

Нелокальное уравнение синус-Гордона: решения типа «кинк» в пределе слабой нелокальности

Г. Л. Алфимов

Московский институт электронной техники
(технический университет)
Москва, Зеленоград
galfimov@yahoo.com

Получено 27 сентября 2009 г.

Нелокальное обобщение уравнения синус-Гордона возникает в целом ряде задач современной математической физики, в том числе в моделях джозефсоновских переходов и в решеточных моделях с учетом дальнего действия. Решения типа «кинк» этого уравнения соответствуют физически важным объектам, таким как, например, вихрь магнитного потока в джозефсоновской электродинамике. В настоящей работе задача о решениях типа «кинк» для нелокального уравнения синус Гордон рассматривается в слабонелокальном пределе, когда уравнение для бегущих волн можно свести к обыкновенному уравнению четвертого порядка с двумя внешними параметрами. Представлен обзор возможных решений типа «кинк» рассматриваемого уравнения для всех возможных комбинаций параметров задачи. Для областей параметров, исследованных ранее, в статье представлена сводка известных утверждений. Для неисследованных ранее областей параметров представлены новые результаты качественного и численного исследования.

Ключевые слова: уравнение синус Гордона, нелокальность, сепаратрисы

G. L. Alfimov

Nonlocal sine-Gordon equation: kink solutions in the weak nonlocality limit

Nonlocal sine-Gordon equation arises in numerous problems of modern mathematical physics, for instance, in Josephson junction models and lattice models with long-range interactions. Kink solutions of this equation correspond to physically relevant objects such as magnetic flux vortex in Josephson electrodynamics. In this paper the kink solutions for the nonlocal sine-Gordon equation are considered in weak nonlocality limit. In this limit the equation for travelling waves can be reduced to ordinary differential equation of 4th order with two governing parameters. A survey of possible kink solutions for this equation and for all combination of the governing parameters is presented. The collection of known results is given for the regions on the plane of model parameters which just have been investigated. New results of qualitative and numerical analysis are reported for other regions of the plane of model parameters.

Keywords: sine-Gordon equation, nonlocality, separatrices

Mathematical Subject Classifications: 37N20, 37C29

1. Введение

Уравнение синус-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \quad (1)$$

является одним из основных уравнений современной теории нелинейных волн. В качестве простейшей нелинейной модели оно возникает в теории магнетиков, теории дислокаций, в теории джозефсоновских переходов и в целом ряде других физических приложений (обзор задач, приводящих к уравнению синус-Гордона, можно найти в монографии [1]). Замечательным свойством уравнения (1) является его полная интегрируемость [2], позволяющая находить решения, описывающие взаимодействие уединенных волн, называемых солитонами, в явном виде.

Для решений типа бегущих волн, $u(z) \equiv u(x - ct)$, уравнение (1) принимает вид

$$(1 - c^2)u_{zz} - \sin u = 0. \quad (2)$$

При $c^2 < 1$ уравнение (2) сводится заменой $z = \xi\sqrt{1 - c^2}$ к уравнению маятника $u_{\xi\xi} - \sin u = 0$, не содержащему параметров. Этот простой факт является следствием Лоренц-инвариантности уравнения (1). Фазовый портрет уравнения маятника приведен на рис. 1. На этом фазовом портрете выделяются два типа траекторий: *периодические* и *вращательные*. Области, заполненные каждым из этих типов решений, разделяют *сепаратрисы*: траектории, выходящие из особой точки $u = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, и идущие либо в особую точку $u = 2\pi(n + 1)$, либо в особую точку $u = 2\pi(n - 1)$. Эти траектории, с точностью до сдвига $u \rightarrow u + 2\pi n$, соответствуют точному решению уравнения (2)

$$u(z) = 4 \operatorname{arctg} \exp \left\{ \pm \frac{z - z_0}{\sqrt{1 - c^2}} \right\}, \quad z = x - ct. \quad (3)$$

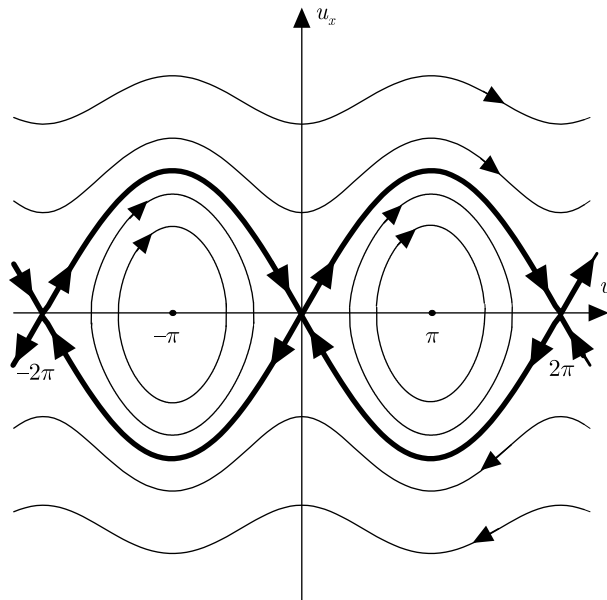


Рис. 1. Уравнение маятника (фазовый портрет).

Решение (3) называется топологическим солитоном или 2π -кинком (если в формуле (3) стоит знак «плюс») либо 2π -антикинком (если в этой формуле стоит знак «минус»). При этом c является скоростью солитона, $c^2 < 1$. Формула (3) описывает бегущую волну переброса между двумя эквивалентными состояниями равновесия $u = 0$ и $u = 2\pi$ и соответствует топологическому заряду 1.

Решения (3) представляют особый интерес для приложений уравнения синус-Гордона. Так, в задачах джозефсоновской электродинамики решение (3) описывает бегущий магнитный вихрь, называемый флюксоном, переносящий один квант магнитного потока (см. [3], глава 15). Солитонные свойства этих объектов, а именно, возможность проходить друг сквозь друга без потерь энергии, делают их привлекательными для практического применения. В более общем случае решениями типа *кинк* называются решения, представляющие собой движущуюся волну переброса между двумя состояниями равновесия (не обязательно соседними), имеющую стационарный профиль относительно бегущей координаты $z = x - ct$. Граничные условия, соответствующие решениям типа *кинк*, имеют вид

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} u(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{4}$$

или

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} u(z) = -\pi, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = -\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Эти решения в дальнейшем будут называться $2n\pi$ -кинками, где n — топологический заряд решения. По аналогии с $2n\pi$ -кинками, решения, удовлетворяющие граничным условиям

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} u(z) = 2\pi n, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = 0, \quad n \in \mathbf{N},$$

или

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} u(z) = -\pi + 2\pi n, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = -\pi, \quad n \in \mathbf{N},$$

будут называться в дальнейшем $2n\pi$ -антикинками. Нетрудно убедиться, что решение (3) является *единственным* решением уравнения (1) типа *кинк*. Действительно, из рис. 1 видно, что имеется единственная траектория (выделена на рисунке), идущая из состояния равновесия $u = 0$ в состояние равновесия $u = 2\pi$, которая и соответствует 2π -кинку. Аналогично имеется единственная траектория, соответствующая 2π -антикинку. Из рисунка 1 также следует, что уравнение маятника не допускает решений, соответствующих кинкам с топологическим зарядом, большим единицы, например, решений типа 4π -кинков, 6π -кинков и т. д.

Несмотря на исключительную роль, которую играет уравнение (1) в различных физических приложениях, в большинстве случаев оно является «модельным» и требует уточнения. В частности, при более точном учете закона дисперсии, сложной геометрии задачи или при изучении моделей с дальним действием возникают нелокальные обобщения уравнения синус-Гордона вида

$$u_{tt} + \sin u = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x - x') u_{x'}(x', t) dx'. \tag{6}$$

Введенный параметр λ характеризует степень нелокальности. Конкретный вид ядра $G_\lambda(\xi)$ определяется физической задачей. Классическое уравнение синус-Гордона (1) является предельным случаем уравнения (6) в случае, когда ядро интегрального оператора вырождается в дельта-функцию. Следует отметить, что, в отличие от (1), уравнение (6) уже не является Лоренц-инвариантным.



