

Регулярные и стохастические автоколебания в модели реологического осциллятора

И. А. Башкирцева, А. Ю. Зубарев, Л. Ю. Исакова, Л. Б. Ряшко

Уральский государственный университет
Россия 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51
irina.bashkirtseva@usu.ru, andrey.zubarev@usu.ru, larisa.isakova@usu.ru, lev.ryashko@usu.ru

Получено 07 мая 2009 г.

Работа посвящена исследованию математической модели потока суспензии, для которой в экспериментах были обнаружены переходы от стационарных режимов к колебательным. Проведенный бифуркационный анализ позволил выделить в пространстве параметров зоны устойчивых равновесий и предельных циклов. Исследованы особенности наблюдаемой здесь бифуркации Хопфа в зависимости от степени жесткости системы. На основе метода функции стохастической чувствительности проведен параметрический анализ воздействия случайных возмущений на аттракторы системы. Показано, что с увеличением жесткости стохастическая чувствительность автоколебаний резко возрастает. Выявлена узкая зона сверхвысокой чувствительности автоколебаний, когда даже малые, по сути фоновые помехи приводят к существенным флуктуациям их амплитуды.

Ключевые слова: реология суспензий, устойчивость, чувствительность, стохастические автоколебания

I. A. Bashkirtseva, A. Yu. Zubarev, L. Yu. Isakova, L. B. Ryashko
Regular and stochastic auto-oscillations in the reological model

This paper is devoted to research of mathematical model of a suspension flow. For these flows, the transitions from stationary to the oscillatory regimes have been observed in experiments. Bifurcation analysis allows us to divide the space of parameters onto steady equilibria and limit cycles zones. Details of Hopf bifurcation depending on degree of system stiffness are investigated. On the basis of the stochastic sensitivity function technique, the parametrical analysis of influence of random disturbances on the system attractors is carried out. It is shown that as a system stiffness increases, the stochastic sensitivity of oscillations rises sharply. The narrow zone of super-sensitivity of oscillations was found. In this zone, even small background disturbances result in the essential fluctuations of their amplitude.

Keywords: reology, suspension, stability, sensitivity, stochastic oscillations

Mathematical Subject Classifications: 34F05

Введение

Реофизика дисперсных и сложных жидкостей привлекает широкое внимание как экспериментаторов, так и теоретиков. Известно, что многие явления, недавно обнаруженные в потоках концентрированных сложных жидкостей (коллоидных и грубодисперсных суспензий, растворов ПАВ и полимеров), обусловлены нелинейной зависимостью между вязким напряжением и скоростью деформационного течения [1–5]. Так, например, в экспериментах [6] с различными высококонцентрированными суспензиями микронных частиц была обнаружена N -образная зависимость скорости сдвига $\dot{\gamma}$ от напряжения σ . Качественно эта зависимость $\dot{\gamma} = f(\sigma)$ проиллюстрирована на рис. 1. Экспериментально было обнаружено, что если течение суспензии возбуждается постоянным напряжением Σ , попадающим на убывающую ветку функции $f(\sigma)$, то стационарное течение теряет устойчивость, возникают сильные осцилляции и автоколебания скорости течения. Подобные реологические неустойчивости при течении различных сложных жидкостей наблюдались также в [7–9].

Цель предлагаемой работы — математическое моделирование и исследование основных закономерностей автоколебательных явлений при течении нелинейных сложных жидкостей.

Построение математической модели начнем со следующей идеализации, которая, в основных чертах, отражает структуру измерительной ячейки в современных ротационных реометрах, которые используются в большинстве экспериментов по определению сдвиговых реологических свойств сложных жидкостей. Рассмотрим бесконечно широкую плоскую щель, заполненную нелинейной сложной жидкостью. Мы предполагаем, что нижняя плоскость щели неподвижно закреплена, а к верхней, в ее плоскости, приложено сдвиговое напряжение Σ . Мы предполагаем, что связь между локальными значениями скорости сдвига $\dot{\gamma}$ и напряжения σ задается N -образной функцией f , проиллюстрированной на рис. 1. Рассмотрим, как особенности этой функции связаны с характером течения жидкости в щели. Сначала, при увеличении приложенного напряжения Σ в диапазоне $0 < \Sigma < \Sigma_1$, скорость сдвига $\dot{\gamma}$ увеличивается. Выпуклость вверх функции f указывает на то, что $\dot{\gamma}$ при увеличении Σ растет медленнее, чем линейно, т. е. с ростом Σ вязкость среды растет. Рост вязкости различных сложных жидкостей с ростом скорости сдвига или приложенного напряжения неоднократно наблюдался в экспериментах (см., например, [1–5]). На участке $0 < \Sigma < \Sigma_1$ стационарное течение среды устойчиво. Начиная с некоторого значения Σ_1 , при увеличении приложенного напряжения скорость сдвига начинает уменьшаться. Как уже отмечалось, на убывающем участке функции f в экспериментах наблюдается потеря устойчивости стационарного течения и возникновение автоколебаний. Так продолжается до некоторого значения Σ_2 . При дальнейшем увеличении приложенного сдвигового напряжения ($\Sigma > \Sigma_2$) вновь происходит качественное изменение важнейшей динамической характеристики системы. Функция f снова становится возрастающей, течение — устойчивым.

Физическая природа N -образной зависимости стационарной скорости сдвига от напряжения до конца не выяснена. Из литературы известны различные попытки микроскопического объяснения и описания эффектов сдвигового упрочнения и осциллирующих течений в сложных жидкостях. Как правило, объяснения сдвигового упрочнения основываются на большом числе произвольных допущений о микро-и мезоскопических причинах этого явления, физическое содержание которых не ясно и не может быть экспериментально проверено. Осциллирующий характер течения объяснялся возникновением и разрушением внутренних структур, состоящих из частиц суспензии, своего рода флуктуаций плотности или энергии частиц. Для описания эволюции таких флуктуаций также использовались довольно искус-

ственные конструкции, приводящие к сложным уравнениям, содержащим большое число подгоночных параметров, которые не могут быть измерены из независимых экспериментов.

В работе [10] показано, что ответственными за N -образную форму функции f могут быть эффекты контактного трения между частицами суспензии и предложена простая феноменологическая модель вязкоупругого поведения сложной жидкости. Первые расчеты показали, что совокупность вязкоупругости среды с отрицательностью дифференциальной вязкости приводит к автоколебательным эффектам, которые, по крайней мере качественно, соответствуют наблюдаемым в экспериментах.

Целью данной работы является детальный бифуркационный анализ аппроксимации модели, предложенной в [10], исследование устойчивости ее стационарных и колебательных режимов как к детерминированным возмущениям состояний в начальный момент времени, так и к случайным помехам, действующим на систему в ходе ее функционирования.

Детерминированный анализ устойчивости опирается на исследование классических характеристик — показателей Ляпунова. При анализе реакции системы на случайные возмущения используется разработанный авторами метод стохастической функции чувствительности [11].

