гетероклинической для состояний равновесия S_\pm . Будем считать, что при $x = 0$ она проходит через точку на D_2 , лежит в полосе $\sigma_{n_0}^s$ и ей соответствует бесконечная последовательность символов $(\dots, n_{-1}^+, n_0^-, n_1^+, \dots)$. Поставим ей в соответствие последовательность из нулей и единиц по следующему правилу: вместо числа n_i^- ставим блок из n_i^- нулей, после него (переход к S_+) ставим блок из n_{i+1}^+ единиц, затем снова блок из n_{i+2}^- нулей (переход к S_-), и т. д.

Для траекторий, стремящихся к S_- при $x \rightarrow \infty$, последовательность, начиная с некоторого места вправо, состоит из одних 0_1^- . На эти места в новой кодировке ставим одни

нули. Если траектория стремится к S_- при $x \rightarrow -\infty$, то ее последовательность, начиная с некоторого места слева, состоит из одних 0_2^- . Тогда в новой кодировке мы ставим на соответствующем месте слева все нули. Аналогично — для S_+ .

5. Заключение

Полученное описание траекторий, лежащих целиком на уровне $H = 2$ в достаточно малой окрестности гетероклинического контура, дает возможность предъявить богатый набор таких траекторий с различным поведением. В частности, в окрестности контура имеется счетное множество гомоклинических траекторий к каждому из состояний равновесия S_- и S_+ . Эти траектории соответствуют следующим кодировкам: для седло-фокуса S_- это последовательности, у которых, начиная с некоторого места справа и некоторого места слева, стоят символы 0; соответственно, для седло-фокуса S_+ это последовательности, у которых справа и слева, начиная с некоторых мест, стоят 1. Базисным гетероклиническим траекториям соответствуют последовательности (и их символические траектории): для Γ_1 — последовательность, у которой слева от нулевого места стоят символы 0, а справа — 1, для Γ_2 — последовательность, у которой слева от нулевого места стоят символы 1, а справа — 0. Таким же образом получается существование счетного множества гетероклинических контуров разной обходности, седловых периодических траекторий разной обходности и т. д.

6. Благодарности

Работа была частично поддержана Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры» (мероприятие «Проведение научных исследований под руководством докторов наук», НК-13П(9)). Л. М. Л. благодарит Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку по грантам 07-01-00715а, 07-01-00566а, а также РФФИ и администрацию Нижегородской области за поддержку по региональному гранту 09-01-97016а.

Список литературы

- [1] Алексеев В. М. Символическая динамика // Одиннадцатая летняя математическая школа. Киев: Инст. матем. Укр. АН, 1976, с. 1–210.
- [2] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН, 1967, т. 90, с. 3–209.
- [3] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
- [4] Bolotin S. Homoclinic orbits to invariant tori of Hamiltonian Systems // AMS Transl., 1995, vol. 168, pp. 21–90.
- [5] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса // Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 авг.—6 сент. 1998 г.). Т. 6: Динамические системы. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., т. 67, ВИНТИ, М., 1999, с. 69–128.
- [6] Gonchenko S., Shilnikov L., Turaev D. Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in conservative and dissipative two-dimensional maps // Nonlinearity, 2007, vol. 20, pp. 241–275.



- [7] Devaney R. Homoclinic orbits in Hamiltonian systems // J. Differential Equations, 1976, vol. 21, pp. 431–439.
- [8] Lega J., Moloney J. V., Newell A. Swift–Hohenberg equation for lasers // Phys. Rev. Lett., 1994, vol. 73, pp. 2978–2981.
- [9] Kalies W. D., Kwapisz J., VanderVorst R. C. A. M. Homotopy classes for stable connections between Hamiltonian saddle-focus equilibria // Comm. Math. Phys., 1998, vol. 193, pp. 337–371.
- [10] Каток А., Хассельблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М: Факториал, 1999. 767 с.
- [11] Кулагин Н. Е., Лерман Л. М., Шмакова Т. Г. Фронты, бегущие фронты, и их устойчивость в обобщенном уравнении Свифта–Хоенберга // Журн. вычислит. матем. и матем. физики, 2008, т. 48, № 4, с. 693–712.
- [12] Lerman L. M. Homo- and heteroclinic orbits, hyperbolic subsets in a one-parameter unfolding of a hamiltonian system with heteroclinic contour with two saddle-foci // Regul. Chaotic Dyn., 1997, vol. 2, No. 3/4, pp. 139–155.
- [13] Swift J., Hohenberg P. S. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability // Phys. Rev. A, 1977, vol. 15, pp. 319–328.
- [14] Smets D., van der Berg J. B. Homoclinic solutions for Swift–Hohenberg and suspended bridge type equations // J. Differential Equations, 2002, vol. 184, pp. 78–96.
- [15] Tlidi M., Georgiou M., Mandel P., Transverse patterns in nancsent optical bistability // Phys. Rev. A, 1993, vol. 48, No. 5, pp. 4605–4609.
- [16] Hilali M. F., Métens S., Borckmans P., Dewel G. Pattern selection in the generalized Swift–Hohenberg model // Phys. Rev. E, 1995, vol. 51, No. 3, pp. 2046–2052.
- [17] Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Матем. сб., 1970, т. 81, вып. 1, с. 92–103.