Имеются две области физических приложений, в которых нелокальное обобщение (6) возникает естественным образом. К первой из них относятся решеточные модели, учитывающие дальноедействие [4, 5], обобщающие классическую модель Френкеля–Конторовой (см. монографию [6], содержащую большой обзор литературы). Второй круг задач связан с нелокальной джозефсоновской электродинамикой [7–9], позволяющей описывать мелко-масштабные структуры в джозефсоновском переходе, где джозефсоновская длина λ_J оказывается сравнима с лондоновской глубиной λ_L . Новый импульс развитию нелокальной джозефсоновской электродинамики был дан совсем недавно работами группы А. Устинова (Германия) [10, 11], в которых было экспериментально подтверждена справедливость нелокального описания для ультратонких джозефсоновских переходов. Обширный список литературы, касающийся этого круга задач, см. в недавнем обзоре [12].

Один из известных подходов к исследованию уравнения (6) связан с приближением интегродифференциального оператора в правой части (6) высшими производными в предположении, что нелокальность является слабой. Такой прием традиционно применялся для исследования нелокальных задач самой разной природы: в гидродинамике (уравнение Кавахары, [13]), нелинейной оптике (см. монографию [14], гл. 10), теории джозефсоновских переходов (см. [15–17]). Суть этого подхода заключается в следующем. Пусть зависимость функции $G_\lambda(\xi)$ от $\lambda \geq 0$ имеет следующий вид:

$$G_\lambda(\xi) = \frac{1}{\lambda} G\left(\frac{|\xi|}{\lambda}\right), \quad (7)$$

где $G(\cdot)$ не зависит от λ . Будем считать, что ядро $G(\xi)$ нормировано таким образом, что $\widehat{G}(0) = 1$, где $\widehat{G}(\omega)$ — преобразование Фурье ядра $G(\xi)$, $\xi \rightarrow \omega$. Из этого, в частности, следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} G_\lambda(\xi) = \delta(\xi)$ и при $\lambda = 0$ уравнение (6) вырождается в классическое уравнение синус-Гордона. Оператор

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x-x') u_{x'}(x', t) dx',$$

стоящий в правой части уравнения (6), является оператором свертки. Его действие особенно просто записывается в терминах преобразования Фурье

$$\widehat{Lu}(\omega) = -\omega^2 \widehat{G}_\lambda(\omega) \widehat{u}(\omega),$$

где $\widehat{f}(\omega)$ — преобразование Фурье функции $f(\xi)$. Выражение $-\omega^2 \widehat{G}_\lambda(\omega)$ будем называть символом оператора L . В случае, когда ядро представлено в виде (7), символ равен $-\omega^2 \widehat{G}(\lambda\omega)$. Если λ мало, $\widehat{G}(\lambda\omega)$ может быть ашпроксимирована несколькими членами разложения Тейлора:

$$\widehat{G}(\lambda\omega) \sim 1 + \frac{1}{2} \widehat{G}''(0) \lambda^2 \omega^2 + \frac{1}{24} \widehat{G}''''(0) \lambda^4 \omega^4 + \dots$$

Это соответствует следующему разложению интегрального оператора по степеням параметра нелокальности:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x-x') u_{x'}(x', t) dx' \sim \\ & \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{1}{2} \widehat{G}''(0) \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) + \frac{1}{24} \widehat{G}''''(0) \lambda^4 \frac{\partial^6}{\partial x^6} u(x, t) + \dots \end{aligned}$$

Ограничиваясь двумя членами этого разложения, получаем следующее уравнение:

$$u_{tt} - u_{xx} - \varepsilon \lambda^2 u_{xxxx} + \sin u = 0, \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} \widehat{G}''(0). \quad (8)$$

Уравнение (8) и является приближением исходного уравнения (6) в пределе слабой нелокальности. Его решения типа бегущих волн вида $u(z) \equiv u(x - ct)$ удовлетворяют обыкновенному уравнению 4-го порядка

$$\varepsilon \lambda^2 u_{zzzz} + (1 - c^2) u_{zz} - \sin u = 0, \quad (9)$$

причем замена $z = |\varepsilon|^{\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{1}{2}} \eta$ позволяет свести уравнение (9) к уравнению

$$\sigma u_{\eta\eta\eta\eta} + \mu u_{\eta\eta} - \sin u = 0, \quad (10)$$

где $\mu = (1 - c^2)/\lambda\sqrt{|\varepsilon|}$, а $\sigma = \text{sign } \varepsilon = \pm 1$. Переход к локальному случаю при этом соответствует пределу $\mu \rightarrow \infty$.

Уравнение (9) и некоторые его модификации исследовались ранее как с физической, так и с математической точек зрения [15, 18–24]. Было выяснено, что имеются области значений параметров, где модель допускает новые решения типа 4π - и 6π -кинков, набор скоростей которых дискретен [18, 21]. В других областях значений параметров решение типа 2π -кинка остается единственным [23, 24]. Однако некоторые области значений параметров, насколько известно автору, оставались неизученными.

В данной работе поставлена задача дать обзор возможных решений типа *кинк* уравнения (9) для всех возможных комбинациях параметров μ и σ . Основным результатом работы можно считать диаграмму на рис. 6 и комментарии к ней. Для областей параметров, исследованных ранее (ситуация «седло-центр» и «седло», см. раздел 2), в статье представлена сводка известных утверждений, проиллюстрированных численными результатами. Для неисследованных ранее областей параметров (ситуация «седло-фокус») представлены результаты качественного и численного исследования.

2. Динамическая интерпретация уравнения (10)

Рассмотрим динамическую систему, которую уравнение (10) порождает в фазовом пространстве (u, u', u'', u''') (здесь и далее $u' = u_\eta(\eta)$, $u'' = u_{\eta\eta}(\eta)$, $u''' = u_{\eta\eta\eta}(\eta)$). Она инвариантна относительно сдвигов

$$L_m : (u, u', u'', u''') \rightarrow (u + 2\pi m, u', u'', u'''), \quad m \in \mathbf{Z}, \quad (11)$$

и двух инволюций

$$i_1 : (u, u', u'', u''') \rightarrow (u, -u', u'', -u'''), \quad (12)$$

$$i_2 : (u, u', u'', u''') \rightarrow (-u, -u', -u'', -u'''), \quad (13)$$

соответствующих инвариантности уравнения (10) относительно замен $\eta \rightarrow -\eta$ и $u(\eta) \rightarrow -u(\eta)$. Кроме того, уравнение (10) имеет первый интеграл

$$I = \sigma u''' u' - \sigma \frac{1}{2} (u'')^2 + \frac{\mu}{2} (u')^2 - (1 - \cos u). \quad (14)$$

Заметим также, что замена переменных

$$\begin{aligned} q_1 &= u, & q_2 &= u'' + \frac{1}{2}(\sigma\mu + 2)u, \\ p_1 &= \frac{1}{2}(\sigma\mu - 2)u' + u''', & p_2 &= u' \end{aligned}$$

позволяет записать динамическую систему в гамильтоновом виде

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}, & \dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, \end{aligned}$$

где гамильтониан H имеет вид

$$H = p_2^2 + p_1 p_2 - \frac{1}{2} \left(q_2 - \frac{1}{2}(\sigma\mu + 2)q_1 \right)^2 - \sigma(1 - \cos q_1).$$