Математическая модель

В работе [10] рассматривается следующая физическая идеализация. Между двумя параллельными плоскостями $z = 0$, $z = h$ располагается слой суспензии. Здесь h — расстояние между плоскостями. Нижняя плоскость $z = 0$ является неподвижной, к верхней $z = h$ прикладывается однонаправленное сдвиговое напряжение Σ . Перемещение верхней плоскости приводит в движение весь слой суспензии. В силу симметрии, здесь удастся ограничиться одной пространственной переменной z . Физическое состояние системы однозначно задается функцией вязкого напряжения $\sigma(t, z)$. Эта функция в области $[0, \infty) \times [0, h]$ удовлетворяет уравнению [10] в частных производных

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(f(\sigma) + G \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \quad (1)$$

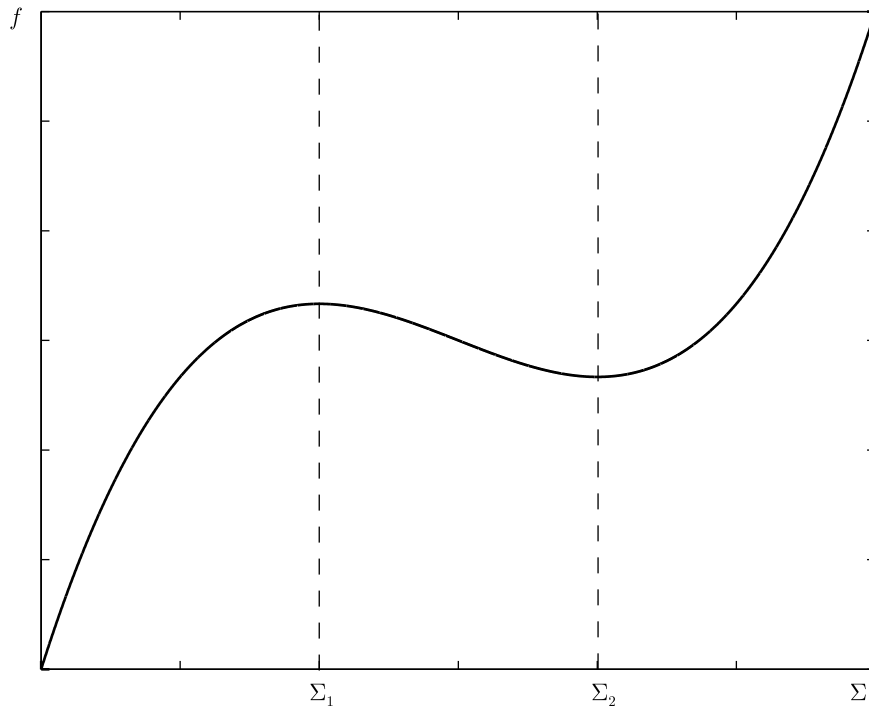
с краевыми условиями

$$\sigma(t, h) = \Sigma, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z}(t, 0) = 0. \quad (2)$$

Здесь функция $f(\sigma)$ отражает N -образный характер зависимости скорости сдвига от напряжения, ρ — плотность среды, G — релаксационный параметр, для которого величина $\frac{1}{G}$ играет роль модуля упругости среды.

Первое из краевых условий (2) отражает единственное внешнее воздействие на систему — постоянное приложенное к верхней плоскости сдвиговое напряжение Σ . Второе из условий (2) соответствует выполнению принципа прилипания на нижней неподвижной плоскости щели. Начальные данные $\sigma(0, z) = \varphi(z)$ однозначно определяют решение этой краевой задачи. При каждом Σ система имеет стационарное решение $\sigma(t, z) \equiv \Sigma$.

В данной работе для системы (1)–(2) — распределенной модели течения потока — исследуется трехслойная дискретизация, основанная на методе прямых. Рассмотрим на трех прямых $z = z_i$, где $z_0 = 0$, $z_1 = \frac{h}{2}$, $z_2 = h$ соответствующие аппроксимации $\sigma_i(t)$ для функ-

Рис. 1. График функции $f(\sigma)$.

ций $\sigma(t, z_i)$. Используя формулу численного дифференцирования

$$\frac{\partial^2 \sigma(t, z_1)}{\partial z^2} \doteq 4 \frac{\sigma_0(t) - 2\sigma_1(t) + \sigma_2(t)}{h^2},$$

для уравнения (1) на прямой $z = z_1$ можно записать аппроксимацию

$$\rho \left(\frac{df(\sigma_1)}{d\sigma} \frac{d\sigma_1}{dt} + G \frac{d^2 \sigma_1}{dt^2} \right) = 4 \frac{\sigma_0(t) - 2\sigma_1(t) + \sigma_2(t)}{h^2}. \quad (3)$$

Краевые условия, в свою очередь, приводят к уравнениям

$$\sigma_2(t) = \Sigma, \quad \sigma_1(t) - \sigma_0(t) = 0. \quad (4)$$

Исключая из (3), (4) функции $\sigma_0(t)$ и $\sigma_2(t)$, получаем для $\sigma_1(t)$ следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$G\rho \frac{d^2 \sigma_1}{dt^2} + \rho f'(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{dt} = 4 \frac{\Sigma - \sigma_1}{h^2}. \quad (5)$$

Решение $\sigma_1(t) \equiv \Sigma$ уравнения (5) является единственным положением равновесия. Наряду с этим равновесием, в рассматриваемой модели может наблюдаться другой вид аттракторов — предельный цикл.

Анализ аттракторов детерминированной модели

Уравнение (5) в переменных

$$x = \sigma_1, \quad y = \frac{d\sigma_1}{dt}$$

можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{4}{G\rho h^2}x - \frac{f'(x)}{G}y + \frac{4}{G\rho h^2}\Sigma. \end{aligned} \quad (6)$$

Единственным равновесием этой системы является точка $x = \Sigma, y = 0$. Характер поведения системы (6) вблизи этой точки можно исследовать с помощью системы первого приближения с матрицей

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{G\rho h^2} & -\frac{f'(\Sigma)}{G} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Собственные числа матрицы F имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{f'(\Sigma)}{2G} \pm \sqrt{\left(\frac{f'(\Sigma)}{2G}\right)^2 - \frac{4}{G\rho h^2}}.$$

В рассматриваемой модели устойчивость равновесия не зависит от параметров G, ρ, h , а определяется только знаком $f'(\Sigma)$. Если $f'(\Sigma) > 0$, то равновесие $x = \Sigma, y = 0$ асимптотически устойчиво, если $f'(\Sigma) < 0$, то неустойчиво. Иначе говоря, зона устойчивости отвечает участкам возрастания функции $f(\Sigma)$, а зона неустойчивости — участкам убывания $f(\Sigma)$. Как видим, данная модель отражает главное качественное свойство системы, обнаруженное в экспериментах.

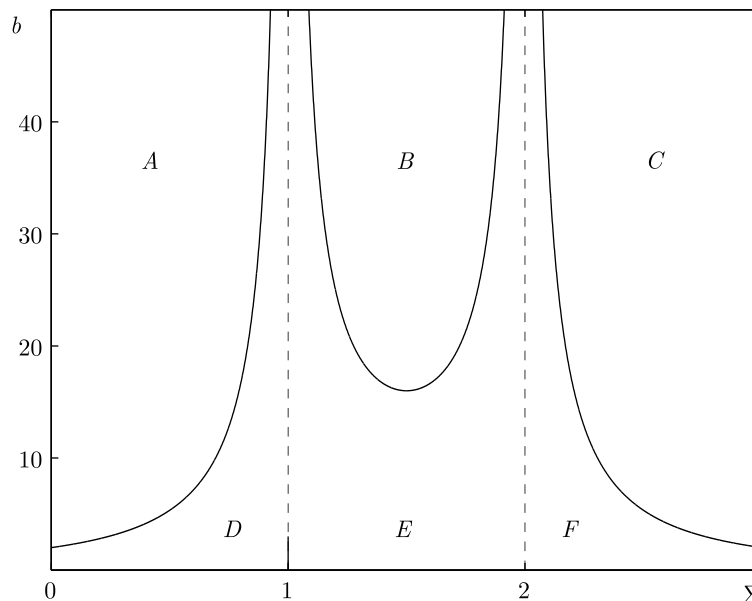


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма равновесия $x = \Sigma, y = 0$. Зоны A, C — устойчивый узел, B — неустойчивый узел, D, F — устойчивый фокус, E — неустойчивый фокус.

Для детального исследования возможных режимов динамики нелинейной системы (6) зафиксируем ряд параметров. Пусть $G = \rho = h = 1$, $f(x) = k(x^3/3 - x^2 + x/2)$. Тогда

$f'(x) = k(x^2 - 3x + 2)$. Функция $f(x)$ моделирует характерный тип зависимости, полученной опытным путем (см. рис. 1).

