Комментарий редакции к статьям Г. М. Розенблата «О движении плоского твердого тела по шероховатой прямой» и «Метод определения параметров безотрывного движения волчка на гладкой плоскости»

В выпусках «НД» №3 за 2006 г. и №4 за 2008 г. были опубликованы две работы Г. М. Розенблата, первая их которых касается движения тела по плоскости при наличии сухого трения, а во второй рассматривается задача о безотрывном движении тела по гладкой поверхности. Учитывая критическое отношение, которое вызывали среди специалистов результаты автора по этой тематике (см. также статью Г. М. Розенблата в Вестнике УдГУ. Сер. Мат. Мех. Комп. науки №2 за 2009 г.), редакционная коллегия «НД» сочла своей обязанностью более подробно разобрать упомянутые две статьи.

Ниже отмечены некоторые существенные недостатки статьи 2006 года, которые, к сожалению, не были отмечены на этапе рецензирования. В этой статье автором используется подход к трению, основанный на предыстории движения тела; мы укажем на неудовлетворительность такого анализа задачи.

Относительно статьи 2008 года, в которой приведено ошибочное решение задачи, мы приводим в этом номере статью В. В. Васькина и О. С. Наймушиной с правильным решением. Данная задача является довольно элементарной, однако она представляет интерес как постановочная и позволяет наметить перспективы дальнейших, более продвинутых исследований.

Редакция приглашает читателей присылать свои отзывы и комментарии для возможного размещения в данной рубрике. Разумеется, важнейшей задачей журнала является обеспечение тщательного рецензирования публикуемых работ. Тем не менее, могут и должны публиковаться и обоснованные критические письма по поводу уже опубликованных материалов, их содержательное обсуждение, ценные исторические комментарии и пр.

О статье «О движении плоского твердого тела по шероховатой прямой». Рассмотренная в статье задача — простейший пример механической системы, в которой использование закона Кулона для описания трения приводит к невозможности однозначного определения ускорений и реакций из основных теорем динамики. Примеры такого рода были обнаружены в начале 20-го века П. Пенлеве и стали впоследствии предметом многочисленных исследований и дискуссий. В частности, этому вопросу посвящены работы Ф. Клейна, Ф. Пфейфера, Е. А. Болотова, Н. В. Бутенина, М. А. Скуридина, В. А. Самсонова, Ю. И. Неймарка, Н. М. Фуфаева. Приведем основные выводы этих исследований в применении к обсуждаемой задаче.

1. Теорема о движении центра масс и теорема моментов дают три условия для определения четырех неизвестных: двух линейных ускорений, углового ускорения, а также нормальной реакции опоры. В качестве четвертого (кинематического) условия можно добавить требование сохранения контакта между телом и опорной прямой. Полученную *алгебраическую* систему следует решать с учетом закона Кулона, а также одностороннего характера связи.

2. Корректность данной системы зависит от величины коэффициента трения: если этот коэффициент меньше некоторого критического значения (зависящего от конфигурации системы и угловой скорости тела), то имеется единственное решение. В таком случае можно исключить реакцию и получить *дифференциальную* систему, описывающую динамику тела не некотором интервале времени.

3. При превышении коэффициентом трения критического значения алгебраическая система становится несовместной или неопределенной. Первый из этих случай на практике может возникнуть при резком изменении внешних условий: например, опорная прямая имеет неоднородную шероховатость (колесо со льда попадает на асфальт). При этом составлению дифференциальных уравнений движения должен предшествовать учет «исправления» распределения скоростей вследствие «удара трением». После удара алгебраическая система становится корректной и допускает исключение реакции.

4. Случай неопределенности формально может возникать при непрерывном движении (или покое) тела. Для перехода от алгебраической системы к дифференциальной требуется выбрать одно из значений реакции из двух (или трех) вариантов, согласующихся с законами динамики и законом трения. Общепринятого правила отбора «истинного» решения пока нет, для этого можно пользоваться соображениями устойчивости (Клейн) или методами асимптотического разделения движений (Неймарк, Фуфаев).

В статье Розенблата постановка задачи отличается от традиционной: автор исходит не из *алгебраических* уравнений, выражающих теоремы динамики и закон трения, а из *дифференциальных* уравнений, описывающих движение тела *в контакте с опорой* в некотором интервале времени, предшествующем рассматриваемому моменту. Задавшись начальными условиями, он определяет тип движения тела в прошлом и на основе этого делает вывод о будущем движении.

По нашему мнению, такой подход имеет серьезные изъяны. Приведем наиболее существенные замечания, полученные редакцией от читателей журнала после опубликования статьи.