В фазовом пространстве $\mathbf{R}^4 = (u, u', u'', u''')$ особыми точками рассматриваемой динамической системы являются точки $O_{k\pi} (u = k\pi, u' = u'' = u''' = 0)$, $k \in \mathbf{Z}$. В силу инвариантности системы относительно сдвигов (11), все особые точки $O_{2n\pi}$, $n \in \mathbf{Z}$, имеют один и тот же тип и расположены в нулевом уровне гамильтониана H . То же самое можно сказать про особые точки $O_{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbf{Z}$. При этом образом решения типа $2\pi n$ -кинка уравнения (10) является особая траектория — гетероклиническая сепаратриса. В случае граничных условий (4) эта траектория соединяет особые точки $O_{2l\pi}$ и $O_{2(l+n)\pi}$, а в случае граничных условий (5) — особые точки $O_{-\pi+2l\pi}$ и $O_{-\pi+2(l+n)\pi}$. В дальнейшем такие траектории будут называться $2n\pi$ -траекториями. В силу инвариантности системы относительно сдвигов (11), без ограничения общности можно считать, что $l = 0$, т. е. рассматривать только $2n\pi$ -траектории, соединяющие либо особые точки O_0 и $O_{2n\pi}$, либо $O_{-\pi}$ и $O_{-\pi+2n\pi}$. Далее, замена

$$u \rightarrow u + \pi, \quad \sigma \rightarrow -\sigma, \quad \mu \rightarrow -\mu \tag{15}$$

сохраняет уравнение (10). Поэтому достаточно провести исследование $2n\pi$ -траекторий, соединяющих особые точки O_0 и $O_{2n\pi}$, при всех возможных значениях σ и μ . Тогда описание $2n\pi$ -траекторий, соединяющих особые точки $O_{-\pi}$ и $O_{-\pi+2n\pi}$, получится автоматически при помощи соответствия (15).

Траектории, соединяющие особые точки O_0 и $O_{2n\pi}$, являются пересечениями неустойчивого многообразия особой точки O_0 , $W^+(O_0)$, и устойчивого многообразия особой точки $O_{2n\pi}$, $W^-(O_{2n\pi})$ (см. [25]). Оба эти многообразия лежат в трехмерном нулевом уровне гамильтониана H . Размерность многообразий $W^+(O_0)$ и $W^-(O_{2n\pi})$ зависит от типа особой точки O_0 . При

$$\dim W^+(O_0) = \dim W^-(O_{2n\pi}) = 2$$

пересечение $W^+(O_0)$ и $W^-(O_{2n\pi})$ является случаем общего положения. Если пересечение является трансверсальным, то такая гетероклиническая траектория называется *трансверсальной*. Аналогично трансверсальной гетероклинической траектории определяется и трансверсальная гомоклиническая петля особой точки O_0 .

Следует заметить, что, в силу инвариантности системы относительно сдвигов (11), фазовым пространством также можно считать четырехмерную цилиндрическую поверхность $\mathbf{S} \times \mathbf{R}^3$. Особыми точками динамической системы на этой поверхности являются две точки: $O_0(u = u' = u'' = u''' = 0)$ и $O_\pi(u = \pi, u' = u'' = u''' = 0)$. При этом образом решения типа $2n\pi$ -кинка уравнения (10) является гомоклиническая петля сепаратрисы особой точки O_0 , обходящая вокруг цилиндра n раз. Заметим также, что если Γ^+ является n -обходной сепаратрисой особой точки O_0 и соответствует $2n\pi$ -кинку, то $\Gamma^- = L_{2n\pi} \circ i_2(\Gamma^+)$ также является n -обходной сепаратрисой и соответствует $2n\pi$ -антикинку.

Тип особой точки O_0 зависит от значения μ и знака σ . Собственные значения $\Lambda_i, i = 1, 2, 3, 4$, особой точки O_0 являются корнями уравнения

$$\sigma\Lambda^4 + \mu\Lambda^2 - 1 = 0. \tag{16}$$

При этом возможны следующие четыре случая.

(А) $\sigma = 1$. В этом случае особая точка O_0 имеет два действительных и два чисто мнимых собственных значения и является особой точкой типа *седло-центр*.

(В) $\sigma = -1, \mu > 2$. При этих значениях параметров все собственные значения O_0 являются действительными, и O_0 является *седлом*.

(С) $\sigma = -1, -2 < \mu < 2$. В этом случае O_0 имеет четыре комплексных собственных значения и является *седло-фокусом*.

(D) $\sigma = -1, \mu < -2$. При этих значениях параметров все собственные значения O_0 являются чисто мнимыми, и O_0 является *эллиптической особой точкой*.

Рассмотрим случаи (А), (В), (С) и (D) по порядку.

3. Случай (А), $\sigma = 1$

1. При $\mu < 0$ решения уравнение (10) не допускает решений типа *кинк*. Это следует из утверждения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. При $\mu < 0$ и $\sigma = 1$ динамическая система, порожденная (10), не имеет $2n\pi$ -траекторий.

Доказательство. На любой $2n\pi$ -траектории выполняется условие $u''(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$. Значит, $u''(\eta)$ имеет экстремум, и существует такая точка $\eta = \eta_0$, что $u'''(\eta_0) = 0$. Так как $2n\pi$ -траектории лежат в уровне интеграла $I = 0$, то из выражения для первого интеграла (14) следует, что в этой точке выполняется равенство

$$-\frac{1}{2}(u''(\eta_0))^2 + \frac{\mu}{2}(u'(\eta_0))^2 - (1 - \cos u(\eta_0)) = 0;$$

откуда, вследствие условия $\mu < 0$, получаем $u(\eta_0) = 0(\text{mod } 2\pi)$, $u'(\eta_0) = u''(\eta_0) = u'''(\eta_0) = 0$, что невозможно. ■

2. Случай $\mu \geq 0$ рассматривался в работах [18, 21]. Здесь возможно достаточно полное численное исследование, основанное на следующих точных утверждениях:

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть $\sigma = 1$ и $\gamma = (u(\eta), u'(\eta), u''(\eta), u'''(\eta))$ — траектория динамической системы, порожденной (10), лежащая в уровне $I \geq 0$. Тогда если имеется точка траектории, в которой $u' > 0$ (или $u' < 0$), то $u' \geq 0$ (соответственно, $u' \leq 0$) на всей траектории γ .



Доказательство. Смена знака u' на некоторой траектории $\gamma = (u(\eta), u'(\eta), u''(\eta), u'''(\eta))$ может произойти только в точке $\eta = \eta_0$, такой, что $u'(\eta_0) = 0$. Подставив $u'(\eta_0) = 0$ в (14), получим

$$-\frac{1}{2}(u''(\eta_0))^2 - (1 - \cos u(\eta_0)) \geq 0.$$

Это возможно только в случае $I = 0$ и $u = 0 \pmod{2\pi}$, $u'' = 0$. Пусть $u'''(\eta_0) = \alpha$. Тогда в малой окрестности точки $\eta = \eta_0$ имеем представления

$$u(\eta) = 2\pi n + \frac{\alpha}{6}(\eta - \eta_0)^3 + o((\eta - \eta_0)^3),$$

$$u'(\eta) = \frac{\alpha}{2}(\eta - \eta_0)^2 + o((\eta - \eta_0)^2),$$

что говорит о том, что в точке $\eta = \eta_0$ смены знака не произошло. Таким образом, знак u' сохраняется вдоль всей траектории γ . ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Пусть $\sigma = 1$. Тогда

(а) все $2n\pi$ -траектории динамической системы, порожденной (10), проходят через плоскость симметрии, $P_n(u = n\pi, u'' = 0)$;

(б) если выходящая из особой точки O_0 траектория пересекает плоскость P_n , она является $2n\pi$ -траекторией.