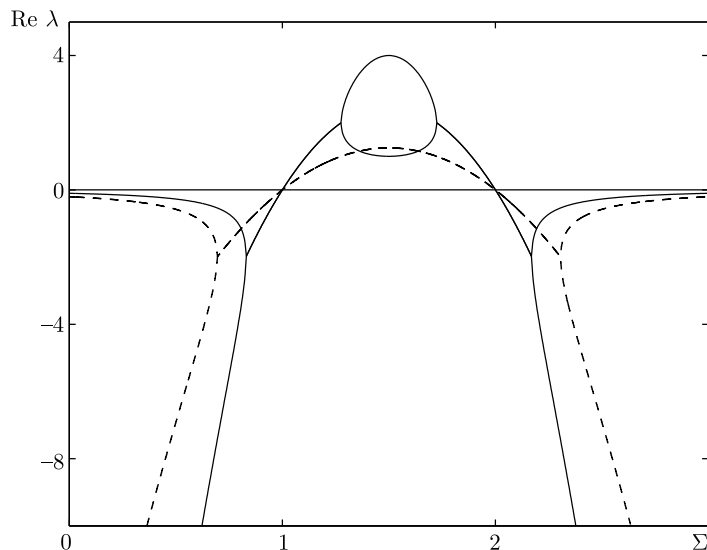


Рис. 3. Графики функций $\text{Re } \lambda_{1,2}(\Sigma)$ при $k = 10$ (пунктир) и $k = 20$ (сплошная линия).

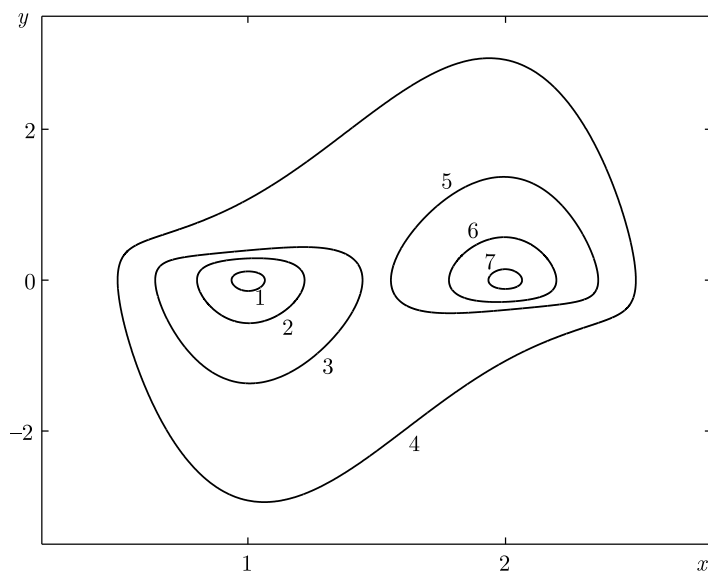


Рис. 4. Предельные циклы системы для $k = 10$: при $\Sigma = 1.001$ (1), $\Sigma = 1.01$ (2), $\Sigma = 1.03$ (3), $\Sigma = 1.5$ (4), $\Sigma = 1.97$ (5), $\Sigma = 1.99$ (6), $\Sigma = 1.999$ (7).

Положительный параметр k управляет степенью жесткости этой зависимости. Будем изучать динамические свойства системы в зависимости от двух параметров Σ и k . Для системы с такими параметрами корни $\Sigma_1 = 1, \Sigma_2 = 2$ уравнения $f'(x) = 0$ задают точки бифуркации. При $\Sigma < \Sigma_1$ равновесие $x = \Sigma$ устойчиво. При переходе параметра Σ через Σ_1 в зону $\Sigma_1 < \Sigma < \Sigma_2$ это равновесие теряет устойчивость. При переходе параметра Σ через Σ_2 в зону $\Sigma > \Sigma_2$ равновесие снова становится устойчивым. Отметим, что точки бифуркации Σ_1 и Σ_2 не зависят от параметра k . На рис. 2 представлен параметрический портрет системы. Две вертикальные пунктирные линии $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma = \Sigma_2$ разделяют зоны

устойчивости и неустойчивости. В области $A \cup B \cup C$ равновесие является узлом, а в области $D \cup E \cup F$ — фокусом. Граница между зонами узлов и фокусов задается уравнением $k = \frac{4}{|\Sigma^2 - 3\Sigma + 2|}$.

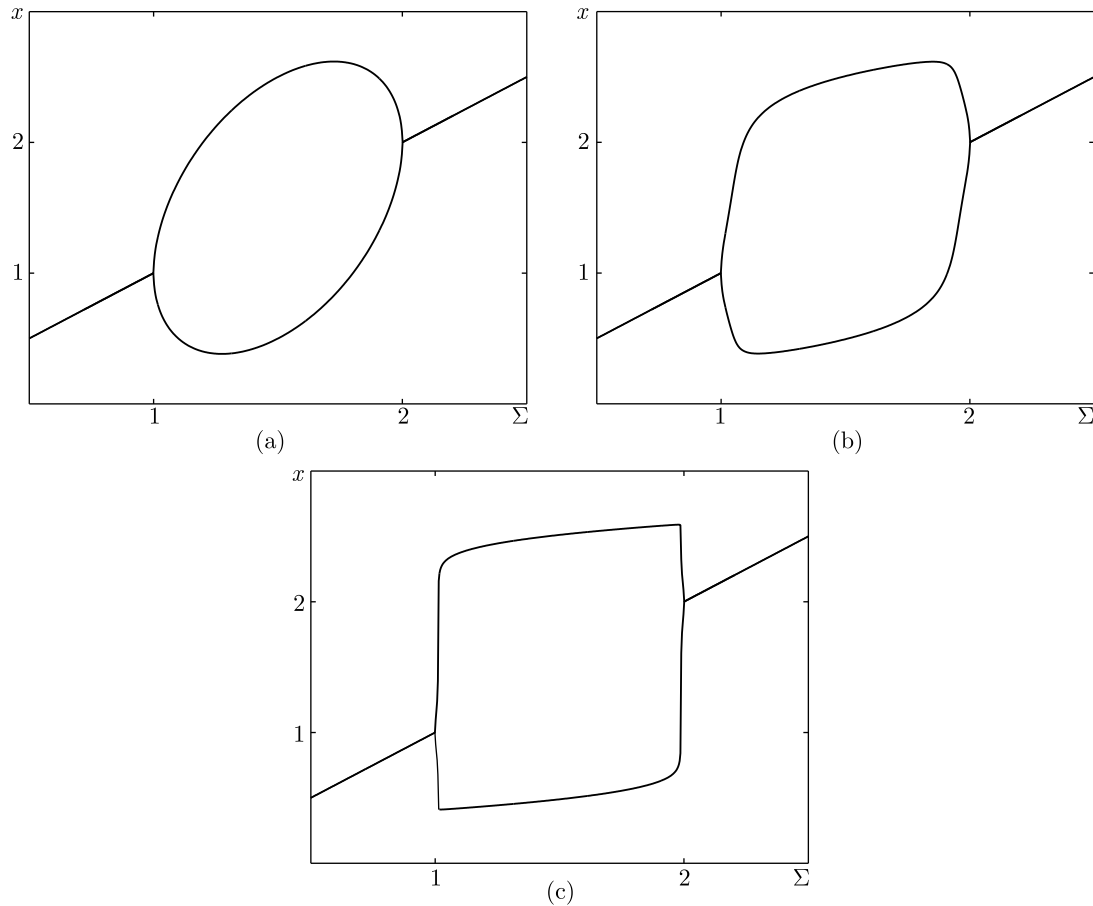


Рис. 5. Экстремальные значения x на аттракторах системы. а) $k = 1$, б) $k = 10$, в) $k = 20$.

Общий характер изменения собственных значений матрицы системы первого приближения при вариации параметра Σ представлен на рис. 3 графиками $\text{Re } \lambda_{1,2}(\Sigma)$ для $k = 5$ и $k = 20$.