Замечание 1. Часть начальных условий признается Розенблатом *некорректными.* Тем самым он просто отказывается решать задачу с этими условиями. Отметим, что на практике подобные случаи могут возникать при включении двигателя, порыве ветра и пр. В постановке задачи в начале с. 294 автор указывает, что плоская система сил произвольна.

Замечание 2. В формулировках теорем 1 и 2 никак не учитывается и возможность отрыва тела от опоры при $t > t_0$. Автор ограничивается замечанием (с. 305): «когда имеется контакт, то положительная реакция устанавливается именно такой, чтобы … обеспечить контакт». Такое поведение нормальной реакции идеализировано: в реальных системах для обеспечения непрерывного контакта (так называемого «скользящего режима») требуется создание специальных управляющих воздействий.

Пример. В случае $U < 0$, $W < 0$ (строки 6, 7, 9 и 10 табл. 1) оказывается возможным не только безотрывное движение, но и отрыв тела от опоры (парадокс неединственности).

В примере со стержнем (с. 301–302) односторонняя связь задается неравенством

$$q = y - l\cos\varphi \geqslant 0,$$

откуда

$$\ddot{q} = \ddot{y} + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi + l\ddot{\varphi}\sin\varphi.$$

Если реакция связи равна нулю, то $\ddot{\varphi} = 0$, и получаем $\ddot{q} = -U$. Следовательно, в случае $U < 0$ отрыв от связи ($\ddot{q} > 0$) согласуется с уравнениями динамики вне зависимости от значений остальных параметров.

Более того, теоретически возможен случай двойного вырождения $U = 0$, $W = 0$, когда контакт сохраняется при любом допустимом значении нормальной реакции. При этом уравнения движения допускают континуум решений, а рекомендации по отбору из них «истинного» в обсуждаемой статье отсутствуют.

Замечание 3. В недавно изданной на русском языке книге Джеллетта «Трактат по теории трения» (Изд-во РХД, 2009) имеются многочисленные примеры неединственности в случае трения покоя, когда возможно как продолжение состояния покоя, так и начало скольжения. Эти примеры (кстати, проверенные и отредактированные самим Розенблатом) не согласуются с выводами обсуждаемой статьи.

Пример. Вновь обратимся к примеру со стержнем, считая в начальный момент скорости всех его точек нулевыми.

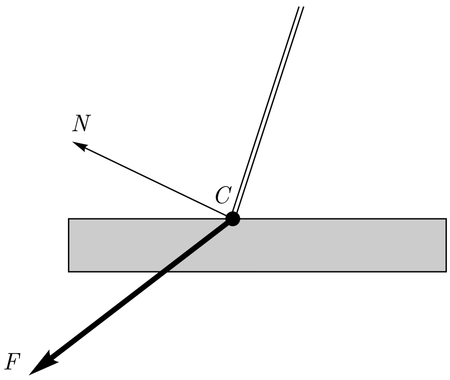

Рис. 1

Допустим, что стержень касается опоры в точке C, а активные силы имеют равнодействующую F, приложенную в этой точке (рис. 1). Будем считать, что коэффициент трения достаточно велик, так что вектор $-F$ лежит в конусе трения. Тогда стержень *может* находиться в равновесии как в прошлом, так и в будущем. Поэтому определение корректного движения в смысле Розенблата выполнено. С другой стороны, для достаточно малого радиуса инерции стержня (т. е. масса сосредоточена в окрестности его середины) возможен также отрыв стержня от опоры. Действительно, скорость точки С складывается из переносной скорости в направлении вектора F и обратно пропорциональной массе стержня, а так же относительной скорости в направлении нормали к стержню N, обратно пропорциональной моменту инерции. Сумма этих векторов может иметь положительную вертикальную составляющую, что свидетельствует о возможности отрыва от опоры. Кроме того, как нетрудно проверить, в этом случае возможен также третий тип: начало скольжения стержня влево.

Замечание 4. На с. 294 автор отмечает, что результаты, полученные в работе Болотова «являются не совсем конструктивными и неудобными для практического применения». На самом деле, Болотовым получена простая формула, устанавливающая верхнюю границу для величины коэффициента трения, ниже которой задача имеет единственное решение. Выше этой границы требуется усложнение модели.

Если судить по статье Розенблата, модель абсолютно твердого тела остается пригодной для любого коэффициента трения в законе Кулона. Этот вывод не подтвержден, так как подробные доказательства теорем 1, 2 не приведены.