Доказательство. Рассмотрим структуру фазового пространства в окрестности особой точки O_0 . В силу того, что O_0 является особой точкой типа седло-центр, имеется две траектории, $\gamma^+_1(O_0)$ и $\gamma^+_2(O_0)$, *входящих* в эту особую точку, и две траектории, $\gamma^-_1(O_0)$ и $\gamma^-_2(O_0)$, *выходящих* из нее. При этом, если задана любая из этих четырех траекторий, $\gamma^+_1(O_0)$, $\gamma^+_2(O_0)$, $\gamma^-_1(O_0)$ и $\gamma^-_2(O_0)$, все входящие и выходящие траектории любой особой точки $O_{2n\pi}$ также могут быть найдены путем инволюций (12)–(13) и сдвигов (11). Например, если дана одна из выходящих траекторий точки O_0 ,

$$\gamma^-_1(O_0) = (u(\eta), u'(\eta), u''(\eta), u'''(\eta)),$$

то другой входящей траекторией является траектория

$$\gamma^-_2(O_0) = (-u(\eta), -u'(\eta), -u''(\eta), -u'''(\eta)),$$

а выходящими траекториями особой точки $O_{2n\pi}$ будут траектории

$$\gamma^+_1(O_{2n\pi}) = (2n\pi + u(-\eta), -u'(-\eta), u''(-\eta), -u'''(-\eta)),$$

$$\gamma^+_2(O_{2n\pi}) = (2n\pi - u(-\eta), u'(-\eta), -u''(-\eta), u'''(-\eta)).$$

Существование $2n\pi$ -траектории означает, что одна из траекторий, входящих в особую точку $O_{2n\pi}$, сливается с одной из траекторий, выходящих из особой точки O_0 . Это означает, что при некотором значении $\eta = \eta_0$ выполняются равенства одной из двух групп

$$\begin{aligned} u(\eta_0 + \eta) &= 2n\pi + u(\eta_0 - \eta), & u'(\eta_0 + \eta) &= -u'(\eta_0 - \eta), \\ u''(\eta_0 + \eta) &= u''(\eta_0 - \eta), & u'''(\eta_0 + \eta) &= -u'''(\eta_0 - \eta) \end{aligned} \quad (17)$$

(соответствует слиянию траекторий $\gamma^+_1(O_0)$ и $\gamma^-_1(O_{2n\pi})$) и

$$\begin{aligned} u(\eta_0 + \eta) &= 2n\pi - u(\eta_0 - \eta), & u'(\eta_0 + \eta) &= u'(\eta_0 - \eta), \\ u''(\eta_0 + \eta) &= -u''(\eta_0 - \eta), & u'''(\eta_0 + \eta) &= u'''(\eta_0 - \eta) \end{aligned} \quad (18)$$



(соответствует слиянию траекторий $\gamma_1^+(O_0)$ и $\gamma_2^-(O_{2n\pi})$). В силу того, что u' не может менять знак вдоль траектории, группа равенств (17) выполняться не может, в то время как выполнение равенств (18) означает справедливость утверждения 3.3(а). Далее, если $\gamma_1^+(O_0)$ пересекает плоскость P_n , то, в силу симметрий (12)–(13), траектория $\gamma_2^-(O_{2n\pi})$ также пересекает эту плоскость, причем в той же точке. Отсюда следует, что $\gamma_1^+(O_0)$ сливается с $\gamma_2^-(O_{2n\pi})$, образуя при этом $2n\pi$ -траекторию. Утверждение 3.3(b) доказано. ■

Пересечение двумерной плоскости P_n с одномерной траекторией в четырехмерном пространстве не является случаем общего положения. Вместе с тем, оно может иметь место при некоторых значениях параметра μ . Для этого необходимо, чтобы на выходящей траектории $\gamma_1^+(O_0)$ в некоторой точке выполнялись условия

$$u(\eta_0, \mu) = n\pi, \quad u''(\eta_0, \mu) = 0. \tag{19}$$

Соотношения (19) можно рассматривать как уравнения для нахождения значений η_0 и μ . Это позволяет сформулировать простой метод численного нахождения значений μ , при которых имеются $2n\pi$ -кинки. Он состоит в следующем. Пусть μ фиксировано. Численно продолжим траекторию, выходящую из особой точки O_0 , до момента, когда ее компонента u окажется равной $n\pi$ (в силу утверждения 3.2, это может произойти только один раз). Зафиксируем значение $U''(\mu)$, которое будет иметь компонента u'' в этой точке. Нули функции $U''(\mu)$ являются теми значениями параметра μ , при которых существуют $2n\pi$ -кинки.

Таблица 1. Значения μ , при которых имеются решения уравнения (10) типа 4π и 6π -кинков.

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
4 π -кинки	1.155	2.238	2.842	3.310	3.707
6 π -кинки	0.791	1.358	2.122	2.342	2.758

Результаты численных исследований уравнения (10) можно сформулировать следующим образом [18, 21].

2 π -кинки: Численные исследования указывают на то, что при $\sigma = 1$ уравнение (10) не имеет решений типа 2π -кинков ни при каких значениях μ . Строгое доказательство этого утверждения автору не известно. Вместе с тем, численные исследования показывают, что при $0 < \mu < 3$ система (19) с $n = 1$ решений не имеет, а при $\mu > 3$ график зависимости величины $\ln(\mu^\alpha U''(\mu))$ от $\sqrt{\mu}$ при $\alpha = 1 \div 2$ хорошо приближается прямой линией. Это позволяет предположить наличие зависимости

$$U''(\mu) \sim C_1 \mu^\alpha \exp\{-C_2 \sqrt{\mu}\},$$

которая исключает существование решений (19) при больших значениях μ [26].

2 $n\pi$ -кинки, $n > 1$: Уравнение (10) допускает решения типа 4π -кинков, 6π -кинков, 8π -кинков и т. д. Профили этих решений, построенные с использованием указанной выше численной процедуры, изображены на рис. 2. Каждое из этих решений соответствует своему значению μ . Параметр μ при этом принимает дискретные значения. Первые пять значений μ , при которых существуют 4π - и 6π -кинки, приведены в таблице 1.

В работе [19] было обнаружено, что первый из серии 4π -кинков допускает аналитическое представление

$$u_{1^{4\pi}}(\eta) = 8 \operatorname{arctg} \left(\exp \left\{ -\frac{\eta}{\sqrt[4]{3}} \right\} \right), \quad \mu_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



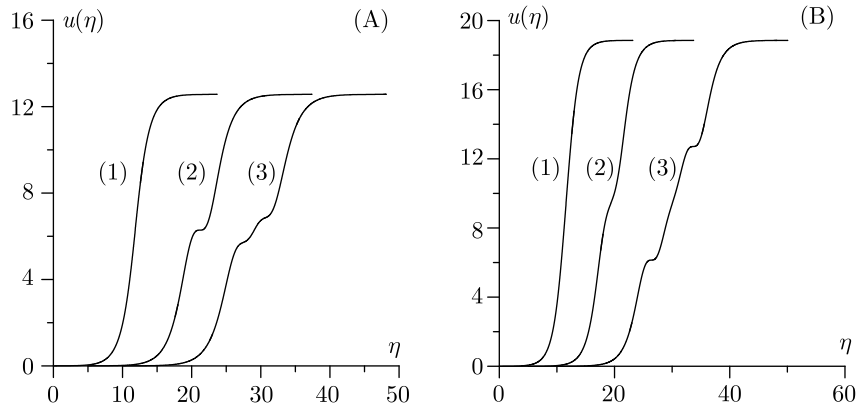


Рис. 2. 4π -кинки (А) и 6π -кинки (В) уравнения (10), соответствующие следующим значениям μ : 4π -кинки — (1) $\mu = 1.155$, (2) $\mu = 2.238$, (3) $\mu = 2.842$; 6π -кинки — (1) $\mu = 0.791$, (2) $\mu = 1.358$, (3) $\mu = 2.122$.

(см. также [20], где построены другие точные решения для близких уравнений).