Как видно из рис. 3, увеличение параметра k сопровождается тем, что у устойчивого (неустойчивого) равновесия степень его устойчивости (неустойчивости) возрастает. Коэффициент жесткости $\eta = \frac{\max |\lambda_{1,2}|}{\min |\lambda_{1,2}|}$ для системы (6) в окрестности равновесия-узла имеет асимптотику $\eta = O(k^2)$.

Потеря устойчивости равновесия при переходе Σ через Σ_1 слева направо сопровождается появлением в системе (6) устойчивого предельного цикла. В системе наблюдается мягкая бифуркация Хопфа. На рис. 4 изображены предельные циклы системы (6) при $k = 5$ для $\Sigma = 1.001, 1.01, 1.03, 1.5, 1.97, 1.99, 1.999$.

По мере удаления от точки бифуркации размер предельного цикла достаточно быстро возрастает и стабилизируется. С увеличением параметра k зона этого перехода существенно сокращается. Для достаточно больших k эта зона перехода настолько узкая, что наблюда-

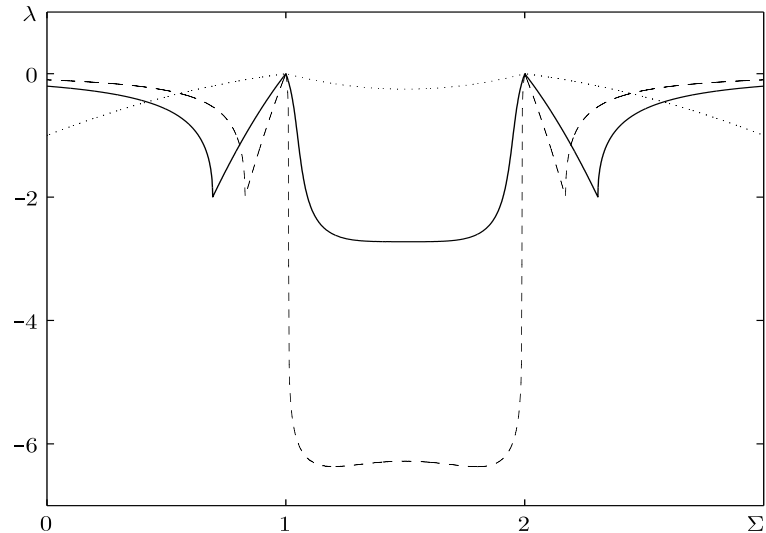


Рис. 6. Характеристический показатель аттракторов системы при $k = 1$ (точки), $k = 10$ (сплошная линия) и $k = 20$ (пунктир).

емая бифуркация выглядит как жесткая. Это явление наглядно продемонстрировано на рис. 5, где представлены экстремальные значения переменной x для аттракторов системы (равновесий и циклов) на интервале $0 < \Sigma < 3$ при $k = 1, 10, 20$. Для жесткого случая $k = 20$ амплитуда автоколебаний практически не меняется на интервале $\Sigma_1 < \Sigma < \Sigma_2$.

Стандартное количественное описание устойчивости цикла дается характеристическим показателем λ . На рис. 6 представлена зависимость от Σ характеристических показателей для циклов с параметрами $k = 1, 10, 20$. Как видим, с ростом k степень устойчивости цикла увеличивается. При Σ , близких к Σ_1 и Σ_2 , показатели малы — циклы вблизи точек бифуркаций слабо устойчивы. По мере удаления от точек бифуркаций $\Sigma_{1,2}$ степень устойчивости циклов быстро увеличивается и стабилизируется. На большей части интервала (Σ_1, Σ_2) степень устойчивости циклов практически не изменяется. При приближении Σ к правой бифуркационной границе Σ_2 циклы теряют запас устойчивости. При переходе через Σ_2 слева направо цикл становится неустойчивым, а равновесие $x \equiv \Sigma$ — устойчивым. В системе наблюдается обратная бифуркация Хопфа. Наличие у системы (6) в зоне $\Sigma_1 < \Sigma < \Sigma_2$ устойчивых предельных циклов является теоретическим подтверждением сильных осцилляций, наблюдаемых в экспериментах.

Функция стохастической чувствительности

Анализ влияния случайных возмущений на различные режимы рассматриваемой нелинейной модели течения суспензии опирается на метод функции стохастической чувствительности (ФСЧ) [11]. Основные элементы теории ФСЧ представим здесь для общего случая автономной динамической системы. В качестве исходной детерминированной модели рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (8)$$

где x — n -мерный вектор, $f(x)$ — достаточно гладкая n -мерная вектор-функция. В качестве стохастической модели для (8) используется система стохастических уравнений Ито

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad (9)$$

где ε — параметр интенсивности возмущений, $\sigma(x)$ — достаточно гладкая $n \times n$ -матричная функция, задающая зависимость случайных возмущений от состояния системы, $w(t)$ — n -мерный стандартный винеровский процесс.

Предполагается, что система (8) имеет экспоненциально устойчивый аттрактор (например, равновесие или цикл).

Под воздействием невырожденных шумов ($\sigma(x) \neq 0$) случайные траектории системы (9) покидают детерминированный аттрактор и формируют вокруг него некоторый пучок. В случае, когда вероятностное распределение случайных состояний в этом пучке с течением времени стабилизируется, можно говорить о наличии у возмущенной системы стохастического аттрактора — устойчивого инвариантного вероятностного распределения случайных состояний динамической системы. Стохастический аттрактор можно интерпретировать как предельное множество траекторий системы в присутствии шумов. Полное вероятностное описание стохастического аттрактора системы, находящейся под воздействием шума интенсивности ε , дается соответствующей стационарной плотностью распределения $p(x, \varepsilon)$.

Функция $p(x, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова. Однако точное решение этого уравнения уже для двумерных систем весьма затруднительно. Важный для практики случай воздействия малых возмущений приводит к известным проблемам анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных. В этой ситуации одним из наиболее распространенных приемов является прямое численное моделирование случайных траекторий с их последующей статистической обработкой.

В настоящее время развивается подход, позволяющий для искомых вероятностных характеристик стохастических аттракторов найти соответствующее приближение. В работе А. Д. Вентцеля и М. И. Фрейдлина [12] был предложен метод, использующий функцию квазипотенциала.

В случае малых шумов с помощью квазипотенциала $v(x)$ можно записать асимптотику стационарной плотности распределения

$$p(x, \varepsilon) \approx K \cdot \exp\left(-\frac{v(x)}{\varepsilon^2}\right).$$

В задачах устойчивости основное внимание уделяется поведению системы в малой окрестности аттрактора. Для квазипотенциала вблизи аттрактора детерминированной системы может быть найдена квадратичная аппроксимация, позволяющая получить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения. Эту аппроксимацию задает функция стохастической чувствительности. Данная функция была введена в работах [11], [13]–[15], где с ее помощью были исследованы особенности стохастических автоколебаний в моделях брюсселятора, Лоренца и Чуа. Конструктивные возможности метода ФСЧ представлены в [16] для задачи подавления хаоса и в [17] для анализа индуцированных шумами переходов.

Рассмотрим метод ФСЧ для двух видов аттракторов — равновесия и предельного цикла.

Стохастическое равновесие

Пусть аттрактором системы (8) является точка покоя \bar{x} .

Воздействие стохастических возмущений приводит к тому, что вокруг устойчивой точки покоя формируется облако случайных траекторий. Соответствующий стохастический аттрактор естественно называть стохастическим равновесием.

Вблизи равновесия \bar{x} для квазипотенциала используется квадратичная аппроксимация $v(x) \approx \frac{1}{2}(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))$, где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение. Эта аппроксимация позволяет представить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения

$$p(x, \varepsilon) \approx K \cdot \exp \left(-\frac{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}{2\varepsilon^2} \right)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 W$, характеризующей разброс случайных траекторий стохастической системы (9) вокруг равновесия \bar{x} .

Пусть $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n \geq 0$ — собственные числа, а h_1, h_2, \dots, h_n — ортонормированный базис собственных векторов матрицы W . При невырожденных шумах значения η_i положительны. При этом величины $\varepsilon^2 \eta_i$ задают разброс (дисперсию) случайных траекторий в направлении векторов h_i .