Существование решений типа *кинк* при дискретных значениях μ соответствует явлению *дискретизации скоростей* кинков [27].

4. Случай (В), $\sigma = -1$, $\mu > 2$

Если $\sigma = -1$, $\mu > 2$ в фазовом пространстве $\mathbf{S} \times \mathbf{R}^3$ особая точка O_0 является седлом. В отличие от случая (А), устойчивые и неустойчивые многообразия O_0 являются двумерными. В нулевом уровне гамильтониана H их трансверсальное пересечение при некотором $\mu = \mu_0$ означает существование решения типа *кинк* в некоторой окрестности $\mu \in (\mu_0 - \Delta\mu, \mu_0 + \Delta\mu)$.

Замена $\xi = \eta/\sqrt{\mu}$ приводит уравнение (10) к виду

$$-\delta^2 u_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\xi\xi} - \sin u = 0, \quad \delta^2 = \frac{1}{\mu}.$$

При $\delta = 0$ указанное уравнение вырождается в уравнение маятника, которое имеет решение типа 2π -кинка. Вопрос о продолжении решения типа 2π -кинка в область $\delta \ll 1$, $\delta \neq 0$ может быть решен в рамках геометрической теории сингулярных возмущений (см. [28], а также работы [29–31], где доказываются существование трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий в сингулярно возмущенной задаче для аналогичных уравнений с полиномиальной нелинейностью).

Численный счет показывает, что пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий особой точки O_0 при $\delta \neq 0$ в нашем случае также имеет место. Численные результаты позволяют говорить о продолжении решения типа 2π -кинка, существующего при $\delta = 0$, в область $\delta \neq 0$. Вместе с тем, имеются и более сильные утверждения [23, 24], полностью описывающие решения типа $2n\pi$ -кинков для уравнения (10). Более точно:

(i) существование 2π -кинка и 2π -антикинка при *всех* значениях $\mu > 2$ для уравнения (10) доказано в § 2 работы [23];

(ii) решения типа 2π -кинка и 2π -антикинка являются *единственными* решениями типа *кинков*, которые описываются уравнением (10) в этой области параметров. Этот факт

следует из теоремы 1 работы [24], где доказывается, что проекции всех траекторий, соответствующих ограниченному решению уравнения (10), на плоскость (u, u') не пересекаются между собой ни при каких значениях $\mu > 2$. В частности, отсюда следуют утверждения о *монотонности* решений 2π -кинка и 2π -антикинка и о том, что множество значений любого ограниченного решения уравнения (10) содержится в некотором интервале длины 2π .

Таким образом, можно заключить, что при $\sigma = -1$ и $\mu > 2$ имеется единственное решение уравнения (10) типа 2π -кинка, являющееся продолжением по параметру μ решения типа 2π -кинка уравнения маятника, соответствующего случаю $\mu = +\infty$. Также имеется аналогичное решение типа 2π -антикинка. Уравнение (10) не допускает в этой области параметров других решений типа *кинк*, в том числе $2n\pi$ -кинков, $n > 1$, характерных для случая (А).

5. Случай (С), $\sigma = -1$, $-2 < \mu < 2$

В этом случае в фазовом пространстве $\mathbf{S} \times \mathbf{R}^3$ особая точка O_0 является седло-фокусом. Собственные значения особой точки O_0 представляют собой четверку $\Lambda_{1,2,3,4} = \pm\alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Известно [23], что при $0 < \mu < 2$ имеется гомоклиническая траектория особой точки O_0 . Для дальнейшего изучения гомоклинических траекторий указанной динамической системы автором было предпринято численное исследование. Было обнаружено, что при $\mu^* < \mu < 2$, $\mu^* \approx -1,61$ существует гомоклиническая траектория Γ_+ , причем эта траектория является трансверсальной. При $\mu = \mu^*$ эта траектория исчезает в результате слияния с другой гомоклинической траекторией. Назовем гомоклиническую траекторию Γ_+ *основной*, а соответствующее ей решение типа 2π -кинка — *основным 2π -кинком*. Основным 2π -кинком характерен тем, что его можно рассматривать как продолжение по параметру μ в область $\mu < 2$ единственного решения типа 2π -кинка, которое имеется при $\mu > 2$ (см. случай (В)). Отличие решений типа кинка при $\mu > 2$ и при $\mu < 2$ состоит в их асимптотическом поведении при η , стремящемся к бесконечности: при $\mu > 2$ кинк имеет монотонную асимптотику, в то время как при $\mu < 2$ на «хвостах» кинка имеются затухающие осцилляции вида $\sim e^{\alpha\eta} \cos(\beta\eta + \varphi_0)$, $\varphi_0 \in [0; 2\pi)$, (см. рис. 3).

Помимо основного 2π -кинка и основного 2π -антикинка существуют решения уравнения (10), представляющие собой *связанные состояния* этих объектов. Этот факт был доказан в работах [23] и [32] при $\sigma = -1$ и $0 < \mu < 2$. Для доказательства в этих работах использовался вариационный метод. Используя терминологию теории динамических систем, можно дать достаточно простую интерпретацию существования таких связанных состояний. Известно [33–36], что в гамильтоновой системе наличие одной трансверсальной гомоклинической сепаратрисы особой точки типа седло-фокус означает появление счетного множества других (многообходных) сепаратрис этой особой точки, которые можно кодировать, используя схему Бернулли. В случае уравнения (10) в фазовом пространстве $\mathbf{S} \times \mathbf{R}^3$ имеется также другая гомоклиническая траектория особой точки O_0 , $\Gamma_- = L_{2\pi} \circ i_2(\Gamma_+)$, которая соответствует решению типа 2π -антикинка (мы назовем его *основным 2π -антикинком*). Наличие двух трансверсальных сепаратрис Γ_+ и Γ_- позволяет предложить кодировку решений, аналогичную введенной в работе [37] (см. также [35], где обсуждается общий случай нескольких гомоклинических сепаратрис особой точки типа седло-фокус).

Рассмотрим «алфавит» \mathcal{B}_N , N — натуральное число, буквами которого являются символы Γ_+ , Γ_- и целые числа, $|n| \geq N$. Установим следующие два правила для образования «слов»:

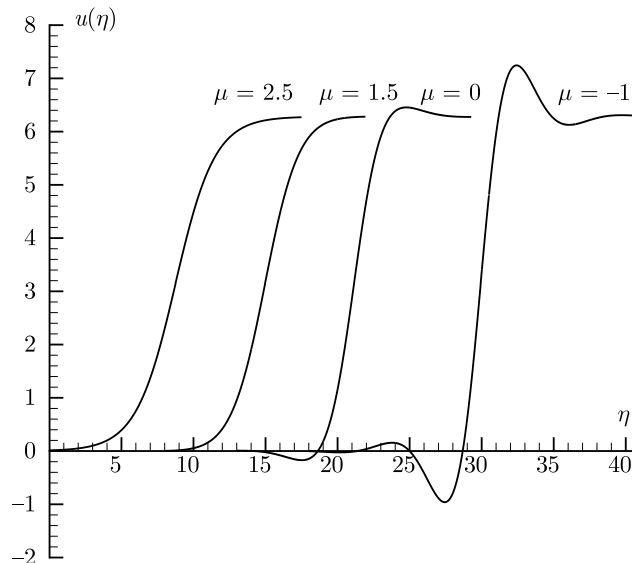


Рис. 3. Профили 2π -кинков при $\mu = 2,5$, $\mu = 1,5$, $\mu = 0$ и $\mu = -1$. При $\mu > 2$ профиль соответствует единственному 2π -кинку уравнения (10), см. раздел 5. Его можно рассматривать как продолжение по параметру решения типа 2π -кинка уравнения синус-Гордона, который соответствует пределу $\mu \rightarrow \infty$. Далее, численные расчеты показывают, что этот 2π -кинк продолжает существовать при переходе через бифуркационное значение $\mu = 2$ (см. раздел 5, где этот кинк называется *основным 2π -кинком*) и исчезает в результате бифуркации при $\mu \approx -1,61$.

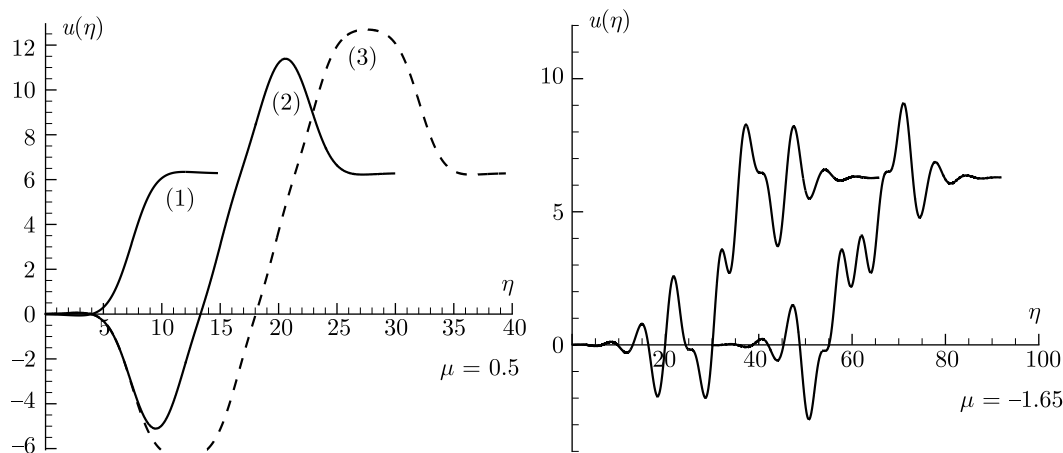


Рис. 4. Различные решения типа 2π -кинков уравнения (10): (а) $\mu = 0,5$, показаны основной 2π -кинк (1) и еще два более сложных 2π -кинка; (б) $\mu = -1,65$, показаны два сложных 2π -кинка. Так как $-1,65 < \mu^*$, при этом значении μ основного 2π -кинка не существует.

- (i) первой и последней буквами слова могут быть только символы Γ_{\pm} ;
- (ii) после символов Γ_{\pm} должно идти целое число, принадлежащее «алфавиту», и наоборот, за целым числом должен идти один из символов Γ_{\pm} .

Рассмотрим множество «слов» \mathcal{A}_N , состоящее из конечных последовательностей вида $\{\Gamma_{\pm}, n_1, \Gamma_{\pm}, n_2, \dots, \Gamma_{\pm}\}$, где $n_i \in \mathcal{B}_N$. Справедливо следующее утверждение [35, 37]:



УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть O_0 — особая точка типа седло-фокус гамильтоновой системы с двумя степенями свободы и Γ_+ и Γ_- — две трансверсальные гомоклинические траектории особой точки O_0 . Тогда существует такая окрестность V контура $\Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \{O_0\}$ (возможно, достаточно малая), что все гомоклинические траектории, лежащие в V , находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством слов \mathcal{A}_N , при некотором N . При этом Γ , гомоклиническая траектория O_0 , соответствующая кодировке $\{\Gamma_{\pm}, n_1, \Gamma_{\pm}, n_2, \dots, \Gamma_{\pm}\}$, либо (а) выходит из O_0 и проходит вдоль гомоклинической траектории Γ_{\pm} , либо (б) делает $|n_1|$ витков в окрестности O_0 , либо (в) проходит вдоль гомоклинической траектории Γ_{\pm} и т. д.

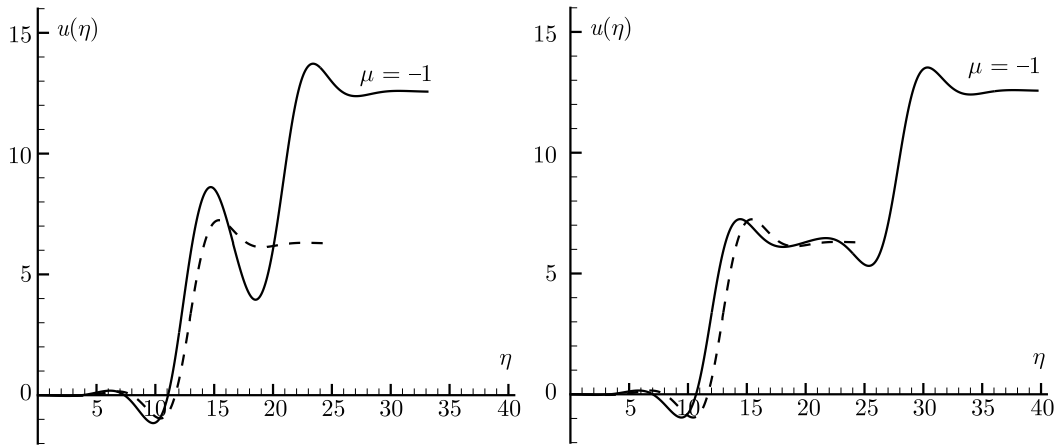


Рис. 5. 4π -кинки, представляющие собой связанные состояния основных 2π -кинков, $\mu = -1$.

Утверждение 5.1 позволяет кодировать решения типа $2k\pi$ -кинков, представляющие собой связанные состояния основных 2π -кинков и 2π -антикинков (см. рис. 5). Решение, соответствующее гомоклинической траектории, которая кодируется словом $\{\Gamma_{\pm}, n_1, \Gamma_{\pm}, n_2, \dots, \Gamma_{\pm}\}$ представляет собой набор «склеенных» основных 2π -кинков и 2π -антикинков, при этом числа $|n_1|, |n_2|, \dots$ соответствуют количеству осцилляций между соседними компонентами (кинками и антикинками). При больших $|n_i|$ можно считать, что длина «полочки», разделяющей два соседних кинка (случай $\{\dots G_+, n_i, G_+ \dots\}$) или кинк и антикинк (случай $\{\dots G_+, n_i, G_- \dots\}$), приближенно оценивается как $2\pi|n_i|/\beta$. Соответственно, при увеличении $|n_i|$ на единицу длина этой «полочки» увеличивается на $2\pi/\beta$. Топологический заряд такого решения равен разности числа основных 2π -кинков и 2π -антикинков в полученной структуре. Качественно ситуация оказывается схожа с результатами работы [38], где исследовался захват линейных волн бегущей структурой, состоящей из джозефсоновских вихрей.

Приведенная выше классификация решений справедлива при $\sigma = -1$, $\mu^* < \mu < 2$, но не является полной, так как описывает только те гомоклинические траектории, которые целиком лежат в малой окрестности контура $\Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \{O_0\}$. Например, гомоклинические траектории особой точки O_0 существуют и при $-2 < \mu < \mu^*$, когда Γ_+ уже не существует (см. рис. 4). Полное описание всех гомоклинических траекторий особой точки O_0 во всем диапазоне $-2 < \mu < 2$, даже нестрогое и базирующееся на численном исследовании, представляется достаточно непростой задачей.