В случае экспоненциальной устойчивости точки покоя \bar{x} , когда спектр матрицы F лежит в левой полуплоскости, матрица W является единственным решением алгебраического уравнения

$$FW + WF^\top = -S, \quad (10)$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S = GG^\top, \quad G = \sigma(\bar{x}).$$

Матрица W , связывая интенсивность воздействия ε^2 с ковариацией $\varepsilon^2 W$ разброса случайных траекторий вокруг \bar{x} , играет роль матричного коэффициента стохастической чувствительности равновесия \bar{x} . В качестве общей скалярной характеристики чувствительности точки покоя удобно использовать величину $M = \max_i \eta_i$ — показатель стохастической чувствительности.

Предельный цикл

Теперь рассмотрим случай, когда аттрактором системы (8) является предельный цикл $\Gamma = \{\xi(t) | 0 \leq t < T\}$, задаваемый T -периодическим решением $\xi(t)$ системы (8).

Динамика малых отклонений, как и в случае точки покоя, определяется системой первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \quad (11)$$

где $F = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))$ — T -периодическая матрица.

Классическими характеристиками устойчивости цикла являются мультипликаторы ρ_i — собственные числа матрицы монодромии $B = Z(T)$, где $Z(t)$ — фундаментальная матрица системы (11).

Один из мультипликаторов (пусть это будет ρ_1) всегда равен единице. Характеристикой детерминированной устойчивости цикла является число $\rho = \max_i \rho_i$ ($i = 2, \dots, n$), которое показывает, во сколько раз траектория приближается к циклу за один оборот при малом отклонении начальных данных.

Однако данная логика справедлива только лишь для возмущений, действующих на систему однократно, в некоторый начальный момент времени. Кроме того, мультипликаторы не позволяют различать и сравнивать по степени устойчивости разные участки цикла.

При воздействии стохастических шумов вокруг цикла формируется стационарно распределенный пучок случайных траекторий системы (9), лежащих в некоторой инвариантной для системы окрестности U . Соответствующий стохастический аттрактор будем называть стохастическим циклом.

Пусть Π_t — гиперплоскость, ортогональная циклу в точке $\xi(t)$ ($0 \leq t \leq T$). Через U_t обозначим окрестность точки $\xi(t)$, лежащую в Π_t : $U_t = U \cap \Pi_t$. Предполагается, что $U_t \cap U_s = \emptyset$ при $t \neq s$. Вероятностное описание случайных траекторий в пучке удобно связать со следующей вектор-функцией X_t . Значения X_t есть точки пересечения случайных траекторий нелинейной системы (2) с U_t . Вероятностное распределение траекторий в пучке с течением времени стабилизируется, поэтому случайная переменная X_t в окрестности U_t имеет некоторое стационарное распределение с плотностью $p_t(x, \varepsilon)$.

Для малых шумов с помощью соответствующей квадратичной аппроксимации квази-потенциала вблизи цикла можно записать экспоненциальную гауссову асимптотику [11]

$$p_t(x, \varepsilon) \approx K \cdot \exp\left(-\frac{(x - \xi(t))^T W^+(t)(x - \xi(t))}{2\varepsilon^2}\right)$$

со средним значением $m_t = \xi(t)$ и ковариационной матрицей $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$ («+» — знак псевдообращения).

Это распределение, сосредоточенное в гиперплоскости Π_t , является сингулярным: $\text{rank} D(t, \varepsilon) \leq n - 1$. Для невырожденных шумов ($\det \sigma(x)|_\Gamma \neq 0$) имеем $\text{rank} D(t, \varepsilon) = n - 1$. Ковариационная матрица $D(t, \varepsilon)$ характеризует разброс точек пересечения случайных траекторий с гиперплоскостью Π_t .

Рассмотрим собственные значения $\eta_1(t) \geq \eta_2(t) \geq \dots \geq \eta_n(t) \geq 0$ и собственные векторы $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)$ матрицы $W(t)$. В силу вырожденности $W(t)$, собственное значение $\eta_n(t) \equiv 0$. Остальные собственные значения и соответствующие им собственные векторы характеризуют разброс пучка в гиперплоскости Π_t по величине и направлению. Матрица $W(t)$, играющая роль *коэффициента стохастической чувствительности* цикла, является решением системы [15]

$$\begin{aligned} \dot{W} &= F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t), \\ W(t+T) &= W(t), \\ W(t)r(t) &= 0, \quad r(t) = f(\xi(t)), \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^T(t), \quad G(t) = \sigma(\xi(t)), \\ P(t) &= P_{f(\xi(t))}, \quad P_r = I - \frac{rr^T}{r^T r}. \end{aligned}$$

Здесь P_r — матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$. Эта система, благодаря экспоненциальной устойчивости предельного цикла, имеет единственное решение. Необходимые теоретические сведения по решению системы (12) приведены в [15].

В случае цикла на плоскости ($n = 2$) матрица стохастической чувствительности $W(t)$ и проекционная матрица $P(t)$ имеют ранг, равный единице, и представимы в виде

$$W(t) = \mu(t)P(t), \quad P(t) = p(t)p^T(t).$$

Здесь $p(t)$ — нормированный вектор, ортогональный касательному вектору $f(\xi(t))$, а значит, и циклу Γ в точке $\xi(t)$, а $\mu(t) > 0$ — T -периодическая скалярная функция, задающая разброс пучка по нормали $p(t)$ к циклу, — функция стохастической чувствительности (ФСЧ).

Функция $\mu(t)$ является решением [16] краевой задачи

$$\dot{\mu} = a(t)\mu + b(t), \quad \mu(0) = \mu(T)$$

с T -периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^\top(t)(F^\top(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^\top(t)S(t)p(t)$$

и может быть найдена в явном виде

$$\mu(t) = g(t)(c + h(t)), \tag{13}$$

где

$$g(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right), \quad h(t) = \int_0^t \frac{b(s)}{g(s)}ds, \quad c = \frac{g(T)h(T)}{1 - g(T)}.$$

Функция стохастической чувствительности определена в точках цикла Γ и характеризует на различных участках этого цикла разброс пучка случайных траекторий. Эта функция позволяет сравнивать степень чувствительности разных частей цикла к стохастическим помехам и предсказывать тонкие эффекты случайных воздействий.

В анализе чувствительности предельного цикла к случайным возмущениям важную роль играет величина $M = \max_{[0;T]} \mu(t)$, которую мы будем называть показателем стохастической чувствительности цикла.

Анализ стохастически возмущенной модели течения жидкости

Стохастические возмущения в исследуемой модели течения жидкости могут иметь различные источники и быть связанными с разными параметрами. В данной работе мы ограничимся возмущениями только одного параметра — сдвигового напряжения Σ .

Будем считать, что при формировании на верхней пластине сдвигового напряжения наряду с его контролируемым постоянным значением Σ вносится случайное возмущение $\varepsilon\nu(t)$, где $\nu(t)$ — дельта-коррелированный стандартный белый шум, ε — постоянный параметр интенсивности этого возмущения. Тогда для (6) с выбранными выше параметрами соответствующая стохастическая система в формализации Ито будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -4x - k(x^2 - 3x + 2)y + 4\Sigma + \varepsilon\dot{w}(t), \end{aligned} \tag{14}$$

где $w(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Присутствие случайных возмущений меняет характер установившихся режимов в течения жидкости между пластинами. Под действием случайной компоненты напряжения траектории системы покидают соответствующие детерминированные аттракторы и формируют стохастические аттракторы, соответствующие уже новым стохастическим режимам функционирования. Вокруг отмеченных ранее детерминированных равновесий и циклов наблюдаются стохастические флуктуации. Разброс соответствующих случайных состояний

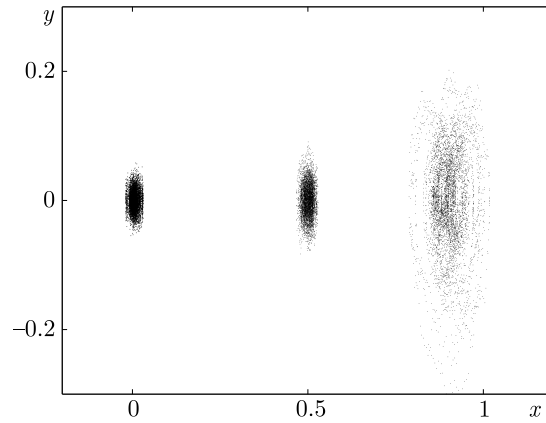


Рис. 7. Случайные состояния системы для $k = 10, \varepsilon = 0.1$ при $\Sigma = 0$ (слева), при $\Sigma = 0.5$ (в центре), при $\Sigma = 0.9$ (справа).

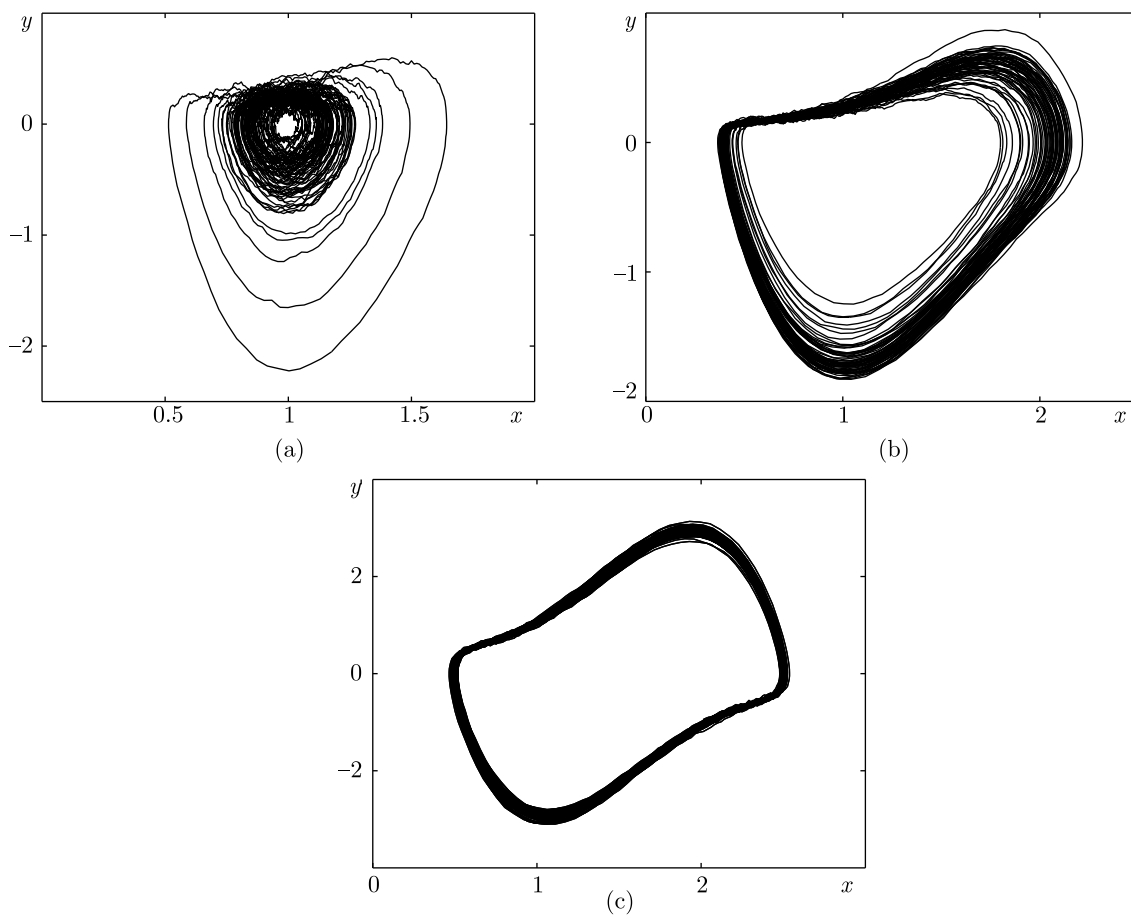


Рис. 8. Случайные траектории системы для $k = 10$ при $\Sigma = 1.0$ (a), при $\Sigma = 1.1$ (b), при $\Sigma = 1.5$ (c).

системы (14) зависит не только от интенсивности внешних возмущений ε , но и от того, насколько значения параметров системы близки к бифуркационным.

На рис. 7, 8 представлены некоторые иллюстрации стохастических аттракторов системы (14), полученные прямым численным моделированием.

На рис. 7 изображены случайные состояния стохастической системы (14) для $k = 10$, $\varepsilon = 0.1$ в зоне $0 < \Sigma < 1$ при $\Sigma = 0$ (слева), $\Sigma = 0.5$ (в центре) и при $\Sigma = 0.9$ (справа). Как видим, чем ближе Σ к точке бифуркации $\Sigma_1 = 1$, тем больше разброс.

При прохождении точки бифуркации $\Sigma_1 = 1$ наблюдается резкое увеличение дисперсии (рис. 8а). В зоне $1 < \Sigma < 2$ случайные траектории формируют пучки уже вокруг соответствующих детерминированных циклов. На рис. 8б,с изображены пучки случайных траекторий системы для $k = 10$, $\varepsilon = 0.1$ при $\Sigma = 1.1$ и $\Sigma = 1.5$. Как видим, ширина пучка и здесь существенно зависит от параметра Σ . Кроме того, можно отметить значительную неравномерность ширины разброса траекторий при движении вдоль циклов.

Общая картина отмеченных здесь особенностей стохастических аттракторов системы (14) в зависимости от параметров k и Σ может быть детально исследована с помощью метода функции стохастической чувствительности.

На рис. 9 представлены графики ФСЧ для стохастических циклов системы (14) для $k = 10$ при $\Sigma = 1.1$ и $\Sigma = 1.5$. Эти функции дают нам детальное описание изменения стохастической чувствительности вдоль цикла. Пики функции μ соответствуют участкам цикла с максимальным разбросом траекторий. Существенный перепад значений стохастической чувствительности μ вдоль цикла и является причиной отмеченной выше неравномерности ширины пучка.

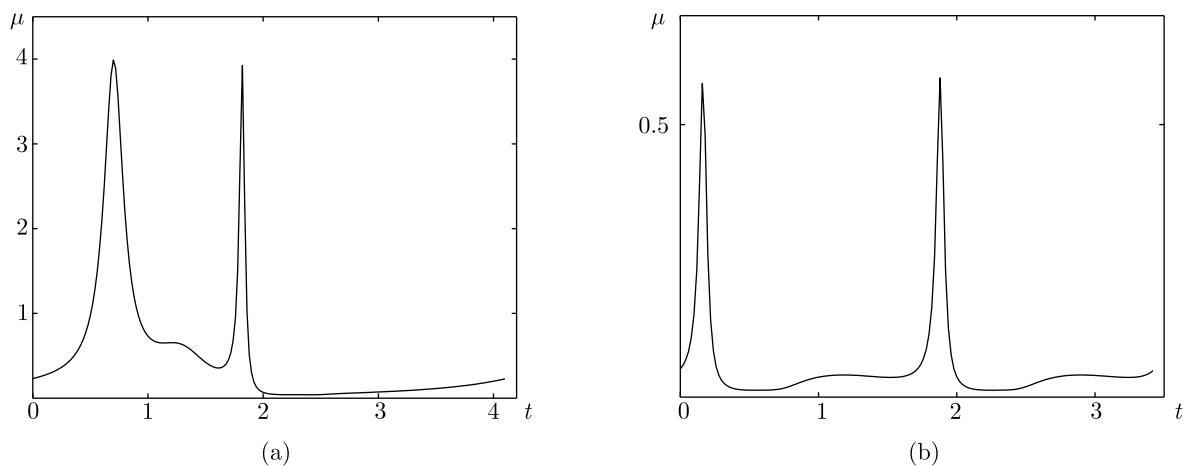


Рис. 9. Графики функции стохастической чувствительности циклов для $k = 10$ при $\Sigma = 1.1$ (а), $\Sigma = 1.5$ (б).