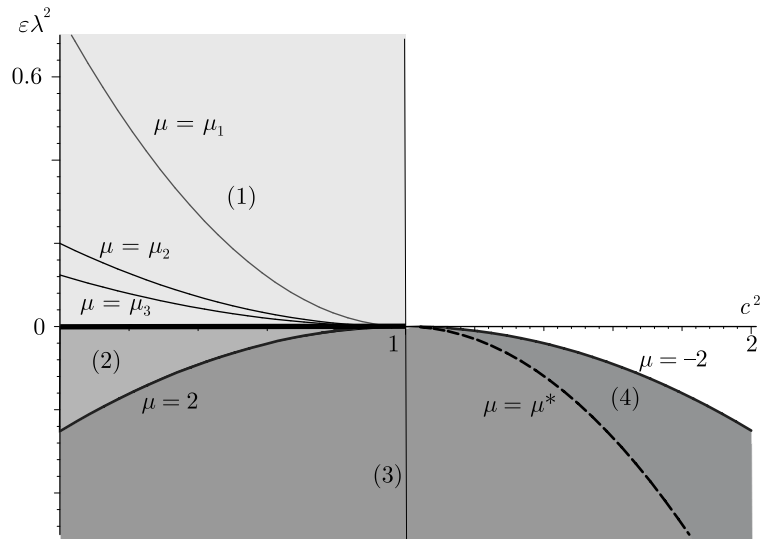


Рис. 6. Диаграмма, показывающая области существования решений типа *кинк* уравнения (6) в пределе слабой нелокальности, когда описание в рамках приближения (8) является допустимым. Введены обозначения: $\varepsilon = -\frac{1}{2}\widehat{G}''(0)$, $\mu = (1 - c^2)/\lambda\sqrt{|\varepsilon|}$. Ось абсцисс соответствует вырождению уравнения (6) в уравнение синус-Гордона, причем жирной черной линией помечен промежуток, где существует решение этого уравнения типа 2π -кинка. Это решение (основной 2π -кинк) может быть продолжено в области 2 и 3, вплоть до пунктирной линии, соответствующей $\mu = \mu^* \approx -1.61$. При этом в области 2 основной 2π -кинк является единственным решением типа кинка, в то время как в области 3 имеются другие решения типа кинков, в том числе бесконечное множество связанных состояний основных 2π -кинок и антикинок. В области 1 имеются решения типа 4π -, 6π -, 8π -кинок, которые соответствуют дискретному набору кривых (показаны кривые, соответствующие трем простейшим 4π -кинкам).

6. Случай (D), $\sigma = -1$, $\mu < -2$

В этом случае в фазовом пространстве $\mathbf{S} \times \mathbf{R}^3$ особая точка O_0 является эллиптической особой точкой. Соответственно, корни уравнения (16) являются чисто мнимыми, $\Lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\Lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$, где

$$\omega_1 = \left(\frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} \right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(\frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} \right)^{1/2}.$$

Необходимым условием [39] для существования выходящей из O_0 и входящей в O_0 траекторий является наличие резонансных соотношений между ω_1 и ω_2 вида $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = 0$, $|m_{1,2}| \leq 4$, $m \in \mathbf{Z}$. Такие соотношения могут иметь место лишь при выделенных значениях параметра μ . Вместе с тем, для существования решения типа $2\pi n$ -кинка необходимо не только существование входящей и выходящей траекторий точки O_0 , но и их слияние после n оборотов вокруг цилиндра $\mathbf{S} \times \mathbf{R}^3$. Такая ситуация не является случаем общего положения в рассматриваемой однопараметрической системе, поэтому исследования ситуации (D) в случае резонансов не проводилось.

7. Существование решений типа кинков: общая картина

Приведенные выше результаты исследования уравнения (9) удобно представить в виде следующей диаграммы (рис. 6). Она включает параметры ядра исходного уравнения (6), λ и $\varepsilon = -\frac{1}{2}\widehat{G}''(0)$, а также скорость кинка c .

Решения типа кинков содержатся во всех областях, закрашенных серым цветом. В незакрашенных областях отсутствие решений типа кинков обеспечивается утверждением 3.1 (область выше оси абсцисс) и эллиптическим типом особой точки O_0 (область ниже оси абсцисс). Промежуток $[0; 1]$ горизонтальной оси выделен черной жирной линией и соответствует 2π -кинку уравнения синус-Гордона. Это решение (основной 2π -кинк) может быть продолжено в области 2 и 3, вплоть до пунктирной линии, соответствующей $\mu = \mu^* \approx -1.61$. При этом в области 2 основной 2π -кинк является единственным решением типа кинка, в то время как в области 3 имеются другие решения типа кинков, в том числе бесконечное множество связанных состояний основных 2π -кинков и антикинков. Из диаграммы видно, что скорость движения таких комплексов может быть как больше единицы, так и меньше единицы. В области 1 2π -кинки не обнаружены, и, по всей видимости, их нет. Однако имеются решения типа 4π -, 6π -, 8π -кинков, которые соответствуют дискретному набору кривых (на рисунке показаны кривые, соответствующие трем простейшим 4π -кинкам, значения μ приведены в таблице 1).

Полученная картина, по мнению автора, может представлять интерес для моделей нелокальной джозефсоновской электродинамики, основанной на уравнении (6). В зависимости от геометрии джозефсоновского перехода и физических свойств электродов, которые его образуют, ядро нелокального оператора может существенно изменяться (обзор известных из литературы типов ядер можно найти в [12]). Приложение представленных в работе результатов позволяет качественно описать типы вихревых решений в слабонелокальном пределе для большей части рассмотренных в литературе моделей.

В свете изложенного, хотелось бы выделить некоторые задачи, исследование которых представило бы, по мнению автора, интерес для данного круга приложений.

Во-первых, насколько автору известно, строгое доказательство отсутствия 2π -кинков для (10) при $\sigma = 1$ (в случае (A)) на сегодняшний день отсутствует. Замена $\xi = \eta/\sqrt{\mu}$ приводит уравнение (10) к виду

$$\delta^2 u_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\xi\xi} - F(u) = 0, \tag{20}$$

где $\delta^2 = 1/\mu$ и

$$F(u) = \sin u. \tag{21}$$

Известно строгое утверждение об отсутствии локализованных решений в близкой задаче [40], для уравнения (20) с нелинейностью

$$F(u) = u - u^2. \tag{22}$$

При малых δ отсутствие этих решений связано с явлением расщепления сепаратрис, которое удастся описать, используя продолжение решений (20) с действительной оси в комплексную плоскость [41]. Вместе с тем, вопрос о возможности аналитического продолжения решений уравнения (20) с нелинейностью (21) в комплексную плоскость остается неизученным. В данном контексте интерес представляют, в том числе, возможные типы особых точек,

которые имеет аналитическое продолжение, и так называемых «естественных границ», за которые аналитическое продолжение невозможно. Известно, что «естественные границы» могут представлять собой фрактальные множества, по крайней мере это так в случае уравнения (20) с нелинейностью (22) (см. [42]).

Во-вторых, по мнению автора, интерес представляет задача о возможных структурах типа *кинк* для уравнений типа (10) с нелинейностью более общего вида. Например, в работах [15] и [16] представлены решения типа 2π -кинков для случая, когда синусная нелинейность приближена кусочно-линейной функцией. Кроме того, с физической точки зрения представляется содержательным исследование решений типа кинков в модели с нелинейностью, представленной двумя гармониками, $F(u) = \sin u + A \sin 3u$, где A — действительный параметр.

В-третьих, представляется интересной задача об исследовании исходного уравнения (6) методами теории динамических систем. В связи с этим следует заметить, что решения (6) типа бегущих волн стационарного профиля удовлетворяют уравнению

$$c^2 u_{zz} + \sin u = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(z - z') u_{z'}(z') dz', \quad (23)$$

где $z = x - ct$, и c — скорость волны. В работе [27] было показано, что для случая ядер специального вида (E -ядер, по терминологии [27]) уравнение (23) сводится к конечномерной гамильтоновой системе. При некоторых ограничениях, качественный анализ предсказывает для этой системы явление дискретизации скоростей кинков, подобное описанному выше, см. случай (А). В случае ядра более общего типа можно показать, что исходное интегродифференциальное уравнение сводится к дифференциальному уравнению в банаховом пространстве. Изучение свойств динамических систем, порождаемых уравнениями такого типа, представляется интересной задачей для будущих исследований.

Список литературы

- [1] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
- [2] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
- [3] Likharev K. Dynamics of Josephson junctions and circuits. New York–London–Paris–Montreux–Tokyo: Gordon and Breach, 1986. 614 с.
- [4] Pokrovsky V. L., Virostek A. Long-range interactions in commensurate-incommensurate phase transition // J. Phys. C: Solid State Phys., 1983, vol. 16, no. 23, pp. 4513–4525.
- [5] Braun O. M., Kivshar Yu. S., Zelenskaya I. I. Kinks in the Frenkel–Kontorova model with long-range interparticle interactions // Phys. Rev. B, 1990, vol. 41, pp. 7118–7138.
- [6] Браун О., Кившарь Ю. Модель Френкеля–Конторовой: Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008. 519 с.
- [7] Иванченко Ю. М., Соболева Т. К. Джозефсоновский переход с нелокальным взаимодействием // Письма в ЖЭТФ, 1990, т. 51, вып. 2, с. 100–102.
- [8] Алиев Ю. М., Силин В. П., Урюпин С. А. К теории нелинейных диспергирующих волн в джозефсоновских контактах // СФХТ, 1992, т. 5, № 2, с. 228–235.

- [9] Gurevich A. Nonlocal Josephson electrodynamics and pinning in superconductors // *Phys. Rev. B*, 1992, vol. 46, no. 5, pp. 3187–3190.
- [10] Abdumalikov A. A. (Jr.), Fistul M. V., Ustinov A. V. Vortex radiation in long narrow Josephson junctions: Theory and experiment // *Phys. Rev. B*, 2005, vol. 72, 144526.
- [11] Abdumalikov A. A. (Jr.), Kurin V. V., Helm C., De Col A., Koval Y., Ustinov A. V. Nonlocal electrodynamics of long ultranarrow Josephson junctions: Experiment and theory // *Phys. Rev. B*, 2006, vol. 74, 134515.
- [12] Abdumalikov A. A. (Jr.), Alfimov G. L., Malishevskii A. S. Nonlocal electrodynamics of Josephson vortices in superconducting circuits // *Supercond. Sci. Technol.*, 2009, vol. 22, 023001.
- [13] Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media // *J. Phys. Soc. Japan*, 1972, vol. 33, pp. 260–264.
- [14] Ахмедиев Н. Н., Анкевич А. Солитоны, нелинейные импульсы и пучки. М.: Физматлит, 2003. 304 с.
- [15] Силин В. П., Студенов А. В. О квантованности движения и черенковской структуре джозефсоновского вихря // *ЖЭТФ*, 2000, т. 117, вып. 6, с. 1230–1241.
- [16] Елеонский В. М., Кулагин Н. Е. О спектре скоростей топологических солитонов в нелокальной джозефсоновской электродинамике // *ЖЭТФ*, 2001, т. 119, вып. 5, с. 971–978.
- [17] Malishevskii A. S., Silin V. P., Uryupin S. A. On the possibility of experimental observation of Cherenkov losses effect on the Josephson vortex induced motion // *Phys. Lett. A*, 2006, vol. 348, pp. 361–364.
- [18] Alfimov G. L., Eleonsky V. M., Kulagin N. E., Mitskevich N. V. Dynamics of topological solitons in models with nonlocal interactions // *Chaos*, 1993, vol. 3, no. 3, pp. 405–415.
- [19] Bogdan M. M., Kosevich A. M. Radiationless motion of one-dimensional solitons in dispersive medium // *Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology* / Spatschek K. H., Mertens F. G. New York: Plenum Press, 1994, pp. 373–376. (NATO ASI Series, Physics, vol. 329.)
- [20] Bogdan M. M., Kosevich A. M., Maugin G. A. Formation of soliton complexes in dispersive systems // *Eur. Phys. J. B Condens. Matter Phys.*, 1999, vol. 2, no. 2(18), pp. 255–265.
- [21] Champneys A., Kivshar Yu. S. Origin of multikinks in dispersive nonlinear systems // *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 61, no. 3, pp. 2551–2554.
- [22] Kosevich A. M., Grishaev V. I. On the conditions for the existence of 1D magnetic solitons with frequency characteristics falling in the continuous spectrum // *Low Temperature Phys.*, 2002, vol. 28, nos. 8–9, pp. 601–605.
- [23] Kalies W. D., Vandervorst R. C. A. M. Multitransition homoclinic and heteroclinic solution of the extended Fisher–Kolmogorov equation // *J. Differential Equations*, 1996, vol. 131, pp. 209–228.
- [24] Van den Berg J. B. The phase-plane picture for a class of fourth-order conservative differential equations // *J. Differential Equations*, 2000, vol. 161, pp. 110–153.
- [25] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике: Ч. 1. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 416 с.
- [26] Алфимов Г. Л., Гончаров О. В., в процессе подготовки.
- [27] Alfimov G. L., Eleonsky V. M., Lerman L. M. Solitary wave solutions of nonlocal sine-Gordon equations // *Chaos*, 1998, vol. 8, no. 1, pp. 257–271.
- [28] Jones C. K. R. T. Geometric singular perturbation theory // *Dynamic Systems* R. Johnson. Berlin: Springer, 1995, pp. 44–118. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 1609.)



- [29] Gardner R. A., Jones C. K. R. T. Travelling waves of perturbed diffusion equation arising in a phase field model // *Indiana Univ. Math. J.*, 1990, vol. 39, pp. 1197–1222.
- [30] Akveld M. E., Hulshof J. Travelling wave solution of a fourth-order semilinear diffusion equation // *Appl. Math. Lett.*, 1998, vol. 11, pp. 115–120.
- [31] Kyrychko Yu. N., Blyuss K. B. Persistence of travelling waves in a generalized Fisher equation // *Phys. Lett. A*, 2009, vol. 373, pp. 668–674.
- [32] Kalies W. D., Kwapisz J., Vandervorst R. C. A. M. Homotopy classes for stable connections between Hamiltonian saddle-focus equilibria // *Commun. Math. Phys.*, 1998, vol. 193, pp. 337–371.
- [33] Devaney R. L. Homoclinic orbits in Hamiltonian systems // *J. Differential Equations*, 1976, vol. 21, pp. 431–438.
- [34] Беляков Л. А., Шильников Л. П., Гомоклинические кривые и сложные уединенные волны // *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. / Баутин Н. Н. [и др.] Горький: Горьковск. гос. ун-т им. Лобачевского*, 1985, с. 22–35.
- [35] Lerman L. M. Complex dynamics and bifurcations in a Hamiltonian system having a transversal homoclinic orbit to a saddle focus // *Chaos*, 1991, vol. 1, no. 2, pp. 174–180.
- [36] Lerman L. M. Dynamical phenomena near a saddle-focus homoclinic connection in a Hamiltonian system // *J. Stat. Phys.*, 2000, vol. 101, nos. 1–2, pp. 357–372.
- [37] Alfimov G. L., Korolev V. G. On multikink states described by the nonlocal sine-Gordon equation // *Phys. Lett. A*, 1998, vol. 246, pp. 429–435.
- [38] Малишевский А. С., Силин В. П., Урюпин С. А. Склеивание джозефсоновских вихрей черенковски-захваченными волнами Свихарта // *ЖЭТФ*, 2000, т. 117, вып. 4, с. 771–789.
- [39] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
- [40] Amick C. J., McLeod J. B. A singular perturbation problem in water waves // *Stab. Appl. Anal. Control Media*, 1992, pp. 127–148.
- [41] Pomeau Y., Ramani A., Grammaticos B. Structural stability of the Korteweg–de Vries solitons under singular perturbation // *Phys. D*, 1988, vol. 31, pp. 127–134.
- [42] Takaoka M. Pole distribution and steady-pulse solution of the fifth-order Korteweg–de Vries equation // *J. Phys. Soc. Japan*, 1989, vol. 58, no. 1, pp. 73–81.