Зависимость ширины пучка от параметра Σ также связана с соответствующими особенностями в поведении ФСЧ. Как видно из рис. 9, значения ФСЧ при $\Sigma = 1.1$ на порядок больше значений ФСЧ при $\Sigma = 1.5$. Этот факт и объясняет различие ширины соответствующих пучков на рис. 8б,с.

Зависимость показателя стохастической чувствительности M от параметров Σ и k представлена на рис. 10. Функция $M(\Sigma)$ в зонах $0 < \Sigma < 1$ и $\Sigma > 2$ описывает стохастическую чувствительность равновесий, а в зоне $1 < \Sigma < 2$ — стохастическую чувствительность циклов.

В зонах $0 < \Sigma < 1$ и $\Sigma > 2$ функция $M(\Sigma, k)$ находится аналитически

$$M(\Sigma, k) = \frac{1}{k(\Sigma^2 - 3\Sigma + 2)}.$$

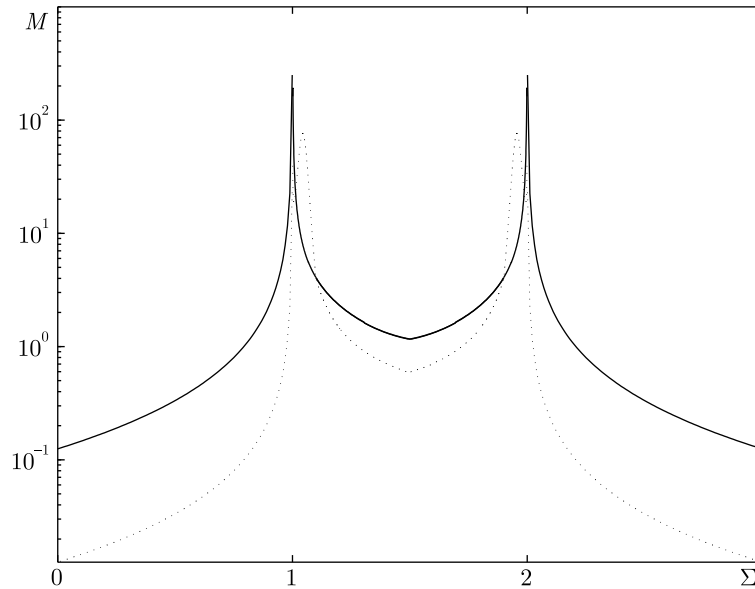


Рис. 10. Стохастическая чувствительность аттракторов при $k = 1$ (сплошная линия) и $k = 10$ (пунктир).

При монотонном стремлении параметра Σ к точкам бифуркации стохастическая чувствительность равновесий монотонно возрастает и стремится к бесконечности. Данная закономерность и является причиной изменения разброса случайных состояний системы, отмеченных выше на рис. 7. При изучении стохастических равновесий немаловажную роль играет и параметр k . Увеличение k ведет к уменьшению стохастической чувствительности равновесий (см. рис. 10).

Рассмотрим теперь зону $1 < \Sigma < 2$. При $k = 1$ график $M(\Sigma)$ представляет собой выпуклую вниз функцию с вертикальными асимптотами в точках бифуркации. Наименьшую чувствительность имеет цикл при $\Sigma = 1.5$. В достаточно широком интервале, лежащем в средней части отрезка $[1, 2]$, стохастическая чувствительность циклов практически не изменяется. При приближении параметра к точкам бифуркации стохастическая чувствительность циклов, как и равновесий, резко возрастает. Такое изменение стохастической чувствительности вполне согласуется с изменением характеристических показателей (см. рис. 6). Здесь увеличение k ведет к уменьшению стохастической чувствительности.

При $k = 10$ у графика функции $M(\Sigma)$ появляется важная новая особенность. В зоне, примыкающей к точкам бифуркации, график приобретает резко выраженный дополнительный всплеск. Величина этого всплеска существенно зависит от параметра k . Соответствующие подробности приведены на рис. 11, где детально изображены фрагменты графиков $M(\Sigma)$ при $k = 10$ и $k = 20$.

При $k = 10$ величина пика имеет значение $M = 7.6 \times 10^1$, а при $k = 20$ мы имеем $M = 1.3 \times 10^6$. Как видим, увеличение параметра k в два раза привело к увеличению стохастической чувствительности на несколько порядков.

Рассмотрим детально при $k = 20$ характер воздействия случайных возмущений на детерминированные циклы системы в зоне, где наблюдается этот пик. Максимальное значение $M^* = 1.3 \times 10^6$ достигается при $\Sigma^* = 1.01188$. Этот пик локализован на узком интервале — уже в близлежащих точках значения функции $M(\Sigma)$ существенно меньше. Так, например, слева $M(1.005) = 8.9 \times 10^1$, а справа $M(1.02) = 6.8 \times 10^1$. Посмотрим, к чему может привести такое резкое изменение стохастической чувствительности.

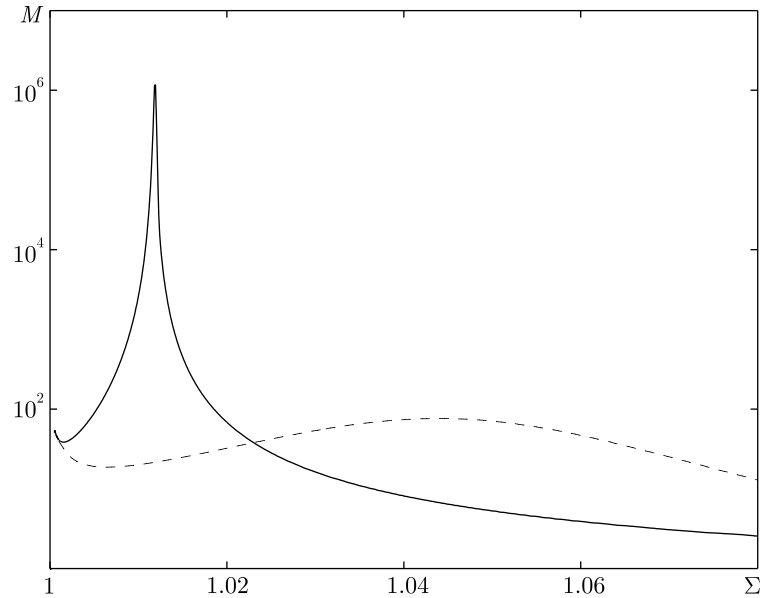


Рис. 11. Стохастическая чувствительность циклов вблизи точки бифуркации при $k = 10$ (пунктир) и $k = 20$ (сплошная линия).

Для этих трех близких значений $\Sigma = 1.005$, 1.01188 , 1.02 на рис. 12 приведены детерминированные, а на рис. 13 — соответствующие стохастические циклы при $\varepsilon = 0.001$. При значениях $\Sigma = 1.005$ и $\Sigma = 1.02$ случайные траектории практически не отличаются от невозмущенных орбит. При $\Sigma^* = 1.01188$ цикл, за исключением короткого горизонтального участка, размывается в широкую полосу.

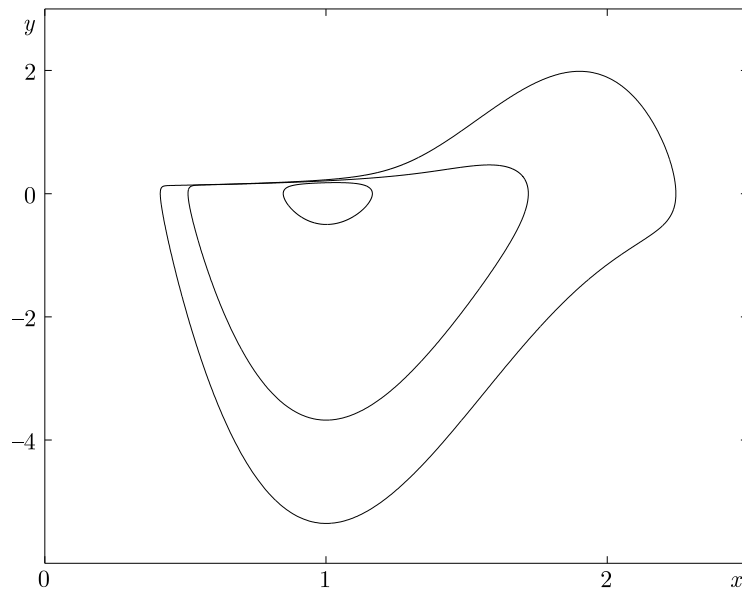


Рис. 12. Детерминированные циклы для $k = 20$: при $\Sigma = 1.005$ — внутренний, $\Sigma = 1.01188$ — средний, $\Sigma = 1.02$ — внешний.

Как видим, для изучаемой модели метод ФСЧ позволил обнаружить узкую зону сверхвысокой чувствительности автоколебаний, когда даже малые, по сути фоновые помехи воз-

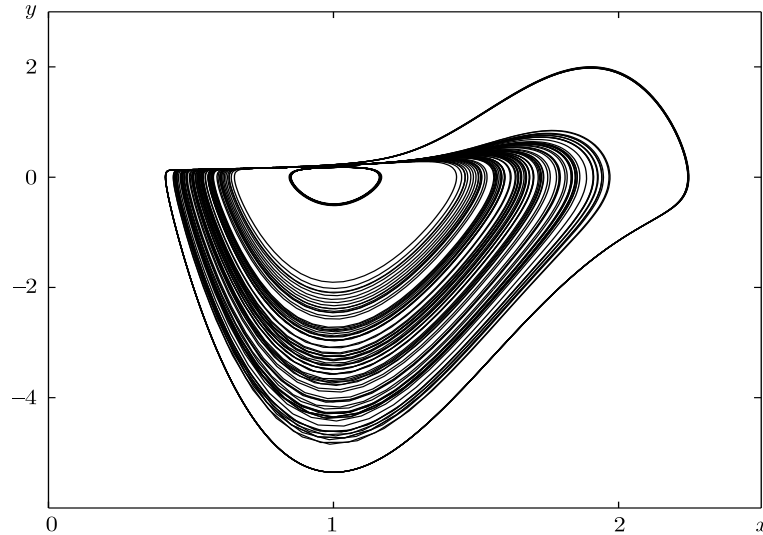


Рис. 13. Стохастические циклы для $k = 20$, $\varepsilon = 0.001$, при $\Sigma = 1.005$ — внутренний, $\Sigma = 1.01188$ — средний, $\Sigma = 1.02$ — внешний.

буждают существенные флуктуации амплитуды. Следует подчеркнуть, что с точки зрения характеристических показателей в этой зоне степень устойчивости монотонно возрастает.

Заметим, что ширина этой зоны сверхчувствительности очень мала. Обнаружить ее эмпирически, анализируя разброс случайных траекторий, получаемых прямым численным моделированием, практически невозможно. Для этого потребовался бы слишком мелкий шаг по параметрам.

Заключение

В экспериментах по исследованию потоков высококонцентрированных сложных жидкостей была обнаружена N -образная нелинейная зависимость между вязким напряжением и скоростью деформационного течения. Если течение суспензии возбуждалось постоянным напряжением, попадающим на убывающую ветвь этой зависимости, то стационарное течение теряло устойчивость и возникали сильные осцилляции скорости течения.

В работе [10] было показано, что экспериментально обнаруженная N -образная нелинейность вызывается эффектами контактного трения между частицами суспензии, что позволило построить простую математическую модель динамики вязкоупругого потока сложной жидкости. В данной работе представлены результаты бифуркационного анализа модели. Показано, что колебания, обнаруженные в экспериментах, возникают в зоне параметров, где равновесие теряет устойчивость, а система в качестве аттракторов имеет устойчивые предельные циклы. Исследованы особенности наблюдаемой здесь бифуркации Хопфа в зависимости от степени жесткости системы. Центральное место в работе занимает исследование реакции системы на случайные возмущения. На основе метода функции стохастической чувствительности проведен параметрический анализ стохастических аттракторов системы. Показано, что с увеличением жесткости стохастическая чувствительность автоколебаний резко возрастает. Выявлена узкая зона сверхвысокой чувствительности автоколебаний, когда даже малые помехи приводят к существенным флуктуациям их амплитуды.

Таким образом, проведенный анализ предложенной модели динамики сложной жидкости позволил на качественном уровне выявить физическую природу экспериментально обнаруженных нелинейных явлений.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 09-01-00026, 09-08-00048, CRDF PG 07-005-02, Мин. Обр. РФ 2.1.1/1535, 2.1.1/2571, ФЦП 02.740.11.0202.

Список литературы

- [1] Ladd A.J.C. Hydrodynamic transport coefficients of random dispersions of hard spheres // *J.Chem.Phys.*, 1990, vol.93, p.3484.
- [2] Barnes H.A. Shear-Thickening ("Dilatancy") in Suspensions of Nonaggregating Solid Particles Dispersed in Newtonian Liquids // *J.Rheology*, 1989, vol.33(2), pp.329–366.
- [3] Lee J.S. and Wagner N.J. Dynamic properties of shear thickening colloidal suspensions // *Rheol.Acta*, 2003, vol. 42, pp.199–208.
- [4] Franks G.V., Zhon Z., and Duin N.J. Effect of interparticle forces on shear thickening of oxide suspensions // *J.Rheology*, 2000, vol.44(4), pp.759–779.
- [5] Brien V.T.O. and Mackay M.E. Shear and elongation flow properties of kaolin suspensions // *J.Rheology*, 2002, vol.46(3), pp.557–572.
- [6] Bossis G. Private communication, will be published.
- [7] Lootens D., Damme H., and Herbraut P. Giant Stress Fluctuations at the Jamming Transition // *Phys.Rev.Letters*, 2003, vol.90, p.178301.
- [8] Winenburger A., Colin A., Leng J., Arneodo A., and Roux D. Oscillating Viscosity in a Lyotropic Lamellar Phase under Shear Flow // *Phys.Rev.Letters*, 2001, vol.86, pp.1374–1377.
- [9] Bandyopadhyay R. and Sood A.K. Chaotic dynamics in shear-thickening surfactant solutions // *Europhys.Letters*, 2001, vol.56, pp. 447–453.
- [10] Башкирцева И.А., Зубарев А.Ю., Исакова Л.Ю., Ряшко Л.Б. К реофизике высоко концентрированных суспензий // *Коллоидн. Журнал*, 2009 (в печати).
- [11] Bashkirtseva I. A. and Ryashko L. B. Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // *Physica A*, 2000, vol. 278, pp.126–139.
- [12] Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
- [13] Bashkirtseva I. A. and Ryashko L. B. Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // *Dynamic Systems and Applications*, 2002, vol.11, pp. 293–309.
- [14] Ryagin M. and Ryashko L. The analysis of the stochastically forced periodic attractors for Chua's circuit // *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2004, vol.14, pp. 3981–3987.
- [15] Bashkirtseva I. A. and Ryashko L. B. Stochastic sensitivity of 3D-cycles // *Mathematics and Computers in Simulation*, 2004, vol.66, pp. 55–67.
- [16] Bashkirtseva I. A. and Ryashko L. B. Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, vol. 26, pp. 1437–1451.
- [17] Bashkirtseva I. and Ryashko L. Constructive Analysis of Noise-Induced Transitions for Coexisting Periodic Attractors of Lorenz Model // *Phys. Rev. E*, 2009, vol. 79, pp. 041106–041114.